专题15 三角函数（含新定义解答题）

目录

一、选填（新定义题）

1．（23-24高一下·安徽黄山·期末）定义域在$[a,b]$的函数$y=f(x)$图象的两个端点为A、B，向量$\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$，设$M(x,y)$是$f(x)$图象上任意一点，其中$x=\lambda a+(1-\lambda)b$，$\lambda\in[0,1]$，若不等式$|MN|\le k$恒成立，则称函数$f(x)$是定义在$[a,b]$上的"$k$级线性近似函数"，其中最小的正实数$k$称为该函数的线性近似系数，现给出下列两个定义在$[1,2]$上的函数：（1）$y=\sin\frac{\pi}{3}x$；（2）$y=x-\frac{1}{x}$则这两个函数的线性近似系数的和为（　）

A．$\frac{8-4\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$　B．$\frac{8-4\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}$　C．$\frac{5-2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$　D．$\frac{5-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

2．（23-24高一下·四川达州·期末）已知$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{k-1}\times\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\cdots\ (x\in\mathbf{R},k\in\mathbf{N}^*)$，其中$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$．若函数$f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，$\frac{1}{5!}\approx0.008333$，$\frac{1}{7!}\approx0.000198$，结果精确到小数点后4位，则$f\left(\frac{\pi}{3}-1\right)=$（　）．

A．0.5394　B．0.8419　C．0.8415　D．0.5398

3．（多选）（23-24高一上·重庆·阶段练习）若存在两个不相等的实数x_1、x_2，使x_1、x_2、$\frac{x_1+x_2}{2}$均在函数$f(x)$的定义域内，且满足$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称函数$f(x)$具有性质$w$，下列函数具有性质$w$的有（　）

A．$f(x)=2^x$　B．$f(x)=|x^2-2x|$

C．$f(x)=\lg|x|$　D．$f(x)=x-\sin x$

4．（23-24 高一下·江西·阶段练习）已知函数$y=f\left(x\right)$的定义域为C，值域为D，若存在整数$m\in C$，$n\in D$，且$n=f\left(m\right)$，则mn为函数$y=f\left(x\right)$的“子母数”.已知集合$A=\left\{x\left|\sin\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{3}\tan\frac{x}{24}+\frac{\pi}{3}\right)\geq\frac{\sqrt{3}}{2},x\in\left[-8\pi,8\pi\right]\right.\right\}$，函数$g\left(x\right)=\left[\cos x\right]$，$x\in A$（$\left[x\right]$表示不超过$x$的最大整数,例如$\left[1.2\right]=1$），当$xg\left(x\right)<0$时，函数$y=g\left(x\right)$的所有“子母数”之和为______.

5．（23-24 高一下·江西·阶段练习）定义：对于非常数函数$f\left(x\right)$，若$\exists m\in\mathbf{R}$，$\forall x\in\mathbf{R}$，$mf\left(x\right)=4f\left(x+m\right)$，则称$f\left(x\right)$是“米函数”．已知函数$g\left(x\right)=4\cos\left(\omega x-\varphi\right)\left(\omega>0\right)$是“米函数”，则$\omega$的最小值为_____.

6．（23-24 高二上·北京·期末）在平面直角坐标系中，定义$d\left(A,B\right)=\left|x_1-x_2\right|+\left|y_1-y_2\right|$为点$A\left(x_1,y_1\right)$到点$B\left(x_2,y_2\right)$的“折线距离”．点$O$是坐标原点，点$P$在圆$x^2+y^2=1$上，点$Q$在直线$2x+y-2\sqrt{5}=0$上．在这个定义下，给出下列结论：

①若点P的横坐标为$-\frac{3}{5}$，则$d\left(O,P\right)=\frac{7}{5}$；　②$d\left(O,P\right)$的最大值是$\sqrt{2}$；

③$d\left(O,Q\right)$的最小值是 2；　④$d\left(P,Q\right)$的最小值是$\frac{\sqrt{5}}{2}$.

其中，所有正确结论的序号是_____.

二、解答题（新定义题）

1．（23-24 高一上·湖南长沙·期末）若函数$y=f\left(x\right)$满足$f\left(x\right)=f\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$且$f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\left(x\in\mathrm{R}\right)$，则称函数$y=f\left(x\right)$为“$M$函数”.

(1)试判断$y=\sin\frac{4}{3}x$是否为“M函数”，并说明理由；

(2)函数$g\left(x\right)$为“M函数”，其在$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$的图象落在直线$6x+8y+3\pi=0$上，在函数$g\left(x\right)$图象上任取一点 P，对于定点$A\left(2024\pi,0\right)$，求线段AP的最小值;

(3)函数$f\left(x\right)$为“M函数”，且当$x\in\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$时，$y=\sin x$，求$f\left(x\right)$的解析式；若当$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$，关于$x$的方程$f\left(x\right)=a$（$a$为常数）有解，记该方程所有解的和为$S$，求$S$.

