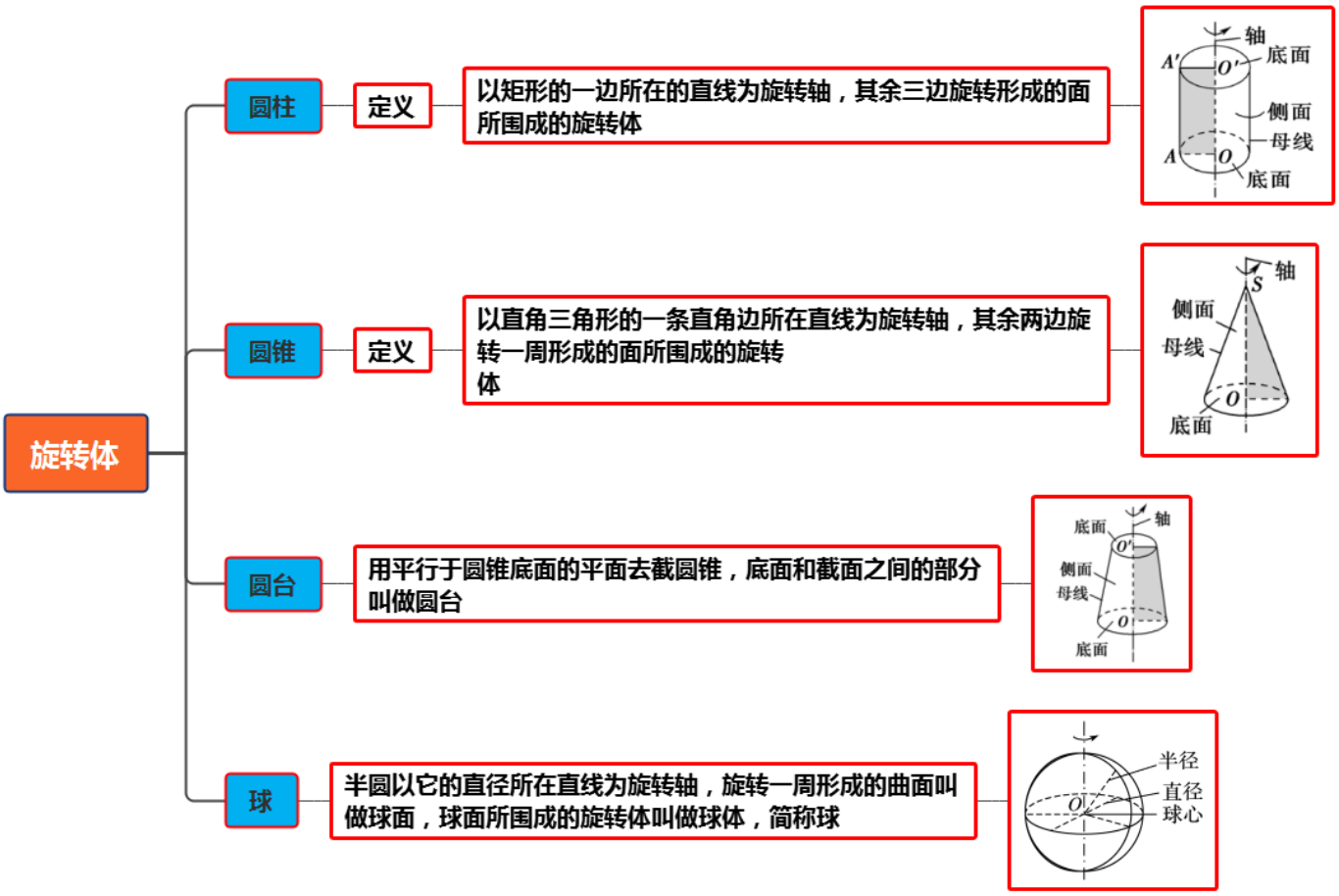
第 02 讲 8.1 基本立体图形（第 2 课时 圆柱、圆锥、圆台、球的结构特征简单组合体的结构特征）

01 学习目标

课程标准	学习目标
①了解圆柱、圆锥、圆台、球的定义.2.掌握圆柱、圆锥、圆台、球的结构特征。 ②了解简单组合体的概念及结构特征。 ③了解简单组合体的概念及结构特征	1.通过阅读课本解圆柱、圆锥、圆台、球的定义； 2.在棱柱、棱锥与棱台学习的基础上，进一步掌握圆柱、圆锥、圆台、球的结构特征； 3.了解简单组合体的概念及结构特征. 灵活运用各种知识解决组合体问题；

02 思维导图



03 知识清单

知识点 01：圆柱

（1）圆柱的定义

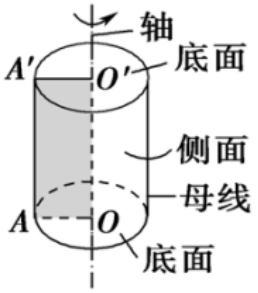
以矩形的一边所在的直线为旋转轴，其余三边旋转形成的面所围成的旋转体

圆柱的轴：旋转轴

圆柱的底面：垂直于轴的边旋转而成的圆面

圆柱的侧面：平行于轴的边旋转而成的曲面

圆柱侧面的母线：无论旋转到什么位置，平行于轴的边



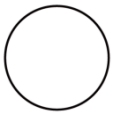
（2）圆柱的图形

（3）圆柱的表示

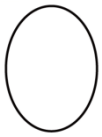
圆柱用表示它的轴的字母表示，如图，圆柱 OO'

【即学即练 1】1（2024 上·上海·高二上海师大附中校考期末）用一个平面截如图所示圆柱体，截面的形状不可能是（　）



A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】D

【详解】解：

对于选项 A：当截面与轴截面垂直时，得到的截面形状是圆；

对于选项 B：当截面与轴截面平行时，得到的截面形状是长方形；

对于选项 C：当截面与轴截面斜交时，得到的截面形状是椭圆；

对于选项 D：截面的形状不可能是等腰梯形；

故选：D

知识点 02：圆锥

（1）圆锥的定义

以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴，其余两边旋转一周形成的面所围成的旋转体

轴：旋转轴叫做圆锥的轴

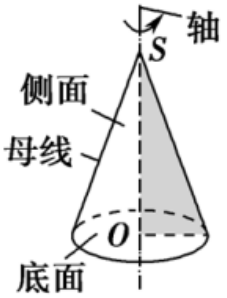
底面：垂直于轴的边旋转而成的圆面

侧面：直角三角形的斜边旋转而成的曲面

母线：无论旋转到什么位置，不垂直于轴的边

锥体：棱锥和圆锥统称为锥体

（2）圆锥的图形



（3）圆锥的表示

用表示它的轴的字母表示，如图，圆锥 SO

【即学即练 2】（2024·全国·高三专题练习）给出下列命题：

①在圆柱的上、下底面的圆周上各取一点，则这两点的连线是圆柱的母线；

②直角三角形绕其任一边所在直线旋转一周所形成的几何体都是圆锥；

③棱台的上、下底面可以不相似，但侧棱长一定相等.

