2022-2023 学年度安徽省舒城中学高二第一学期第一次统考(数学)

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集为 *R*，集合 $A=\left\{x\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\leqslant 1\right.\right\}$，$B=\left\{x|x^{2}-6x+8\leqslant 0\right\}$，则 $A\bigcap \complement_{R}B=$(　　)

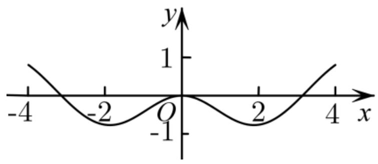
A. $\{x|x\leqslant 0\}$　　B. $\{x|2\leqslant x\leqslant 4\}$

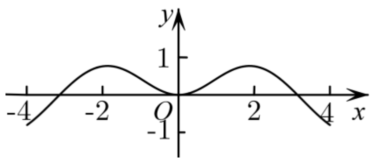
C. $\left\{x\left|0\leqslant x<2\text{或}x>4\right.\right\}$　　D. $\left\{x\left|0<x\leqslant 2\text{或}x\geqslant 4\right.\right\}$

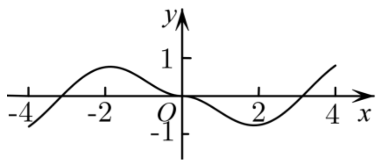
2. 设 *i* 为虚数单位，复数 *z* 满足 $z(1-i)=2i$，则 $|z|=$(　　)

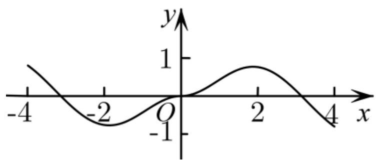
A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

3. 函数 $f(x)=(\frac{2}{1+e^{x}}-1)\sin\ x$ 图象的大致形状为.(　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

4. 正四面体 *ABCD* 中，*E*，*F* 分别是 *AB* 和 *CD* 的中点，则异面直线 *CE* 和 *AF* 所成角的余弦值为(　　)

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 甲、乙两个实习生每人加工一个零件，加工为一等品的概率分别为$\frac{2}{3}$和$\frac{3}{4}$，两个零件是否加工为一等品相互独立，则这两个零件中恰有一个一等品的概率为(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{5}{12}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$

6. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 *R*，满足 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x(x-1)$. 若对任意 $x\in(-\infty,m]$，都有 $f(x)\geqslant-\frac{8}{9}$，则 *m* 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,\frac{9}{4}]$　　B. $(-\infty,\frac{7}{3}]$　　C. $(-\infty,\frac{5}{2}]$　　D. $(-\infty,\frac{8}{3}]$

7. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 *A*，*B*，*C* 的对边分别为 *a*，*b*，*c*，*S* 为 $\triangle ABC$ 的面积，且 $2S=a^{2}-(b-c)^{2}$，则 $\frac{2b^{2}+c^{2}}{bc}$ 的取值范围为(　　)

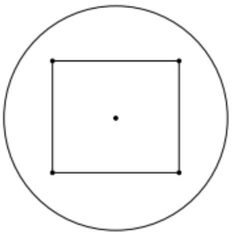
A. $(\frac{43}{15},\frac{59}{15})$　　B. $[2\sqrt{2},\frac{43}{15})$　　C. $[2\sqrt{2},\frac{59}{15})$　　D. $[2\sqrt{2},+\infty)$

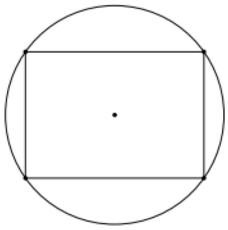
8. 已知 $9^m=10$，$a=10^m-11$，$b=8^m-9$，则(　)

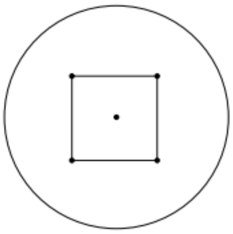
A. $a>0>b$　　B. $a>b>0$　　C. $b>a>0$　　D. $b>0>a$

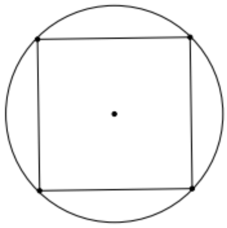
二、多选题：本题共 **4** 小题，共 **20** 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 **5** 分，部分选对的得 **2** 分，有选错的得 **0** 分。

9. 一个正方体内接于一个球，过球心作一个截面，则截面的图形可能是(　)

A. 