2．（23-24 高一下·江西南昌·期末）对于平面向量$\vec{x_i}\left(i=1,2,\cdots,m,m\ge 3且m\in\mathbf{N}\right)$，记$\Omega_m=\left\{\vec{x_1},\vec{x_2},\cdots,\vec{x_m}\right\},\vec{S_m}=\vec{x_1}+\vec{x_2}+\cdots+\vec{x_m}$，若存在$\vec{x_p}\left(p\in\{1,2,\cdots,m\}\right)$，使得$\left|\vec{x_p}\right|\ge\left|\vec{S_m}+k\vec{x_p}\right|,k\in\mathbf{Z}$，则称$\vec{x_p}$是$\Omega_m$的“$k$向量”.

(1)设$\vec{x_n}=\left(n,l-n\right),n\in\mathbf{N}^*$，若$\vec{x_3}$是$\Omega_3$的“$-3$向量”，求实数$l$的取值范围；

(2)若$\vec{x_n}=\left(\cos\dfrac{2n\pi}{3},\sin\dfrac{2n\pi}{3}\right),n\in\mathbf{N}^*$，则$\Omega_{3i+1}\left(i\in\mathbf{N}^*\right)$是否存在“1 向量”?若存在，求出“1 向量”；若不存在，请说明理由；

(3)已知$\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3}$均为$\Omega_3$的“$-1$向量”，其中$\vec{x_1}=\left(\cos x,-5\sin x\right),\vec{x_2}=\left(2\cos x,\sin x\right)$．设平面直角坐标系$xOy$中的点列$P_1,P_2,\cdots,P_t\left(t\in\mathbf{N}^*,t\ge 3\right)$满足$\overrightarrow{P_1P_2}=\vec{x_3}$（$P_1$与原点$O$重合），且$P_{2k}$与$P_{2k+1}\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$关于点$P_1$对称，$P_{2k+1}$与$P_{2k+2}$关于点$P_2$对称．求$\left|\overrightarrow{P_{99}P_{100}}\right|$的取值范围．

3．（23-24 高一下·贵州遵义·期末）若函数$f\left(x\right)$在定义域区间$\left[a,b\right]$上连续，对任意x_1，$x_2\in\left[a,b\right]$恒有$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\ge\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$，则称函数$f\left(x\right)$是区间$\left[a,b\right]$上的上凸函数，若恒有$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\le\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$，则称函数$f\left(x\right)$是区间$\left[a,b\right]$上的下凸函数，当且仅当$x_1=x_2$时等号成立，这个性质称为函数的凹凸性．上述不等式可以推广到取函数定义域中的任意n个点，即若$f\left(x\right)$是上凸函数，则对任意x_1，x_2，…，$x_n\in\left[a,b\right]$恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\ge\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+\cdots+f\left(x_n\right)}{n}$$，若$f\left(x\right)$是下凸函数，则对任意x_1，x_2，…，$x_n\in\left[a,b\right]$恒有$f\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\le\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+\cdots+f\left(x_n\right)}{n}$，当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时等号成立．应用以上知识解决下列问题：

(1)判断函数$f\left(x\right)=x^2+1\left(x\in\mathrm{R}\right)$在定义域上是上凸函数还是下凸函数（说明理由）；

(2)证明$h\left(x\right)=\sin x$，$x\in\left(0,\pi\right)$上是上凸函数；

(3)若A、B、C、$D\in\left(0,\pi\right)$，且$A+B+C+D=\pi$，求$\sin A+\sin B+\sin C+\sin D$的最大值．

6．（23-24高一下·辽宁辽阳·期中）行列式是线性代数的一个重要研究对象，本质上，行列式描述的是 n 维空间中，一个线性变换所形成的平行多面体的体积，它被广泛应用于解线性方程组，矩阵运算，计算微积分等．在数学中，我们把形如$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}4&4\\2&7\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-2&3&1\\3&5&-3\end{bmatrix}$这样的矩形数字（或字母）阵列称作矩阵．我们将二阶矩阵$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$两边的“[ ]”改为“| |”，得到二阶行列式$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$，它的运算结果是一个数值（或多项式），记为$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$．

(1)求二阶行列式$\begin{vmatrix}3&5\\-2&-1\end{vmatrix}$的值；

(2)求不等式$\begin{vmatrix}1&-\sqrt{3}\\\cos x&\sin x\end{vmatrix}>1$的解集；

(3)若存在$x\in[0,\pi]$，使得$\begin{vmatrix}\sin x&-m\\\cos x&m\end{vmatrix}>\sin 2x+2$，求 m 的取值范围．

7．（23-24高一下·江苏盐城·期末）若对于实数m，n，关于x的方程$f(x+m)+f(x-m)=nf(x)$在函数$y=f(x)$的定义域D上有实数解$x=x_0$，则称x_0为函数$f(x)$的(m,n)可消点”.又若存在实数m，n，对任意实数$x\in D$，x都为函数$f(x)$的(m,n)可消点”，则称函数$f(x)$为“可消函数”，此时，有序数对(m,n)称为函数$f(x)$的“可消数对”.

(1)若$f(x)=x+2^x$是“可消函数”，求函数$f(x)$的“可消数对”；

(2)若$(m,1)$为函数$f(x)=\sin x\cos x$的“可消数对”，求m的值；

(3)若函数$f(x)=\sin^2 x$的定义域为R，存在实数$x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$，使得$x_0$同时为该函数的“$\left(\frac{\pi}{2},n_1\right)$可消点”与“$\left(\frac{\pi}{4},n_2\right)$可消点”，求$n_1^2+n_2^2$的取值范围.