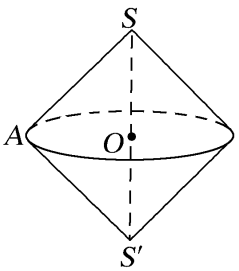
其中正确命题的个数是（　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【答案】A

【详解】①不一定，只有当这两点的连线平行于轴时才是母线；

②不一定，当以斜边所在直线为旋转轴时，其余两边旋转形成的面所围成的几何体不是圆锥，如图所示，它是由两个同底圆锥组成的几何体；



③错误，棱台的上、下底面相似且是对应边平行的多边形，各侧棱延长线交于一点，但是侧棱长不一定相等.

故选：A.

知识点 03：圆台

（1）圆台的定义

用平行于圆锥底面的平面去截圆锥，底面和截面之间的部分叫做圆台

轴：圆锥的轴

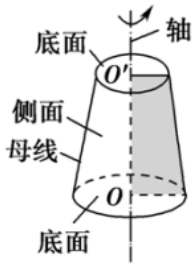
底面：圆锥的底面和截面

侧面：圆锥的侧面在底面与截面之间的部分

母线：圆锥的母线在底面与截面之间的部分

台体：棱台和圆台统称为台体

（2）圆台的图形



（3）圆台的表示

用表示它的轴的字母表示，如图，圆台 OO'

【即学即练 3】（2024 上·上海青浦·高二上海市朱家角中学校考期末）已知某圆台上底面和下底面的半径分别为 1 和 2，母线长为 3，则该圆台的高为____

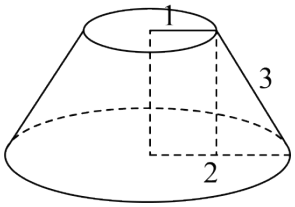
【答案】$2\sqrt{2}$

【详解】根据题意，作出圆台的图形，如图所示：

圆台上下底面的半径分别为 1 和 2，母线长为 3，

则圆台的高 $h=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$.

故答案为：$2\sqrt{2}$.



知识点 04　球的结构特征

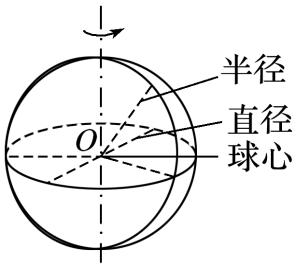
（1）定义：半圆以它的直径所在直线为旋转轴，旋转一周形成的曲面叫做球面，球面所围成的旋转体叫做球体，简称球

（2）相关概念：

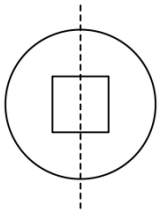
球心：半圆的圆心

半径：连接球心和球面上任意一点的线段

直径：连接球面上两点并经过球心的线段



【即学即练 4】（2024·全国·高一假期作业）铜钱又称方孔钱，是古代钱币最常见的一种．如图所示为清朝时的一枚“嘉庆通宝”，由一个圆和一个正方形组成，若绕旋转轴（虚线）旋转一周，形成的几何体是（　）





A．一个球

B．一个球挖去一个圆柱

C．一个圆柱

D．一个球挖去一个正方体

【答案】B

【详解】圆及其内部旋转一周后所得几何体为球，

而矩形及其内部绕一边旋转后所得几何体为圆柱，

故题设中的平面图形绕旋转轴（虚线）旋转一周，形成的几何体为一个球挖去一个圆柱，

故选：B.

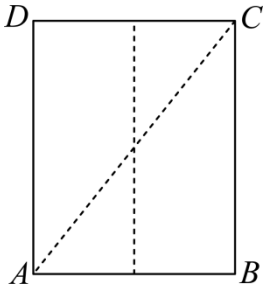


题型 01 圆柱的结构特征

【典例 1】（2023 上·上海普陀·高二上海市宜川中学校考期中）我国古代数学名著《数书九章》中的一个问题，其意思为“圆木长 2 丈 4 尺，圆周长为一丈，葛藤从圆木的底部开始向上生长，绕圆木两周，刚好顶部与圆木平齐，问葛藤最少长几丈几尺．”（古制 1 丈=10 尺）葛藤最少长是_____.

【答案】$4\sqrt{61}$ 尺

【详解】将圆柱形圆木沿一条母线剪开,两个侧面展开图沿母线拼接，得如下长方形 $AB=20$ 尺， $AD=24$ 尺，



所以葛藤最少长为 $AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=4\sqrt{61}$ 尺.

故答案为：$4\sqrt{61}$ 尺

【典例 2】（2023·上海·高三专题练习）在圆柱中，底面圆半径为1，高为2，上底面圆的直径为 AB，C 是底面圆弧上的一个动点，绕着底面圆周转，则 $\triangle ABC$ 的面积的范围_____.