B. 

C. 

D. 

10. 计算下列各式的值，其结果为 1 的有(　)

A. $\cos 40^\circ\left(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ\right)$

B. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\cos 80^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ}\right)$

C. $\sin 140^\circ\left(\sqrt{3}-\tan 190^\circ\right)$

D. $4\sin 18^\circ\cdot\sin 54^\circ$

11. 四名同学各掷骰子 5 次，分别记录每次骰子出现的点数，根据四名同学的统计结果，可以判断可能出现点数为 6 的是(　)

A. 平均数为 3，中位数为 2

B. 中位数为 3，众数为 2

C. 平均数为 2，方差为 2.4

D. 中位数为 3，方差为 2.8

12. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,\varphi\in\mathbf{R})$ 在区间 $\left(\dfrac{7\pi}{12},\dfrac{5\pi}{6}\right)$ 上单调，且满足 $f\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=-f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 有下列结论正确的有(　)

A. $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=0$

B. 若 $f\left(\dfrac{5\pi}{6}-x\right)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π

C. 关于 x 的方程 $f(x)=1$ 在区间 $[0,2\pi)$ 上最多有 4 个不相等的实数解

D. 若函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{13\pi}{6}\right)$ 上恰有 5 个零点，则 ω 的取值范围为 $\left(\dfrac{8}{3},3\right]$

三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分。

13. 已知向量 $\overrightarrow{a}$， $\overrightarrow{b}$，其中 $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{3}$， $\left|\overrightarrow{b}\right|=2$，且 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{a}$，则向量 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 的夹角是__________

14. 函数 $f(x)=\cos(3x+\dfrac{\pi}{6})$ 在 $[0,\pi]$ 内的零点个数为__________.

15. 在 ΔABC 中，D 是 AB 的中点， $BC=3\sqrt{2}$， $AC=\sqrt{10}$， $\cos\angle ACB=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $CD=$__________

16. 已知在三棱锥 $P-ABC$ 中， $\angle BAC=90^{\circ}, AB=AC=4, \angle APC=30^{\circ}$，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（本小题 10 分）

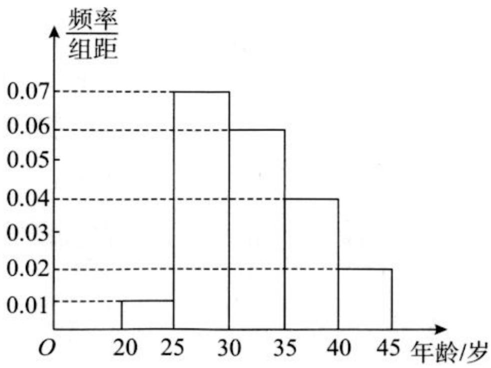
已知函数 $f(x)=\cos x\cdot\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos^2 x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$， $x\in R$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期；

(II) 求 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最小值和最大值.

18.（本小题 12 分）

某市为了了解人们对“中国梦”的伟大构想的认知程度，针对本市不同年龄和不同职业的人举办了一次“一带一路”知识竞赛，满分 100 分 (95 分及以上为认知程度高)，结果认知程度高的有 m 人，按年龄分成 5 组，其中第一组：$[20,25)$, 第二组：$[25,30)$, 第三组：$[30,35)$, 第四组：$[35,40)$, 第五组：$[40,45]$，得到如图所示的频率分布直方图，已知第一组有 10 人.