8．（23-24高一下·江西·阶段练习）已知向量$\vec{a}=\left(x_1,y_1\right)$，$\vec{b}=\left(x_2,y_2\right)$，定义运算$\vec{a}\otimes\vec{b}=\left(x_1x_2,y_1y_2\right)$，同时定义$[(x,y)]=|2x-y|$.

(1)若$(\sin x,\cos x)\otimes(3,4)=\left(\dfrac{3}{2},-2\sqrt{3}\right)$，求实数$x$的取值集合；

(2)已知$\tan x=\dfrac{4}{3}$，求$[(\sin x,\cos x)\otimes(\sqrt{2},\sqrt{2})]$；

(3)已知定义域为$\mathbf{R}$的函数$h(x)$满足$h\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$为奇函数，$h(x+5)$为偶函数，且$x\in\left[0,\dfrac{5}{2}\right]$时，$h(x)=x-\dfrac{5}{2}$，是否存在实数$x$，使$[(2\sin\pi x+1,7\cos 2\pi x+1)\otimes(h(x),h(x))]=30$？若存在，求出$x$的值；若不存在，请说明理由.

9．（23-24高一下·辽宁大连·阶段练习）若函数$f\left(x\right)$满足$f\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)=-f\left(x\right)$且$f\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=f\left(-x\right)\left(x\in\mathbf{R}\right)$，则称函数$f\left(x\right)$为“$M$函数”.

(1)试判断$f\left(x\right)=\sin\dfrac{4x}{3}$是否为“$M$函数”，并说明理由；

(2)函数$f\left(x\right)$为“M函数”，且当$x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\pi\right]$时，$f\left(x\right)=\sin x$，求$y=f\left(x\right)$的解析式，并写出在$\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$上的单调递增区间；

(3)在（2）的条件下，当$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3k\pi}{2}+\pi\right]\left(k\in\mathbf{N}\right)$时，关于$x$的方程$f\left(x\right)=a$（$a$为常数）有解，记该方程所有解的和为$S\left(k\right)$，求$S\left(3\right)$.

10．（23-24 高一下·广东广州·阶段练习）已知函数$f(x)$的定义域为D，若存在实数a，使得对于任意$x_1 \in D$都存在$x_2 \in D$满足$\dfrac{x_1+f\left(x_2\right)}{2}=a$，则称函数$f(x)$为“自均值函数”，其中$a$称为$f(x)$的“自均值数”.

(1)判断定义域为$\left[0,+\infty\right)$的三个函数$y=x$，$y=-x$，$y=1-x$是否为“自均值函数”，给出判断即可，不需说明理由；

(2)判断函数$f(x)=2^x$是否为“自均值函数”，并说明理由；

(3)若函数$g(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega>0), x \in[0,1]$为”自均值函数”，求$\omega$的取值范围.

专题15 三角函数（含新定义解答题）

目录

一、选填（新定义题）

1．（23-24高一下·安徽黄山·期末）定义域在$[a,b]$的函数$y=f(x)$图象的两个端点为A、B，向量$\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$，设$M(x,y)$是$f(x)$图象上任意一点，其中$x=\lambda a+(1-\lambda)b$，$\lambda\in[0,1]$，若不等式$|MN|\le k$恒成立，则称函数$f(x)$是定义在$[a,b]$上的"$k$级线性近似函数"，其中最小的正实数$k$称为该函数的线性近似系数，现给出下列两个定义在$[1,2]$上的函数：（1）$y=\sin\frac{\pi}{3}x$；（2）$y=x-\frac{1}{x}$则这两个函数的线性近似系数的和为（　）

A．$\frac{8-4\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$　B．$\frac{8-4\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}$　C．$\frac{5-2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$　D．$\frac{5-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【优尖升-分析】由题意可得点M,N的横坐标相等，点N在线段AB上，然后可得$|MN|=|y_M-y_N|$，然后对每个函数逐一求解即可.

【详解】因为$\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}, x=\lambda a+(1-\lambda)b$，$\lambda\in[0,1]$，

所以点M,N的横坐标相等，点N在线段AB上，所以$|MN|=|y_M-y_N|$，

对于$y=x-\frac{1}{x},x\in[1,2]$，由函数$y=x-\frac{1}{x}$，得$A(1,0)$，$B(2,\frac{3}{2})$，

$\therefore$直线AB方程为$y=\frac{3}{2}(x-1)$，

而$y=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$在$[1,2]$上的值域是$\left[\sqrt{2},\frac{3}{2}\right]$，

$\therefore|MN|=\left|x-\frac{1}{x}-\frac{3}{2}(x-1)\right|=\left|\frac{3}{2}-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)\right|\le\frac{3}{2}-\sqrt{2}$，线性近似系数为$\frac{3}{2}-\sqrt{2}$.

对于 $y=\sin\frac{\pi}{3}x, x\in[1,2]$，由函数 $y=\sin\frac{\pi}{3}x$ 可得 $A(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$B(2,\frac{\sqrt{3}}{2})$，AB 方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由三角函数图象与性质可知 $|MN|\le 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，线性近似系数为 $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故所求为 $\frac{3}{2}-\sqrt{2}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5-2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$.

故选：C.