【答案】$\left[2,\sqrt{5}\right]$

【详解】解：如图 1，设上底面圆心记为 O，下底面圆心记为 O'，

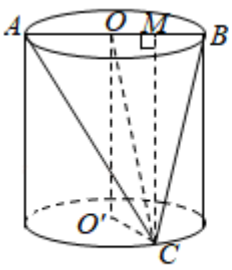


图1

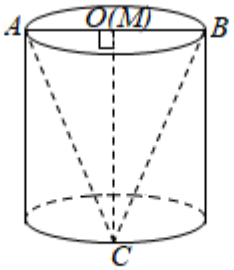


图2

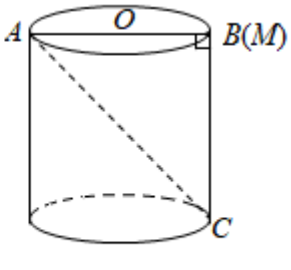


图3

连接 OC，过点 C 作 $CM\perp AB$，垂足为点 M，

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times CM$，

根据题意，AB 为定值 2，所以 $S_{\triangle ABC}$ 的大小随着 CM 的长短变化而变化，

如图 2 所示，当点 M 与点 O 重合时，$CM=OC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

此时 $S_{\triangle ABC}$ 取得最大值为 $\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{5}=\sqrt{5}$；

如图 3 所示，当点 M 与点 B 重合，CM 取最小值 2，

此时 $S_{\triangle ABC}$ 取得最小值为 $\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$，

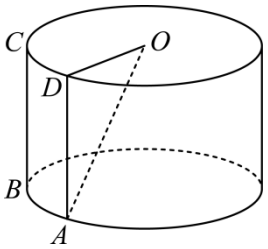
综上所述，$S_{\triangle ABC}$ 的取值范围为 $[2,\sqrt{5}]$.

故答案为：$[2,\sqrt{5}]$.

【变式 1】（2023·高一课时练习）已知圆柱的母线长为 l，底面半径为 r，O 是上底面圆心，A,B 是下底面圆周上两个不同的点，BC 是母线.若直线 OA 与 BC 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$，则 $\frac{l}{r}=$_____.

【答案】$\frac{\sqrt{3}}{3}$/$\frac{1}{3}\sqrt{3}$

【详解】如图，过点 A 作与母线 BC 平行的母线 AD，



则 $\angle DAO$ 即为直线 OA 与 BC 所成角，故 $\angle DAO=\dfrac{\pi}{3}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ODA$ 中，$\tan\angle DAO=\dfrac{OD}{AD}=\sqrt{3}$ ，

则 $\dfrac{l}{r}=\dfrac{AD}{OD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故答案为：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【变式 2】（2023 下·全国·高一专题练习）轴截面为正方形的圆柱叫做等边圆柱，已知某等边圆柱的轴截面面积为 $16\mathrm{cm}^2$，求该等边圆柱的底面周长和高.

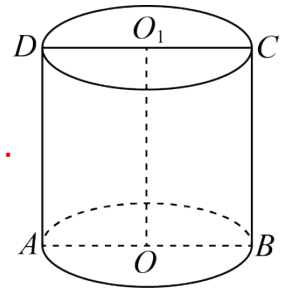
【答案】该等边圆柱的底面周长为 $4\pi\,\mathrm{cm}$，高为 $4\mathrm{cm}$

【详解】如图所示，作出等边圆柱的轴截面 $ABCD$，由题意知，四边形 $ABCD$ 为正方形

设图柱的底面半径为 r，则 $AB=AD=2r$.

轴截面 $ABCD$ 的面积 $S=AB\times AD=2r\times 2r=4r^2=16\mathrm{cm}^2$，解得 $r=2\mathrm{cm}$.

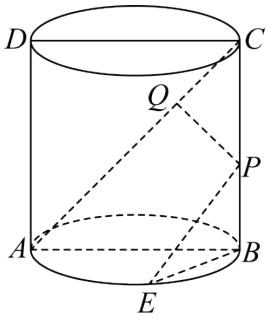
所以该等边圆柱的底面周长为 $2\pi r=4\pi\,\mathrm{cm}$，高为 $2r=4\mathrm{cm}$



.

题型 02 圆柱截面有关计算

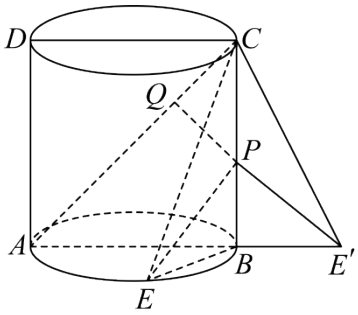
【典例 1】（2023 上·辽宁·高二校联考阶段练习）如图，某圆柱的轴截面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，P，Q 分别为线段 BC，AC 上的两个动点，E 为 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点，且 $BE=1$，则 $PQ+PE$ 的最小值为（　）



A．3　　B．$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{3}{2}$

【答案】C

【详解】如图，连接 EC，将 $\triangle BCE$ 沿直线 BC 旋转到 $\triangle BCE'$ 的位置，



且 E' 在 AB 的延长线上．则 $PE=PE'$，

由于圆柱的轴截面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，故 $\angle BAC=\angle BCA=\frac{\pi}{4}$，$AE'=AB+BE'=2+1=3$，

则 $PQ+PE=PQ+PE'\geq E'Q$，当 Q,P,E' 三点共线时取等号，

当 $E'Q\perp AC$ 时，$E'Q$ 最小，最小值为 $AE'\sin\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

即 $PQ+PE$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

故选：C

【典例 2】（2023 下·全国·高一专题练习）一个圆锥的底面半径为 2，高为 6，在其中有一个高为 x 的内接圆柱．

(1)用 x 表示圆柱的轴截面面积 S；

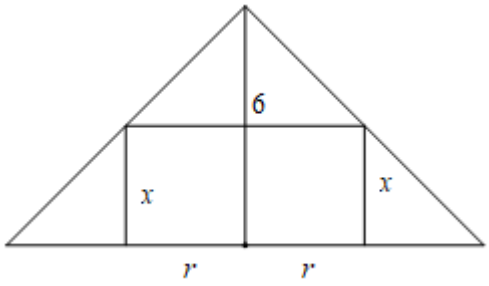
(2)当 x 为何值时，S 最大？

【答案】(1) $S=-\frac{2}{3}x^2+4x(0<x<6)$．

(2) 当 $x=3$ 时，S 最大，最大值为 6.

详解：画出圆柱和圆锥的轴截面，

如图所示，



设圆柱的底面半径为 r，则由三角形相似可得

$\frac{x}{6}=\frac{2-r}{2}$，解得 $r=2-\frac{x}{3}$.

(1)圆柱的轴截面面积

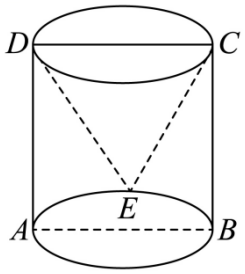
$S=2r\cdot x=2\cdot(2-\frac{x}{3})\cdot x=-\frac{2}{3}x^2+4x(0<x<6)$.