(1) 根据频率分布直方图，估计这 m 人的平均年龄和第 80 百分位数；

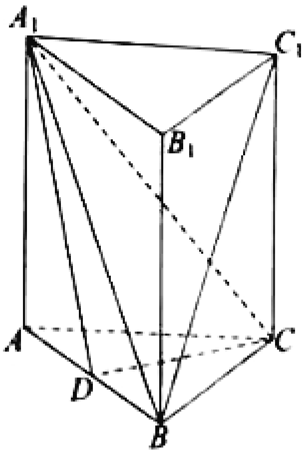
(2) 现从以上各组中用分层随机抽样的方法抽取 20 人，担任本市的“中国梦”宣传使者.

(i) 若有甲 (年龄 38)，乙 (年龄 40) 两人已确定入选宣传使者，现计划从第四组和第五组被抽到的使者中，再随机抽取 2 名作为组长，求甲、乙两人至少有一人被选上的概率；

(ii) 若第四组宣传使者的年龄的平均数与方差分别为 37 和 $\dfrac{5}{2}$，第五组宣传使者的年龄的平均数与方差分别为 43 和 1，据此估计这 m 人中 $35\sim45$ 岁所有人的年龄的方差.

19.（本小题 12 分）

如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为 AB 的中点，若 $AB=2$， $AA_1=3$.



(1) 证明：$BC_1//$ 平面 A_1CD；

(2) 求二面角 A_1-BC_1-C 的余弦值.

20.（本小题 12 分）

已知 $\triangle ABC$ 中，A、B、C 的对边分别为 a、b、c，$\tan A=\dfrac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$.

(1) 求角 A；

(2) 若 $a=\sqrt{3}$，求 $b+2c$ 的取值范围.

21.（本小题 12 分）

已知函数 $g(x)=ax^2-2ax+1+b(a>0)$ 在区间 $[2,3]$ 上有最大值 4 和最小值 1，设 $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$.

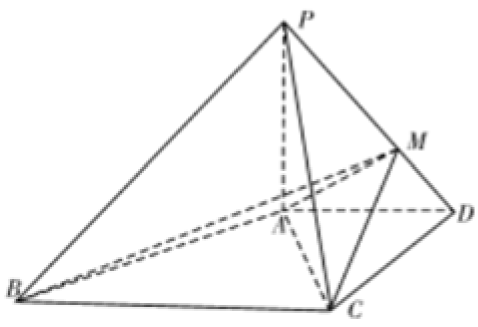
(1) 求 a，b 的值

(2) 若不等式 $f(\log_2 x)-2k\cdot\log_2 x\geqslant 0$ 在 $x\in[2,4]$ 上有解，求实数 k 的取值范围；

(3) 若 $f(|2^x-1|)+k\cdot\dfrac{2}{|2^x-1|}-3k=0$ 有三个不同的实数解，求实数 k 的取值范围.

22.（本小题 12 分）

如图，在四棱锥中 $P-ABCD$， $PA\perp$ 平面 ABCD，$AD//BC$， $AD\perp CD$，且 $AD=CD=\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{2}$， $PA=2$.



(1) 求证：$AB \perp PC$；

(2) 在线段 PD 上，是否存在一点 M，使得二面角 $M-AC-D$ 的大小为 45°，如果存在，求 BM 与平面 MAC 所成角，如果不存在，请说明理由.

答案和解析

1.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查集合的交集、补集运算，涉及一元二次不等式的求解以及指数不等式的求解.属于基础题.

根据指数不等式求解出 $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant 1$ 的解集为集合 A，再求解出一元二次不等式的解集为集合 B，结合补集、交集的概念求解出 $A \cap \complement_{\mathrm{R}} B$.

【解答】

解：因为 $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant 1$，所以 $x \geqslant 0$，

所以 $A=\{x|x \geqslant 0\}$，

又因为 $x^2-6x+8 \leqslant 0$，所以 $2 \leqslant x \leqslant 4$，

所以 $B=\{x|2 \leqslant x \leqslant 4\}$，

所以 $\complement_{\mathrm{R}} B=\{x|x<2$ 或 $x>4\}$，

所以 $A \cap \complement_{\mathrm{R}} B=\{x|0 \leqslant x<2$ 或 $x>4\}$，

故选：C.