【点睛】关键点点睛：解决问题的关键在于充分理解新定义，并得到 $|MN|=|y_M-y_N|$，由此即可顺利得解.

2．（23-24 高一下·四川达州·期末）已知

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{k-1}\times\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\cdots\ (x\in\mathbf{R}, k\in\mathbf{N}^*)$，其中

$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$．若函数 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，$\frac{1}{5!}\approx0.008333$，

$\frac{1}{7!}\approx0.000198$，结果精确到小数点后 4 位，则 $f\left(\frac{\pi}{3}-1\right)=$（　）.

A．0.5394　　B．0.8419　　C．0.8415　　D．0.5398

【答案】C

【优尖升-分析】本题先由已知结合诱导公式求出 $f\left(\frac{\pi}{3}-1\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\sin1$，再由已知条件给定的公式代入计算，同时作估算分析即可得出结果.

【详解】因为 $f\left(\frac{\pi}{3}-1\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-1+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\sin1$，

所以 $f\left(\frac{\pi}{3}-1\right)=\sin1=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{9!}+\cdots+(-1)^{k-1}\times\frac{1}{(2k-1)!}$，

又因为 $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$，

所以 $f\left(\frac{\pi}{3}-1\right)=\sin1=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{9!}+\cdots+(-1)^{k-1}\times\frac{1}{(2k-1)!}=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{9!}+\cdots\approx1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}\approx1-\frac{1}{6}+0.008333-0.000198\approx1-0.166667+0.008333-0.000198\approx0.841468\approx0.8415$

故选：C.

【点睛】关键点点睛：（1）利用诱导公式转化所求的值 $f\left(\frac{\pi}{3}-1\right)=\sin1$；（2）理解公式 $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$ 的含义，并在条件式中的运用，分析估算所求的函数值.

3．（多选）（23-24 高一上·重庆·阶段练习）若存在两个不相等的实数 x_1、x_2，使 x_1、x_2、$\frac{x_1+x_2}{2}$ 均在函数 $f(x)$ 的定义域内，且满足 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称函数 $f(x)$ 具有性质 w，下列函数具有性质 w 的有（　）

A. $f\left(x\right)=2^{x}$　　B. $f\left(x\right)=\left|x^{2}-2x\right|$

C. $f\left(x\right)=\lg\left|x\right|$　　D. $f\left(x\right)=x-\sin x$

【答案】BCD

【优尖升-分析】根据题中性质 w 的定义，逐项判断，即可得出结果.

【详解】对于 A，函数 $f\left(x\right)=2^{x}$ 的定义域为 R，且 $f\left(x\right)=2^{x}>0$，

所以 $\dfrac{f\left(x_{1}\right)+f\left(x_{2}\right)}{2}=\dfrac{2^{x_{1}}+2^{x_{2}}}{2}\geq\sqrt{2^{x_{1}}\times2^{x_{2}}}=2^{\frac{x_{1}+x_{2}}{2}}=f\left(\dfrac{x_{1}+x_{2}}{2}\right)$，

由于 $x_{1}\neq x_{2}$，所以 $\dfrac{f\left(x_{1}\right)+f\left(x_{2}\right)}{2}>f\left(\dfrac{x_{1}+x_{2}}{2}\right)$ 恒成立，故 A 错误；

对于 B，因为函数 $f\left(x\right)=\left|x^{2}-2x\right|$ 的定义域为 R，

取 $x_{1}=1-\sqrt{2}$，$x_{2}=1+\sqrt{2}$，则 $\dfrac{x_{1}+x_{2}}{2}=1$，

则 $f\left(x_{1}\right)=f\left(x_{2}\right)=f\left(\dfrac{x_{1}+x_{2}}{2}\right)=1$，

所以 $f\left(\dfrac{x_{1}+x_{2}}{2}\right)=\dfrac{f\left(x_{1}\right)+f\left(x_{2}\right)}{2}$ 成立，故 B 正确；

对于 C，假设 $f\left(x\right)=\lg\left|x\right|$ 具有性质 w，

则存在 $x_{1},x_{2}\in\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$，使得 $\lg\left|x_{1}+x_{2}\right|=\dfrac{\lg\left|x_{1}\right|+\lg\left|x_{2}\right|}{2}$，

则 $\left|x_{1}+x_{2}\right|^{2}=\left|x_{1}\right|\left|x_{2}\right|$，即 $x_{1}^{2}+2x_{1}x_{2}+x_{2}^{2}=\left|x_{1}\right|\left|x_{2}\right|$，

若 x_{1},x_{2} 同号，则 $x_{1}^{2}+2x_{1}x_{2}+x_{2}^{2}=x_{1}x_{2}$，即 $x_{1}^{2}+x_{1}x_{2}+x_{2}^{2}=0$，

所以 $\left(x_{1}+\dfrac{1}{2}x_{2}\right)^{2}+\dfrac{3}{4}x_{2}^{2}=0$，得 $x_{1}=x_{2}=0$，显然不成立；

若 x_{1},x_{2} 异号，则 $x_{1}^{2}+2x_{1}x_{2}+x_{2}^{2}=-x_{1}x_{2}$，即 $x_{1}^{2}+3x_{1}x_{2}+x_{2}^{2}=0$，