(2)$\because S=-\frac{2}{3}x^2+4x=-\frac{2}{3}(x^2-6x)$

$=-\frac{2}{3}(x-3)^2+6$，

∴当 $x=3$ 时，S 最大，最大值为 6.

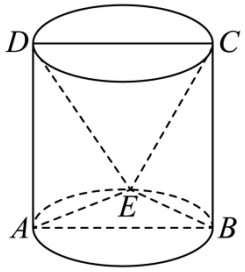
【变式 1】（2022·全国·模拟预测）如图，圆柱的底面半径为 2，四边形 $ABCD$ 是圆柱的轴截面，点 E 在圆柱的下底面圆上，若圆柱的侧面积为12π，且 $DE=4$，则 $CE=$（　）



A．$3\sqrt{2}$　　B．4　　C．$4\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{3}$

【答案】A

【详解】如下图所示：



设圆柱的母线长为 l，由圆柱的侧面积为12π可得 $4\pi l=12\pi$，得 $l=3$，

连接 AE，则 $AE=\sqrt{DE^2-AD^2}=\sqrt{7}$，

连接 BE，则 $AE\perp BE$，故 $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=3$，

故 $CE=\sqrt{BE^2+BC^2}=3\sqrt{2}$.

故选：A.

【变式 2】（2023 上·上海浦东新·高二校考期末）从一张半径为 3 的圆形铁皮中裁剪出一块扇形铁皮（如图 1 阴影部分），并卷成一个深度为 h 米的圆锥筒（如图 2）.若所裁剪的扇形铁皮的圆心角为 $\frac{2\pi}{3}rad$.

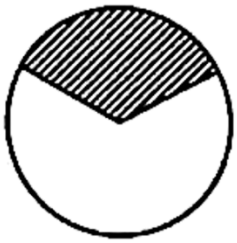


图1

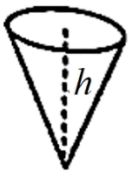


图2

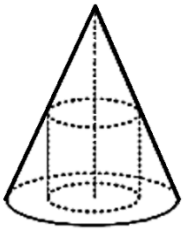


图3

（1）求圆锥筒的容积；

（2）在（1）中的圆锥内有一个底面圆半径为 x 的内接圆柱（如图 3），求内接圆柱侧面积最大时 x 的值.

【答案】（1）$\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$；（2）$\frac{1}{2}$.

【详解】（1）设圆锥筒的半径为 r，容积为 V，

∵所裁剪的扇形铁皮的圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$，

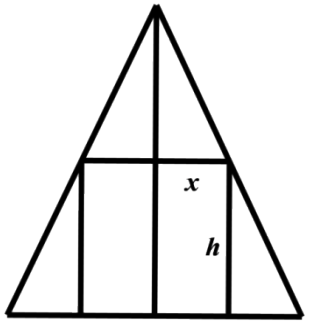
∴$2\pi r=3\times\frac{2\pi}{3}$，解得 $r=1$，

∴$h=\sqrt{9-r^2}=2\sqrt{2}$，

∴$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times\pi\times2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$.

∴圆锥筒的容积为 $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$.

（2）设内接圆柱高为 h 则有，由圆锥内接圆柱的轴截面图，



得 $\frac{x}{1}=\frac{2\sqrt{2}-h}{2\sqrt{2}}\Rightarrow h=2\sqrt{2}(1-x)$，

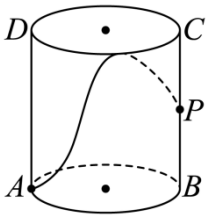
所以内接圆柱侧面积

$S=2\pi xh=4\sqrt{2}\pi\left(-x^2+x\right)=-4\sqrt{2}\pi(x-\frac{1}{2})^2+\sqrt{2}\pi,0<x<1$，

所以当$x=\frac{1}{2}$时内接圆柱侧面积最大.

题型 03 圆柱展开图及最短距离问题

【典例 1】（2024·全国·高三专题练习）如图，一个矩形边长为 1 和 4，绕它的长为 4 的边旋转二周后所得如图的一开口容器（下表面密封），P 是 BC 中点，现有一只妈蚁位于外壁 A 处，内壁 P 处有一米粒，若这只蚂蚁要先爬到上口边沿再爬到点 P 处取得米粒，则它所需经过的最短路程为（　）



A．$\sqrt{\pi^2+36}$　　B．$\sqrt{\pi^2+16}$　　C．$\sqrt{4\pi^2+36}$　　D．$\sqrt{4\pi^2+1}$

【答案】A

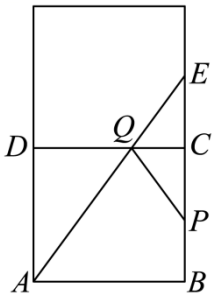
【详解】解：依题意可得圆柱的底面半径$r=1$，高$h=4$

将圆柱的侧面（一半）展开后得矩形 $ABCD$，其中 $AB=\pi$，$AD=4$，

问题转化为在 CD 上找一点 Q，使 $AQ+PQ$ 最短，

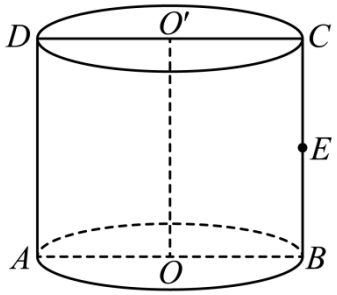
作 P 关于 CD 的对称点 E，连接 AE，令 AE 与 CD 交于点 Q，

则得 $AQ+PQ$ 的最小值就是为 $AE=\sqrt{\pi^2+(4+2)^2}=\sqrt{\pi^2+36}$.



故选：A

【典例 2】（2023 下·辽宁·高一校联考期末）如图，在圆柱 OO' 中，AB，CD 分别为圆 O，O' 的直径，$AB//CD$，$AB=BC=2$，E 为 BC 的中点，则一只蚂蚁在圆柱表面从 A 爬到 E 的最短路径的长度为（　）



A．$\sqrt{\pi^2+1}$　　B．$\sqrt{4\pi^2+1}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{5}$

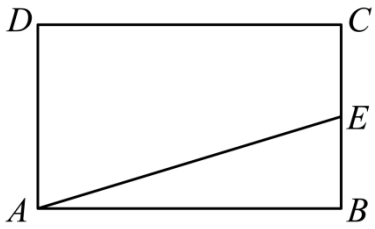
【答案】A

【详解】如图所示，把半圆柱侧面展开，得到侧面展开图为矩形 $ABCD$ ，

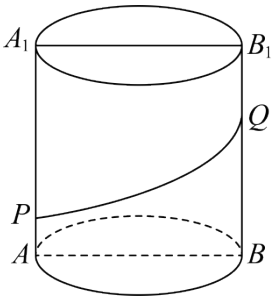
在圆柱 OO' 中，因为 $AB=BC=2$，可得 $\overset{\frown}{AB}=\pi$，

即矩形 $ABCD$ 中， $AB=\pi$， $BE=1$，则最短路径的长度为 $AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{\pi^2+1}$.