2.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数模的求法，是基础题.

把已知等式变形，利用复数代数形式的乘除运算，再由复数模的计算公式求解.

【解答】

解：由 $z(1-i)=2i$，

得 $z=\frac{2i}{1-i}=\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-1+i$，

$\therefore |z|=\sqrt{2}$.

故选：B.

3.【答案】A

【解析】【分析】

本题考查函数图象的判断，考查函数的奇偶性，属于中档题.

判断函数的奇偶性排除选项，再利用特殊值判断即可.

【解答】

解：$\because f(x)=\left(\dfrac{2}{1+e^x}-1\right)\cdot\sin\ x$，

$\therefore f(-x)=\left(\dfrac{2}{1+e^{-x}}-1\right)\cdot\sin\ (-x)=-\left(\dfrac{2e^x}{1+e^x}-1\right)\cdot\sin\ x=\left(\dfrac{2}{1+e^x}-1\right)\cdot\sin\ x$

$=f(x)$，且 $f(x)$ 的定义域为 *R*，$\therefore$函数 $f(x)$ 为偶函数，故排除 *C*，*D*；

当 $x\in(0,\pi)$ 时，$\sin x>0$，$1+e^x>2\Rightarrow\dfrac{2}{1+e^x}-1<0$，则 $f(x)<0$，故排除 B.

故选：A.

4.【答案】*C*

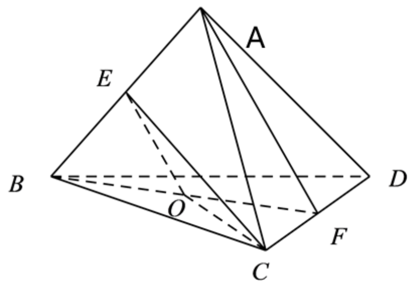
【解析】【分析】

本题考查异面直线所成的角，属于基础题.

连接 *BF*，取 *BF* 的中点 *O*，连接 *EO*，则可得 $EO//AF$，所以可得 $\angle OEC$ 异面直线 *CE* 和 *AF* 所成角，然后利用余弦定理求解即可.

【解答】

解：连接 *BF*，取 *BF* 的中点 *O*，连接 *EO*，*OC*，



因为 *E* 为 *AB* 的中点，*O* 是 *BF* 的中点，

所以 $EO//AF$，

所以 $\angle OEC$ 或其补角为异面直线 *CE* 和 *AF* 所成角，

设正四面体的棱长为 2，则 $AB=BC=AC=CD=AD=BD=2$，

则 $AF=CE=BF=\sqrt{3}$，

所以 $OE=OB=OF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$OC=\sqrt{CF^2+OF^2}=\sqrt{1+\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

所以在 $\triangle OCE$ 中，由余弦定理得

$$\cos\angle OEC=\frac{OE^2+CE^2-OC^2}{2OE\cdot CE}=\frac{\dfrac{3}{4}+3-\dfrac{7}{4}}{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}}=\frac{2}{3},$$

所以异面直线 CE 和 AF 所成角的余弦值为 $\frac{2}{3}$，

故选： C

5.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查了相互独立事件同时发生的概率，属于中档题.

根据题意，两个零件中恰有一个一等品，即甲加工的零件为一等品而乙不是，或乙加工的零件为一等品而甲不是，结合对立事件和互相独立事件的概率公式计算即可得解.

【解答】

解：设事件 A：甲实习生加工的零件为一等品，

事件 B：乙实习生加工的零件为一等品，

则 $P(A)=\frac{2}{3}$， $P(B)=\frac{3}{4}$，

所以这两个零件中恰有一个一等品的概率为

$P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)$

$=\frac{2}{3}\times(1-\frac{3}{4})+(1-\frac{2}{3})\times\frac{3}{4}=\frac{5}{12}$.

故选 B.

6.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查了函数与方程的综合运用，考查不等式恒成立问题和函数图象的应用，属中档题.

由 $f(x+1)=2f(x)$ 可得 $f(x)=2f(x-1)$，分段求解析式，结合图象可得.