将上述方程看作关于 x_{1} 的二次方程，解得 $x_{1}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}x_{2}$，

此时满足 $x_{1}x_{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}x_{2}^{2}<0$，故 C 正确；

对于 D，因为函数 $f\left(x\right)=x-\sin x$ 的定义域为 R，

又 $f\left(-x\right)=\left(-x\right)-\sin\left(-x\right)=-\left(x-\sin x\right)=-f\left(x\right)$，故 $f\left(x\right)$ 为奇函数，

取 $x_{2}=-x_{1}\neq0$，则 $\dfrac{x_{1}+x_{2}}{2}=0$，所以 $f\left(x_{2}\right)+f\left(x_{1}\right)=0$，$f\left(\dfrac{x_{1}+x_{2}}{2}\right)=f(0)=0$，

所以 $f\left(\dfrac{x_{1}+x_{2}}{2}\right)=\dfrac{f\left(x_{1}\right)+f\left(x_{2}\right)}{2}$ 成立，故 D 正确.

故选：BCD.

【点睛】关键点睛：本题解决的关键是充分理解性质 w 的定义，结合函数的性质即可得解.

4．（23-24 高一下·江西·阶段练习）已知函数 $y=f\left(x\right)$ 的定义域为 C，值域为 D，若存在整数 $m\in C$， $n\in D$，且 $n=f\left(m\right)$，则 mn 为函数 $y=f\left(x\right)$ 的“子母数”.已知集合 $A=\left\{x\middle|\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}\tan\dfrac{x}{24}+\dfrac{\pi}{3}\right)\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2},x\in\left[-8\pi,8\pi\right]\right\}$，函数 $g\left(x\right)=\left[\cos x\right]$， $x\in A$ （$\left[x\right]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如 $\left[1.2\right]=1$ ），当 $xg\left(x\right)<0$ 时，函数 $y=g\left(x\right)$ 的所有子母数”之和为______.

【答案】-36

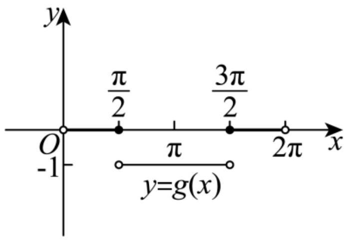
【优尖升-分析】解不等式 $\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}\tan\dfrac{x}{24}+\dfrac{\pi}{3}\right)\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， 得集合 $A=[0,4\pi]$， 画出 $g(x)$ 的图象，根据图象得到 g(x)<0 的部分，求出 x∈Z 且在定义域内的 x 之和即可求解.

【详解】因为 $x\in\left[-8\pi,8\pi\right]$，$\dfrac{x}{24}\in[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}]$，$\tan\dfrac{x}{24}\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$， $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}\tan\dfrac{x}{24}+\dfrac{\pi}{3}\in[-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}]$，

所以由 $\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}\tan\dfrac{x}{24}+\dfrac{\pi}{3}\right)\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

可得 $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}\tan\dfrac{x}{24}+\dfrac{\pi}{3}\in[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}]$， 解得 $x\in\left[0,4\pi\right]$， 即 $A=[0,4\pi]$，

如图为 $g(x)=[\cos x]$ 的图象，



由 $g(x)$ 的周期性，所以只需讨论一个周期内的情况即可，

当 $x=0$ 时， $\cos x=1$， $g(x)=[\cos x]=1$，

当 $0<x\leq\dfrac{\pi}{2}$ 时， $0<\cos x<1$， $g(x)=[\cos x]=0$，

当 $\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$ 时， $-1\leq\cos x<0$， $g(x)=[\cos x]=-1$，

当 $\dfrac{3\pi}{2}\leq x<2\pi$ 时， $0<\cos x<1$， $g(x)=[\cos x]=0$，

所以 $x\in[0,4\pi]$， 即在一个周期内 $xg\left(x\right)<0$ 的部分，

由图得 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 时， $g(x)=-1<0$，

$x\in(\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2})$， $g(x)=-1<0$，

所以 $x\in Z$ 且在定义域内的 x 为 $2,3,4,8,9,10$，

所以数 $y=g\left(x\right)$ 的所有“子母数”之和为 $(2+3+4+8+9+10)\times(-1)=-36$.

故答案为： -36.

【点睛】关键点点睛：本题关键在于画出 $g(x)$ 的图象，根据图象得到 $g(x)<0$ 的部分，求出 $x\in Z$ 且在定义域内的 x 之和.

5．（23-24 高一下·江西·阶段练习）定义：对于非常数函数 $f\left(x\right)$，若 $\exists m\in\mathbf{R}$， $\forall x\in\mathbf{R}$， $mf\left(x\right)=4f\left(x+m\right)$，则称 $f\left(x\right)$ 是“米函数”．已知函数 $g\left(x\right)=4\cos\left(\omega x-\varphi\right)\left(\omega>0\right)$ 是“米函数”，则 ω 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【优尖升-分析】由函数新定义可得 $mg(x)=4g(x+m)$， 即 $m\cos t=4\cos(t+\omega m)$ （令 $\omega x-\varphi=t$ ），结合三角函数的性质分类讨论 $m>4$ 、 $0<m<4$ 、 $-4<m<0$ 、 $m<-4$ 不符合题意，故 $m=4$ 或 $m=-4$.再结合三角函数的性质分类讨论 $m=4$ 、 $m=-4$ 的情况，求出对应的 ω 即可.