故选：A.

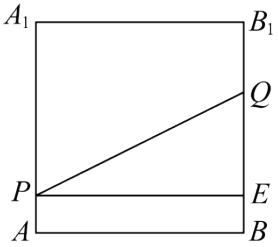


【典例 3】（2024·全国·高一假期作业）如图，已知圆柱的高为 h，底面半径为 R，轴截面为矩形 A_1ABB_1，在母线 AA_1 上有一点 P，且 $PA=a$，在母线 BB_1 上取一点 Q，使 $B_1Q=b$，则圆柱侧面上 P、Q 两点的最短距离为_____.



【答案】$\sqrt{(\pi R)^2+(h-a-b)^2}$

【详解】如图，把圆柱的半个侧面展开，是一个下长为 πR，宽为 h 的矩形，



$B_1Q=b$， $PA=a$，过 P 作 $PE\perp BB_1$， E 为垂足，所以 $QE=h-a-b$，

即可把 PQ 放在一个直角边为 πR 和 $h-a-b$ 的直角三角形 PQE 中，

根据勾股定理可得：$PQ=\sqrt{PE^2+QE^2}=\sqrt{(\pi R)^2+(h-a-b)^2}$．

故答案为：$\sqrt{(\pi R)^2+(h-a-b)^2}$．

【变式 1】（2024·广东·高三学业考试）如图在一根长 11 cm，外圆周长 6 cm 的圆柱形柱体外表面，用一根细铁丝缠绕，组成 10 个螺旋，如果铁丝的两端恰好落在圆柱的同一条母线上，则铁丝长度的最小值为（　）



A．61 cm　　B．$\sqrt{157}$cm　　C．$\sqrt{2021}$cm　　D．$\sqrt{1037}$cm

【答案】A

【详解】Q 圆柱形柱体的高为 11，外圆周长 6，

又Q 铁丝在柱体上缠绕 10 圈，且铁丝的两个端点落在圆柱的同一母线的两端，

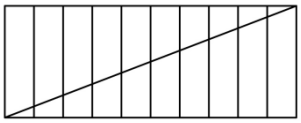
则我们可以得到将圆柱面展开后得到的平面图形如下图示：

其中每一个小矩形的宽为圆柱的周长 6，高为圆柱的高 11，

则大矩形的对称线即为铁丝的长度最小值．

此时铁丝的长度最小值为：$\sqrt{11^2+60^2}=61$．

故选：A．



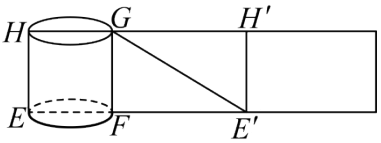
【变式 2】（2023·全国·高一专题练习）边长为 5 *cm* 的正方形 *EFGH* 是圆柱的轴截面，则从 *E* 点沿圆柱的侧面到相对顶点 *G* 的最短距离是（　）

A．10*cm*　　B．$5\sqrt{2}$ *cm*

C．$5\sqrt{\pi^2+1}$ *cm*　　D．$\frac{5}{2}\sqrt{\pi^2+4}$ *cm*

【答案】D

【详解】圆柱的侧面展开图如图所示，

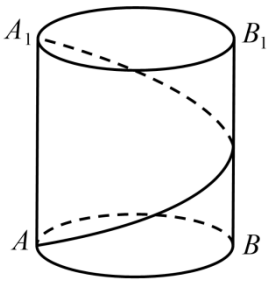


展开后 $E'F=\frac{1}{2}\times 2\pi\times\frac{5}{2}=\frac{5}{2}\pi(cm)$，

$\therefore E'G=\sqrt{5^2+(\frac{5\pi}{2})^2}=\frac{5}{2}\sqrt{\pi^2+4}(cm)$，即为所求最短距离．

故选:D．

【变式 3】（2023·全国·高一专题练习）如图所示，圆柱高为 2，底面半径为 1，则在圆柱侧面上从 A 出发经过母线 BB_1 到达 A_1 的最短距离为_____.

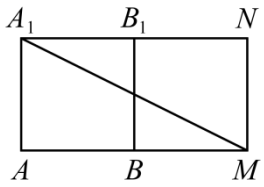


【答案】$2\sqrt{\pi^2+1}$

【详解】把圆柱侧面沿母线 AA_1 剪开摊平为一个矩形 AA_1NM，如图，

$AM=2\pi\times1=2\pi$，所求最短距离为 $A_1M=\sqrt{AM^2+AA_1^2}=\sqrt{(2\pi)^2+2^2}=2\sqrt{\pi^2+1}$.

故答案为：$2\sqrt{\pi^2+1}$.



题型 04 圆锥的结构特征

【典例 1】（2024 上·黑龙江牡丹江·高三牡丹江市第二高级中学校联考期末）已知圆锥的底面半径为 4，其侧面展开图为一个四分之一圆，则该圆锥的母线长为（　）

A．12　　B．14　　C．16　　D．18

【答案】C

【详解】设圆锥的母线长为 l，由于圆锥底面圆的周长等于扇形的弧长，

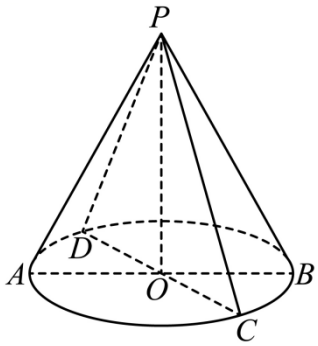
则 $2\pi r=\frac{\pi}{2}l$，解得 $l=16$.

故选：C.