【解答】

解：因为 $f(x+1)=2f(x)$，$\therefore f(x)=2f(x-1)$，

$\because x\in(0,1]$ 时， $f(x)=x(x-1)\in[-\frac{1}{4},0]$，

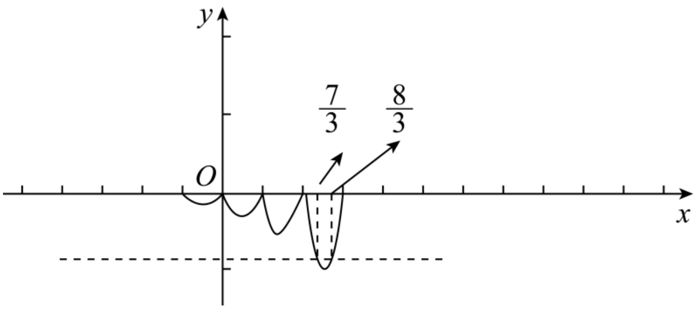
$\therefore x\in(1,2]$ 时， $x-1\in(0,1]$,

$f(x)=2f(x-1)=2(x-1)(x-2)\in[-\frac{1}{2},0]$，

$\therefore x\in(2,3]$ 时， $x-1\in(1,2]$,

$f(x)=2f(x-1)=4f(x-2)=4(x-2)(x-3)\in[-1,0]$，

作出函数图象，如下图，



当 $x\in(2,3]$ 时，由 $4(x-2)(x-3)=-\frac{8}{9}$ 解得 $x=\frac{7}{3}$ 或 $x=\frac{8}{3}$，

若对任意 $x\in(-\infty,m]$, 都有 $f(x)\geqslant-\frac{8}{9}$，则 $m\leqslant\frac{7}{3}$.

故选 B.

7.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查了三角形面积公式，余弦定理解三角形，利用正弦定理解决范围与最值问题，以及基本不等式求最值或范围和“对勾”函数的性质，涉及到两角和与差的正弦公式，正切函数的单调性，属于难题.

根据余弦定理和 $\triangle ABC$ 的面积公式，结合题意求出 $\sin A$ 、 $\cos A$ 的值，再用 C 表示 B，求出 $\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$ 的取值范围，利用对勾函数的性质即可求出 $\frac{2b^2+c^2}{bc}$ 的取值范围.

【解答】

解：在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

且 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$，

由 $2S=a^2-(b-c)^2$，得 $bc\sin A=2bc-2bc\cos A$，

化简得 $\sin A+2\cos A=2$，

又 $A\in(0,\frac{\pi}{2})$， $\sin^2A+\cos^2A=1$，

所以 $\sin A+2\sqrt{1-\sin^2A}=2$，

化简得 $5\sin^2A-4\sin A=0$，

解得 $\sin A=\frac{4}{5}$，或 $\sin A=0$(不合题意，舍去)，可得 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{3}{5}$，

所以 $\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin(A+C)}{\sin C}=\frac{\sin A\cos C+\cos A\sin C}{\sin C}=\frac{4}{5\tan C}+\frac{3}{5}$，

由 $B+C=\pi-A$，且 $B\in(0,\frac{\pi}{2})$， $\pi-A\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，则 $C\in(\frac{\pi}{2}-A,\frac{\pi}{2})$，

所以$\tan C>\tan(\frac{\pi}{2}-A)=\frac{1}{\tan A}=\frac{3}{4}$，所以$\frac{1}{\tan C}\in(0,\frac{4}{3})$，

所以$\frac{b}{c}\in(\frac{3}{5},\frac{5}{3})$，

设$t=\frac{b}{c}$，其中$t\in(\frac{3}{5},\frac{5}{3})$，

所以$y=\frac{2b^2+c^2}{bc}=\frac{2t^2+1}{t}=2t+\frac{1}{t}\geqslant 2\sqrt{2}$，

当且仅当$2t=\frac{1}{t}$时，即$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，取最小值$2\sqrt{2}$，