【详解】由题意知， $\exists m\in\mathbf{R},\forall x\in\mathbf{R}$， 使得 $mg(x)=4g(x+m)$，

又 $mg(x)=4m\cos(\omega x-\varphi),4g(x+m)=16\cos(\omega x-\varphi+\omega m)$，

所以 $m\cos(\omega x-\varphi)=4\cos(\omega x-\varphi+\omega m)$，

令 $\omega x-\varphi=t$， 则 $m\cos t=4\cos(t+\omega m)$.

若 $m>4$， 取 $t=0$， 则 $m=4\cos\omega m>4$， 所以 $\cos\omega m>1$， 与 $\cos\omega m\le1$ 矛盾；

若 $0<m<4$， 取 $t=-\omega m$， 则 $m\cos(-\omega m)=4$， 所以 $\cos(-\omega m)=\frac{4}{m}>1$， 与 $\cos(-\omega m)\le1$ 矛盾；

若 $-4<m<0$， 取 $t=-\omega m$， 则 $m\cos(-\omega m)=4$， 所以 $\cos(-\omega m)=\frac{4}{m}<-1$， 与 $\cos(-\omega m)\ge-1$ 矛盾；

若 $m<-4$， 取 $t=0$， 则 $m=4\cos\omega m<-4$， 所以 $\cos\omega m<-1$， 与 $\cos\omega m\ge-1$ 矛盾；

综上， $m=4$ 或 $m=-4$.

当 $m=4$ 时， $4\cos t=4\cos(t+4\omega)$， 即 $\cos t=\cos(t+4\omega)$，

得 $4\omega=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$， 解得 $\omega=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$， 又 $\omega>0$，

所以 $\omega_{\min}=\frac{\pi}{2}$；

当 $m=-4$ 时， $-4\cos t=4\cos(t-4\omega)$， 即 $\cos t=-\cos(t-4\omega)=\cos(t-4\omega-\pi)$，

得 $-4\omega-\pi=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$， 解得 $\omega=-\frac{2k\pi+\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$， 又 $\omega>0$，

所以 $\omega_{\min}=\frac{\pi}{4}$；

综上，ω 的最小值为$\frac{\pi}{4}$.

故答案为：$\frac{\pi}{4}$

【点睛】方法点睛：

学生在理解相关新概念、新法则(公式)之后，运用学过的知识，结合已掌握的技能，通过推理、运算等解决问题.在新环境下研究“旧”性质.主要是将新性质应用在“旧”性质上，创造性地证明更新的性质，落脚点仍然是三角函数的性质.

6．（23-24 高二上·北京·期末）在平面直角坐标系中，定义$d\left(A,B\right)=\left|x_1-x_2\right|+\left|y_1-y_2\right|$为点$A\left(x_1,y_1\right)$到点$B\left(x_2,y_2\right)$的“折线距离”．点$O$是坐标原点，点$P$在圆$x^2+y^2=1$上，点$Q$在直线$2x+y-2\sqrt{5}=0$上．在这个定义下，给出下列结论：

①若点P的横坐标为$-\frac{3}{5}$，则$d\left(O,P\right)=\frac{7}{5}$；　②$d\left(O,P\right)$的最大值是$\sqrt{2}$；

③$d\left(O,Q\right)$的最小值是 2；　④$d\left(P,Q\right)$的最小值是$\frac{\sqrt{5}}{2}$.

其中，所有正确结论的序号是_____.

【答案】①②④

【优尖升-分析】对于①,求出P的坐标即可判定为正确；对于②，利用圆的参数方程和辅助角公式即可判定正确；对于③④，利用绝对值放缩和绝对值不等式即可判定③错④对.

【详解】对于①，由题得出P的纵坐标为$\pm\frac{4}{5}$，所以$d\left(O,P\right)=\left|-\frac{3}{5}-0\right|+\left|\pm\frac{4}{5}-0\right|=\frac{7}{5}$，故①正确；

对于②，设$P(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in\left[0,2\pi\right)$，则$d\left(O,P\right)=\left|\cos\theta\right|+\left|\sin\theta\right|$，结合对称性，取$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$分析即可，

此时$d\left(O,P\right)=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$，显然当$\theta=\frac{\pi}{4}$时，$d\left(O,P\right)$取最大值$\sqrt{2}$，故②正确；

对于③，设$Q(a,2\sqrt{5}-2a)$，则

$d\left(O,Q\right)=\left|a\right|+\left|2\sqrt{5}-2a\right|=\left|a\right|+2\left|\sqrt{5}-a\right|\geq\left|a\right|+\left|\sqrt{5}-a\right|\geq\left|a+\sqrt{5}-a\right|=\sqrt{5}$，

当$a=\sqrt{5}$的时候等号成立，所以$d\left(O,Q\right)$的最小值是$\sqrt{5}$，故③错误；

对于④，设$P(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in\left[0,2\pi\right)$，$Q(a,2\sqrt{5}-2a)$，则