【典例 2】（2023·全国·高一专题练习）圆锥的轴截面有多少个？母线有多少条？圆锥顶点和底面圆周上任意一点的连线都是母线吗？

【答案】答案见解析

【详解】如图，



因为所有过直线 PO 与圆锥所截的面，都是圆锥的轴截面，例如图中面 PAB 与面 PCD，

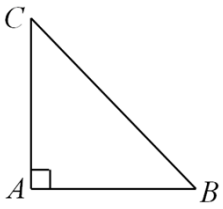
所以圆锥的轴截面有无穷多个，

因为圆锥顶点和底面圆周上任意一点的连线称为圆锥的母线，

所以圆锥的母线有无穷多条，例如图中 PA, PB, PC, PD 等，

故此，圆锥顶点和底面圆周上任意一点的连线都是母线.

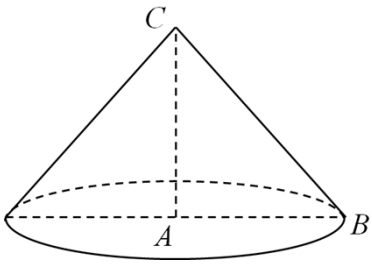
【变式 1】（2023 上·四川乐山·高二统考期末）如图，直角三角形 ABC 绕直角边 AC 旋转 $360°$，所得的旋转体为（　）



A．圆锥　　B．圆柱　　C．圆台　　D．球

【答案】A

【详解】由圆锥的定义可得直角三角形 ABC 绕直角边 AC 旋转 $360°$，所得的旋转体为圆锥



故选：A

【变式 2】（2023 上·上海·高二专题练习）已知圆锥的轴截面是正三角形，它的面积是 $\sqrt{3}$，则圆锥的高为_____；母线的长为_____.

【答案】　$\sqrt{3}$　　2

【详解】设正三角形的边长为 a，因为轴截面的面积为 $\sqrt{3}$，可得 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}$，解得 $a=2$，

由于圆锥的高即为圆锥的轴截面三角形的高，所以所求的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{3}$，

圆锥的母线即为圆锥的轴截面正三角形的边，所以母线长为 2.

故答案为：$\sqrt{3}$；2；

题型 05 圆锥截面有关计算

【典例 1】（2024·河南·模拟预测）已知圆锥侧面展开图是圆心角为直角，半径为 2 的扇形，则此圆锥内切球的半径为（　）

A．$\frac{\sqrt{13}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{13}}{9}$　　C．$\frac{\sqrt{15}}{9}$　　D．$\frac{\sqrt{15}}{10}$

【答案】D

【详解】侧面展开图扇形的弧长为$2\times\frac{\pi}{2}=\pi$，

圆锥底边的半径 r 满足$2\pi r=\pi$，解得$r=\frac{1}{2}$，

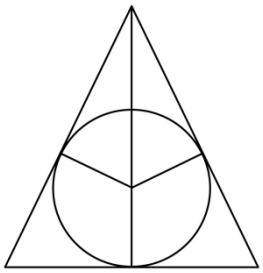
所以该圆锥轴截面是一个两腰长为 2，

底边长为 1 的等腰三角形，底边上的高为$\frac{\sqrt{15}}{2}$，

设内切球半径为 R，则$R\left(1+2+2\right)=1\times\frac{\sqrt{15}}{2}$，

$R=\frac{\sqrt{15}}{10}$.

故选：D.



【典例 2】（2023·山西阳泉·阳泉市第一中学校校考模拟预测）圆锥的母线长为 4，侧面积是底面积的$\frac{4}{3}$倍，过圆锥的两条母线作圆锥的截面，则该截面面积的最大值是（　）

A．8　　B．$4\sqrt{7}$　　C．$3\sqrt{7}$　　D．$3\sqrt{6}$

【答案】A

【详解】设圆锥底面半径为 r，母线为 l，轴截面顶角为$\theta(0<\theta<\pi)$，则$\pi rl=\frac{4}{3}\pi r^2$，得$l=\frac{4}{3}r$，

所以$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{r}{l}=\frac{3}{4}>\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$，

因为$\frac{\theta}{2}$为锐角，所以$\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$，即$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，则 θ 为钝角，

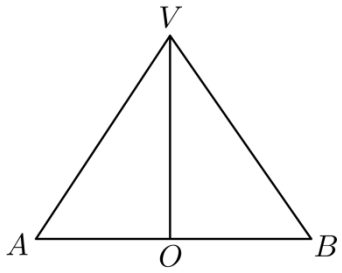
所以当圆锥两条母线互相垂直时，截面面积最大，最大值为$\frac{1}{2}l^2=\frac{1}{2}\times4^2=8$.

故选：A.

【典例 3】（2023 上·重庆·高二校联考开学考试）已知圆锥的底面面积为96π，高$h=5$，则该圆锥的母线长为_____

【答案】11

【详解】



如图，作出圆锥的轴截面，点O为底面圆心.

设圆锥的底面半径为r，母线为l

由已知可得，$\pi r^2=96\pi$，解得$r=4\sqrt{6}$，所以$OA=4\sqrt{6}$.

又$VO=h=5$，

所以，$VA^2=VO^2+OA^2=25+96=121$，

解得$VA=11$，即$l=11$.

故答案为：11.

【变式 1】（2024·全国·高三专题练习）已知圆锥的母线长为 2，其侧面展开图的中心角为$\sqrt{3}\pi$，则过圆锥顶点的截面面积最大值为（　）

A．1　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$2\sqrt{3}$

【答案】C

【详解】设底面圆的半径为r，$2\pi r=2\times\sqrt{3}\pi$，解得$r=\sqrt{3}$，由圆锥母线长为 2，可得圆锥轴截面的顶角为$\frac{2\pi}{3}$，

当截面顶角为$\frac{\pi}{2}$时，过圆锥顶点的截面面积最大，此时$S=\frac{1}{2}\times2\times2=2$.

故选：C.

【变式 2】（2024·广东惠州·统考一模）某圆锥的侧面展开图是面积为3π，圆心角为$\frac{2\pi}{3}$的扇形，则该圆锥的轴截面的面积是_____.