由于$\frac{3}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{5}{3}$，且函数$f(t)=2t+\frac{1}{t}$在$(\frac{3}{5},\frac{\sqrt{2}}{2}]$上单调递减，在$[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5}{3})$上单调递增，

又$f(\frac{3}{5})=2\times\frac{3}{5}+\frac{5}{3}=\frac{43}{15}$，$f(\frac{5}{3})=2\times\frac{5}{3}+\frac{3}{5}=\frac{59}{15}$，

所以$y=\frac{2b^2+c^2}{bc}=\frac{2t^2+1}{t}=2t+\frac{1}{t}\in[2\sqrt{2},\frac{59}{15})$.

故选C.

8.【答案】*A*

【解析】【分析】

本题考查指数对数变换比较大小，属于中档题.利用指数函数，对数函数的性质比较大小.

【解答】

解：由$9^m=10$，$\therefore m=\log_9 10$，$\because 1=\log_9 9<\log_9 10<\log_9\sqrt{729}=\frac{3}{2}$

所以$m=\log_9 10\in(1,1.5)$.

根据 *a*，*b* 的形式构造函数$f(x)=x^m-x-1(x>1)$，则$f'(x)=mx^{m-1}-1$，

令$f'(x)=0$，解得$x_0=m^{\frac{1}{1-m}}$，由$m=\log_9 10\in(1,1.5)$知$x_0\in(0,1)$.

$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$f(10)>f(8)$，即$a>b$，

又因为$f(9)=9^{\log_9 10}-10=0$，所以$a>0>b$.

9.【答案】*ABC*

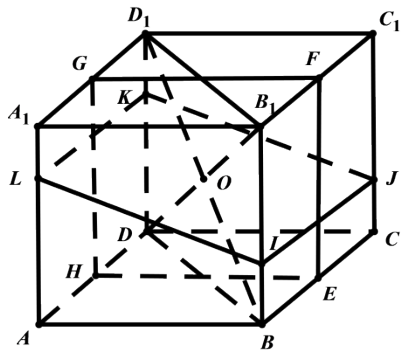
【解析】【分析】

本题考查球内接多面体、棱柱的结构特征，注意截面的形状既与被截的几何体有关，还与截面的角度和方向有关，属于中档题.

当截面的角度和方向不同时，球的截面不相同，应分情况考虑即可.

【解答】

解：画出正方体如下图所示，设正方体外接球的球心为O.



E,F,G,H是棱BC,B_1C_1,A_1D_1,AD的中点，过E,F,G,H的截面图象为C选项对应的图象.

过BDD_1B_1的截面图象为B选项对应的图象.

设I,J,K,L是棱BB_1,CC_1,DD_1,AA_1靠近B,C,D_1,A_1的三等分点，过I,J,K,L的截面图象为A选项对应的图象.

过球心不论如何作截面，都不能得到截面D.

故选ABC.

10.【答案】ACD

【解析】【分析】

本题考查辅助角公式，诱导公式，二倍角公式的应用，属于中档题.

A中，将正切转化为正余弦的比，再由辅助角公式及二倍角公式的逆用，再由诱导公式可得A正确；B中，由辅助角公式和二倍角公式及诱导公式可得，B不正确；由诱导公式及两角和的余弦公式，诱导公式可得C正确；D中，由诱导公式及二倍角公式可得D正确.

【解答】

解：A中，$\cos 40^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)$

$=\cos 40^\circ\cdot(1+\dfrac{\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ})$

$=\cos 40^\circ\cdot\dfrac{\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}$

$=\cos 40^\circ\cdot\dfrac{2\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ}=\dfrac{\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ}=\dfrac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}=1$，所以$A$正确；

B中，$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin 80^\circ-\sqrt{3}\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ\cos 80^\circ}=\dfrac{2\sin(80^\circ-60^\circ)}{\sin 160^\circ}=\dfrac{2\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=2$，所以$B$不正确；

C中，$\sin 140^\circ(\sqrt{3}-\tan 190^\circ)=\sin 40^\circ(\sqrt{3}-\tan 10^\circ)$