$d\left(P,Q\right)=\left|\cos\theta-a\right|+\left|\sin\theta-2\sqrt{5}+2a\right|=\left|\cos\theta-a\right|+2\left|\frac{\sin\theta}{2}-\sqrt{5}+a\right|\geq\left|\cos\theta-a\right|+\left|\frac{\sin\theta}{2}-\sqrt{5}+a\right|$

$\geq\left|\cos\theta-a+\frac{\sin\theta}{2}-\sqrt{5}+a\right|=\sqrt{5}-\left(\cos\theta+\frac{\sin\theta}{2}\right)=\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(\theta+\delta)$，其中

$\cos\delta=\frac{1}{\sqrt{5}},\sin\delta=\frac{2}{\sqrt{5}}$，

所以当 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}},\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ 时，$d(P,Q)$ 取最小值 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，此时 $a=\frac{9\sqrt{5}}{10}$，故④正确；

故答案为：①②④.

二、解答题（新定义题）

1．（23-24 高一上·湖南长沙·期末）若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x)=f\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$ 且 $f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)(x\in\mathrm{R})$，则称函数 $y=f(x)$ 为"M 函数".

(1)试判断 $y=\sin\frac{4}{3}x$ 是否为"M 函数"，并说明理由；

(2)函数 $g(x)$ 为"M 函数"，其在 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$ 的图象落在直线 $6x+8y+3\pi=0$ 上，在函数 $g(x)$ 图象上任取一点 P，对于定点 $A(2024\pi,0)$，求线段 AP 的最小值；

(3)函数 $f(x)$ 为"M 函数"，且当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$ 时，$y=\sin x$，求 $f(x)$ 的解析式；若当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$，关于 x 的方程 $f(x)=a$（a 为常数）有解，记该方程所有解的和为 S，求 S.

【答案】(1) $y=\sin\frac{4}{3}x$ 不是"M 函数"，理由见解析

(2) $\frac{3\pi}{10}$

(3) $S=\begin{cases}3\pi,a=0\\4\pi,0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}\text{或}a=1\\6\pi,a=\frac{\sqrt{2}}{2}\\8\pi,\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1\end{cases}$

【优尖升-分析】（1）由"M 函数"的定义，即可判断；

（2）结合函数的周期性和对称性，画出函数的图象，利用数形结合转化为点到直线的距离，即可求解；

（3）首先结合“M 函数”的定义，利用周期性和对称性求函数的解析式，再画出函数 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$ 的图象，讨论 a 得到取值，利用对称性求和.

【详解】（1）$y=\sin\frac{4}{3}x$ 的周期为 $T=\frac{2\pi}{\frac{4}{3}}=\frac{3\pi}{2}$，满足 $f(x)=f\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$，

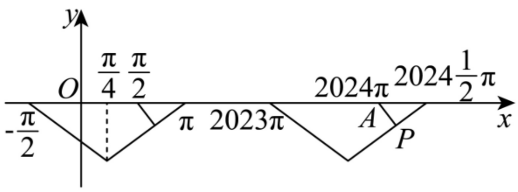
$f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin\frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4x}{3}\right)$，$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{4x}{3}\right)$，

$f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\neq f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$，所以函数 $y=\sin\frac{4}{3}x$ 不是“M 函数”；

（2）若 $g(x)$ 为“M 函数”， 满足 $f(x)=f\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$ 且 $f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)(x\in\mathrm{R})$，

所以函数的周期为 $\frac{3\pi}{2}$，且函数关于 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称，

根据 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$，函数 $g(x)$ 的图象落在直线 $6x+8y+3\pi=0$ 上，利用对称性和周期性画出函数 $g(x)$ 的图象，



设 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$，$\frac{\pi}{2}-x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$，

所以 $f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\frac{3\pi}{8}=-\frac{3\pi}{4}+\frac{3x}{4}$，

根据周期可知，$x\in\left[2023\pi,2024\frac{1}{2}\pi\right]$ 的图象，如上图所示，

线段 AP 的最小值就是如图点 A 到直线的距离，根据周期转化为 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 到直线 $y=-\frac{3\pi}{4}+\frac{3x}{4}$ 的距离，

即 $d=\left|\frac{\frac{3\pi}{2}-3\pi}{5}\right|=\frac{3\pi}{10}$，

所以 AP 的最小值为 $\frac{3\pi}{10}$.

（3）设 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$，则 $\frac{\pi}{2}-x\in\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$

所以 $f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$，

设 $x\in\left[\frac{\pi}{4}+\frac{3k\pi}{2},\pi+\frac{3k\pi}{2}\right]$，则 $x-\frac{3k\pi}{2}\in\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$，

$f(x)=f\left(x-\frac{3k\pi}{2}\right)=\sin\left(x-\frac{3k\pi}{2}\right)$，

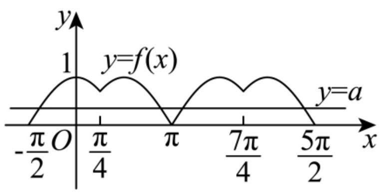
设 $x\in\left[-\frac{\pi}{2}+\frac{3k\pi}{2},\frac{\pi}{4}+\frac{3k\pi}{2}\right]$，则 $x-\frac{3k\pi}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$，