【答案】$2\sqrt{2}$

【详解】设圆锥的底面半径为r，母线长为l，

因为圆锥的侧面展开图是面积为3π，圆心角为$\frac{2\pi}{3}$的扇形，

所以$\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}l^2=3\pi$，解得$l=3$，

因为$2\pi r=\frac{2\pi}{3}l$，

所以$2\pi r=\frac{2\pi}{3}\times 3$，得$r=1$，

所以圆锥的高为$h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$，

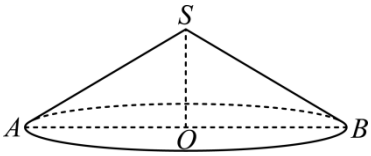
所以圆锥的轴截面的面积是$\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot h=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，

故答案为：$2\sqrt{2}$

【变式 3】（2023 上·全国·高三专题练习）在半径为30m 的圆形广场中央上空，设置一个照明光源，射向地面的光呈圆锥形，且其轴截面顶角为120°．若要光源恰好照亮整个广场，则其高度应为_____m（精确到0.1m）．

【答案】17.3

【详解】如下图所示：



在圆锥SO中，AB为圆O的一条直径，由题意可知$SA=SB$，$AO=30\text{m}$，$\angle ASB=120°$，

所以，$\angle SAO=30°$，由$\tan\angle SAO=\frac{SO}{AO}$，故$SO=AO\tan 30°=30\times\frac{\sqrt{3}}{3}=10\sqrt{3}\approx 17.3\text{m}$．

故答案为：17.3．

题型 06 圆锥展开图及最短距离问题

【典例 1】（2023 下·山东泰安·高一泰安一中校考期中）某景区为提升游客观赏体验，搭建一批圆锥形屋顶的小屋（如图 1）．现测量其中一个屋顶，得到圆锥SO的底面直径AB长为12m，母线SA长为18m（如图 2）．若C是母线SA的一个三等分点（靠近点S），从点A到点C绕屋顶侧面一周安装灯光带，则灯光带的最小长度为（　）



图1

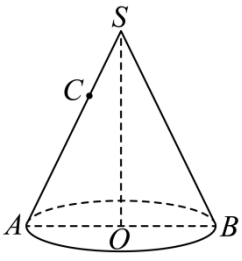


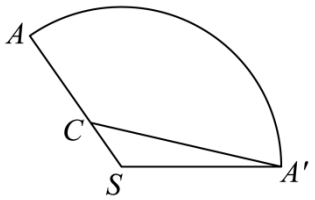
图2

A．$6\sqrt{7}\text{m}$　　B．16m　　C．$6\sqrt{13}\text{m}$　　D．12m

【答案】C

【详解】将圆锥侧面沿母线SA展开，其侧面展开图为如图所示的扇形SAA'，则$A'C$的长度即为灯光带的最

小长度，



Q $AA'=2\pi r=12\pi$，$\therefore\angle ASA'=\dfrac{12\pi}{18}=\dfrac{2\pi}{3}$，

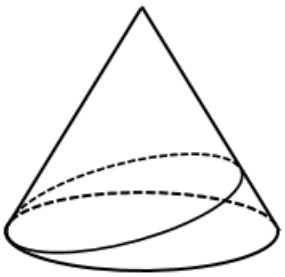
在$\triangle A'SC$中，$SC=\dfrac{1}{3}SA=6$，$SA'=18$，

$\therefore A'C^2=A'S^2+SC^2-2A'S\cdot SC\cos\angle ASA'=18^2+6^2-2\times18\times6\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=468$，

解得：$A'C=6\sqrt{13}$，即灯光带的最小长度为$6\sqrt{13}$m．

故选：C.

【典例 2】（2024·全国·高三专题练习）如图，在水平地面上的圆锥形物体的母线长为 12，底面圆的半径等于 4，一只小虫从圆锥的底面圆上的点 *P* 出发，绕圆锥侧面爬行一周后回到点 P 处，则小虫爬行的最短路程为（　）



A．$12\sqrt{3}$　　B．16　　C．24　　D．$24\sqrt{3}$

【答案】A

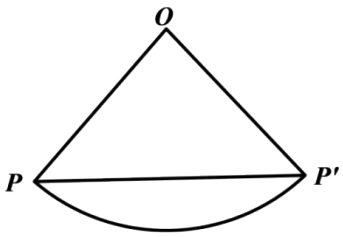
【详解】如图，设圆锥侧面展开扇形的圆心角为θ，

则由题可得$2\pi\times4=12\theta$，则$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$，

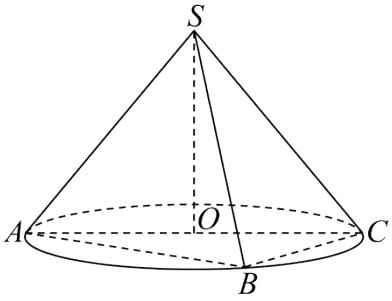
在$Rt\triangle POP'$中，$OP=OP'=12$，

则小虫爬行的最短路程为$PP'=\sqrt{12^2+12^2-2\times12\times12\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=12\sqrt{3}$．

故选：A.



【典例 3】（2023·上海宝山·统考一模）如图，在圆锥 $S-O$ 中，AC 为底面圆 O 的直径，$SO=OC=1$，点 B 在底面圆周上，且 $AB=BC$.若 E 为线段 AB 上的动点，则 $\triangle SEC$ 的周长最小值为_____



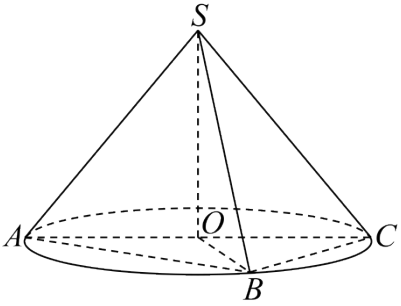
【答案】$\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$

【详解】连接 OB，依题意 $SO\perp$ 平面 ABC，而 $OA,OB,OC\subset$ 平面 ABC，

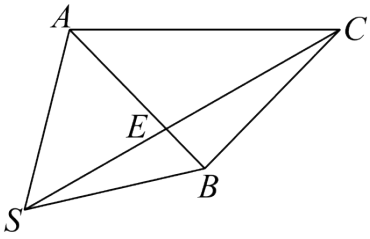
所以 $SO\perp OA,SO\perp OB,SO\perp OC$，$AB=BC$，$O$ 是 AC 的中点，则 $OB\perp AC$，

由于 $SO=OC=1$，所以 $SA=SC=SB=AB=\sqrt{2}$，

则三角形 SAB 是等边三角形，三角形 ABC 是等腰直角三角形，



将三角形 SAB 和三角形 ABC 展开在同一个平面，如下图所示，



连接 SC，交 AB 于 E，在三角形 SAC 中，

由余弦定理得 $SC=\sqrt{2+4-2\times\sqrt{2}\times2\times\cos\left(60°+45°\right)}$

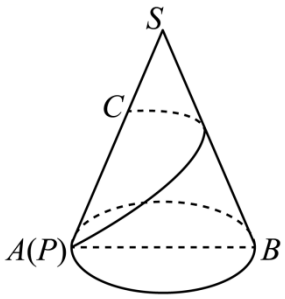
$=\sqrt{6-4\sqrt{2}\left(\cos60°\cos45°-\sin60°\sin45°\right)}$

$=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}=\sqrt{3}+1$，

所以$VSEC$的周长最小值为$\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$.