$f(x)=f\left(x-\frac{3k\pi}{2}\right)=\cos\left(x-\frac{3k\pi}{2}\right)$，

所以 $f(x)=\begin{cases}\sin\left(x-\frac{3k\pi}{2}\right),x\in\left[\frac{\pi}{4}+\frac{3k\pi}{2},\pi+\frac{3k\pi}{2}\right]\\ \cos\left(x-\frac{3k\pi}{2}\right),x\in\left[-\frac{\pi}{2}+\frac{3k\pi}{2},\frac{\pi}{4}+\frac{3k\pi}{2}\right]\end{cases}$；

所以 $f(x)=\begin{cases}\cos x,-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{4}\\ \sin x,\frac{\pi}{4}\le x\le\pi\\ -\sin x,\pi\le x\le\frac{7\pi}{4}\\ \cos x,\frac{7\pi}{4}\le x\le\frac{5\pi}{2}\end{cases}$

作出函数 $f(x)$ 的图象，如图所示，



关于 x 的方程 $f(x)=a$（a 为常数）有解等价于函数 $y=f(x)$ 与 $y=a$ 的图象有交点，

由图可知，当 $a=0$ 时，方程 $f(x)=a$（a 为常数）有 3 个解，

则方程所有的解的和为 $S=-\frac{\pi}{2}+\pi+\frac{5\pi}{2}=3\pi$，

当 $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a=1$ 时，方程 $f(x)=a$（a 为常数）有 4 个解，其方程所有解的和

$S=\frac{2\pi}{4}+\frac{14\pi}{4}=4\pi$，

当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，方程 $f(x)=a$（a 为常数）有 6 个解，其方程所有解的和

$S=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}+\frac{14\pi}{4}=6\pi$，

当 $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1$ 时，方程 $f(x)=a$（a 为常数）有 8 个解，其方程所有解的和

$S=\frac{2\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}+\frac{14\pi}{4}+\frac{14\pi}{4}=8\pi$

综上所述，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$，关于 x 的方程 $f(x)=a$（a 为常数）所有解的和为 S，

则 $S=\begin{cases}3\pi,a=0\\4\pi,0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}\text{或}a=1\\6\pi,a=\frac{\sqrt{2}}{2}\\8\pi,\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1\end{cases}$.

【点睛】关键点点睛：本题的关键是理解“M 函数”的定义，确定函数的周期和对称性，利用周期性和对称性求函数的解析式，以及画出函数的图象.

2．（23-24 高一下·江西南昌·期末）对于平面向量 $\vec{x_i}\left(i=1,2,\cdots,m,m\geq 3\text{且}m\in\mathbf{N}\right)$，记 $\Omega_m=\left\{\vec{x_1},\vec{x_2},\cdots,\vec{x_m}\right\},\vec{S_m}=\vec{x_1}+\vec{x_2}+\cdots+\vec{x_m}$，若存在 $\vec{x_p}\left(p\in\{1,2,\cdots,m\}\right)$，使得 $\left|\vec{x_p}\right|\geq\left|\vec{S_m}+k\vec{x_p}\right|,k\in\mathbf{Z}$，则称 $\vec{x_p}$ 是 Ω_m 的“k 向量”.

(1)设 $\vec{x_n}=(n,l-n),n\in\mathbf{N}^*$，若 $\vec{x_3}$ 是 Ω_3 的“-3 向量”，求实数 l 的取值范围；

(2)若 $\vec{x_n}=\left(\cos\frac{2n\pi}{3},\sin\frac{2n\pi}{3}\right),n\in\mathbf{N}^*$，则 $\Omega_{3i+1}\left(i\in\mathbf{N}^*\right)$ 是否存在“1 向量”?若存在，求出“1 向量”；若不存在，请说明理由；

(3)已知 $\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3}$ 均为 Ω_3 的“-1 向量”，其中 $\vec{x_1}=(\cos x,-5\sin x),\vec{x_2}=(2\cos x,\sin x)$．设平面直角坐标系 xOy 中的点列 $P_1,P_2,\cdots,P_t\left(t\in\mathbf{N}^*,t\geq 3\right)$ 满足 $\overrightarrow{P_1P_2}=\vec{x_3}$（$P_1$ 与原点 O 重合），且 P_{2k} 与 $P_{2k+1}\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$ 关于点 P_1 对称，P_{2k+1} 与 P_{2k+2} 关于点 P_2 对称．求 $\left|\overrightarrow{P_{99}P_{100}}\right|$ 的取值范围.

【答案】(1) $l\geq 6$ 或 $l\leq 0$，

(2)存在“1 向量”，“1 向量”为 $\vec{x_p}=(1,0)$，，$\vec{x_p}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

(3) $\left|\overrightarrow{P_{99}P_{100}}\right|\in[588,784]$

【优尖升-分析】（1）根据“-3 向量”的定义，即可由模长公式求解；

（2）利用三角函数的周期性可得 $\overrightarrow{S_{3i+1}}=\vec{x_1}+\vec{x_2}+\cdots+\overrightarrow{x_{3i+1}}=\left(\cos\frac{2\pi}{3},\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，即可由定义求解，

（3）由定义，结合模长公式可得 $\vec{x_1}+\vec{x_2}+\vec{x_3}=\vec{0}$，设 $\vec{x_3}=(u,v)$，由条件列式，变形为