故答案为：$\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$

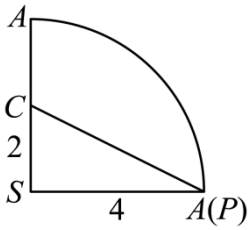
【变式 1】（2024·全国·高一假期作业）如图，圆锥的底面圆直径 AB 为 2，母线长 SA 为 4，若小虫 P 从点 A 开始绕着圆锥表面爬行一圈到 SA 的中点 C，则小虫爬行的最短距离为（　）



A．$2\sqrt{5}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$4\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{3}$

【答案】A

【详解】由题意，底面圆的直径 $AB=2$，故底面周长等于 2π.



设圆锥的侧面展开后的扇形圆心角为 $n°$，

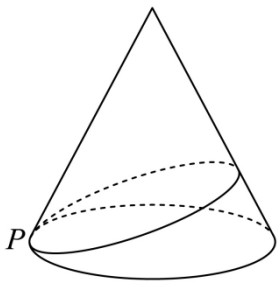
根据底面周长等于展开后扇形的弧长得 $2\pi=\frac{4n\pi}{180}$，解得 $n=90$，

所以展开图中$\angle PSC=90°$，故 $PC=2\sqrt{5}$，

所以小虫爬行的最短距离为 $2\sqrt{5}$.

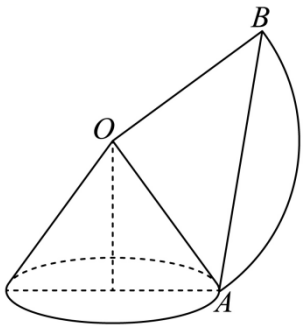
故选：A

【变式 2】（2023 上·广东佛山·高三佛山一中校考阶段练习）如图，一个立在水平地面上的圆锥形物体的母线长为 2，一只小虫从圆锥的底面圆上的点 P 出发，绕圆锥表面爬行一周后回到点 P 处，若该小虫爬行的最短路程为$2\sqrt{3}$，则圆锥底面圆的半径等于_____.



【答案】$\frac{2}{3}$

【详解】把圆锥侧面沿母线OA展开成如图所示的扇形，则AB为小虫爬行的最短路径.



依题意：小虫爬行的最短路程为$|AB|=2\sqrt{3}$.

因为母线长$OA=OB=2$，

所以在$\triangle AOB$中$\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$.

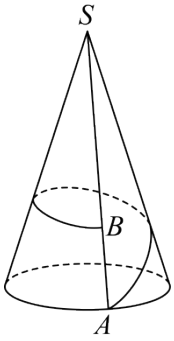
则由弧长公式得：$\overset{\frown}{AB}=\frac{2\pi}{3}\times 2=\frac{4\pi}{3}$.

设圆锥底面圆的半径为r.

则$2\pi r=\frac{4\pi}{3}$，解得$r=\frac{2}{3}$

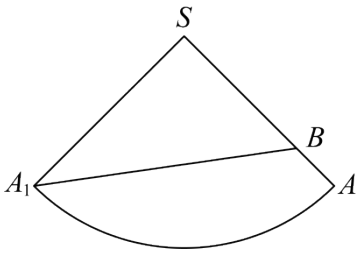
故答案为：$\frac{2}{3}$

【变式3】（2023上·上海浦东新·高二上海市进才中学校考期中）如图是一座山的示意图，山呈圆锥形，圆锥的底面半径为10公里，母线长为40公里，B母线SA一点，且$AB=10$公里，为了发展旅游业，要建设一条最短的从A绕山一周到B的观光铁路，则这段铁路的长度为_____公里.



【答案】50

【详解】



如图，将圆锥沿SA剪开，

则圆锥的母线即扇形的半径$SA=40$，

圆锥底面圆的周长即扇形的弧长为$2\pi\times10=20\pi$，

所以圆心角$\alpha=\dfrac{20\pi}{40}=\dfrac{\pi}{2}$，即$\angle A_1SB=90°$.

又$SA_1=SA=40$，$SB=SA-AB=30$，

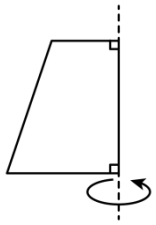
所以，$A_1B=\sqrt{(SA_1)^2+SB^2}=50$.

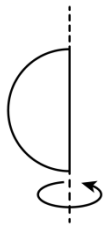
所以，这段铁路的长度为50公里.

故答案为：50.

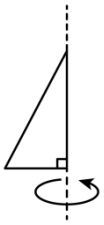
题型 07 圆台的结构特征

【典例 1】（2023 下·陕西榆林·高一校考期中）下列给出的图形中，绕给出的轴旋转一周，能形成圆台的是（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【详解】由图可知，A 选项中的直角梯形绕给出的轴旋转一周，能形成圆台，

B 选项中的半圆绕给出的轴旋转一周，能形成球体，

C 选项中的矩形绕给出的轴旋转一周，能形成圆柱，

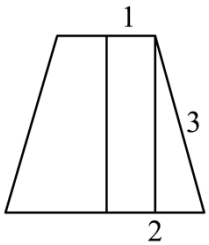
D 选项中的直角三角形绕给出的轴旋转一周，能形成圆锥.

故选：A

【典例 2】（2023·上海金山·统考一模）设圆台的上底面和下底面的半径分别为$r'=1$和$r=2$，母线长为$l=3$，则该该圆台的高为_____.

【答案】$2\sqrt{2}$

【详解】作出圆台的轴截面，如图示为等腰梯形，



梯形的高即为圆台的高，即高为$\sqrt{3^2-(2-1)^2}=2\sqrt{2}$，

故答案为：$2\sqrt{2}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/137126141065010000