

山西省太原市 2022-2023 学年高二上学期

期中考试数学试题

(考试时间:上午7:30—9:00)

说明:本试卷为闭卷笔答,答题时间90分钟,满分100分。

题 号	一	二	三	总 分
得 分				

一、选择题(本大题共12小题,每小题3分,共36分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。)

1. 直线 $x + y + 2 = 0$ 的倾斜角为

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{3\pi}{4}$

C. π

D. $\frac{\pi}{2}$

2. 已知直线 l 的方向向量为 $\mathbf{a}$, 平面 α 的法向量为 $\mathbf{n}$, 若 $\mathbf{a} = (-1, 0, -1)$, $\mathbf{n} = (1, 0, 1)$, 则直线 l 与平面 α

A. 垂直

B. 平行

C. 相交但不垂直

D. 位置关系无法确定

3. 已知焦点在 y 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 则 $m =$

A. 3

B. $2\sqrt{3}$

C. 12

D. 2

4. 已知点 $A(3, 4, 5)$ 在坐标平面 Oxy 内的射影为点 B , 则点 B 与点 $C(3, -2, 6)$ 的距离为

A. $6\sqrt{3}$

B. $6\sqrt{2}$

C. $\sqrt{37}$

D. $\sqrt{26}$

5. 已知椭圆 C 的一个焦点为 $(1, 0)$, 且过点 $(0, \sqrt{3})$, 则椭圆 C 的标准方程为

A. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$

B. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

C. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$

D. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$

6. 下列说法不正确的是

A. 直线的方程都可以表示为 $Ax + By + C = 0$ (A, B 不同时为 0)

B. 若直线 $y = kx + b$ 经过一、三象限, 则 $k > 0$

C. 若直线 l 的横纵截距相等, 则直线 l 的斜率为 1 或过原点

D. 若直线 l 的方程为 $Ax + By + C = 0$ ($B \neq 0$), 则直线 l 的斜率为 $-\frac{A}{B}$

7. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, E 为 CD 的中点, 点 F 在线段 AE 上,

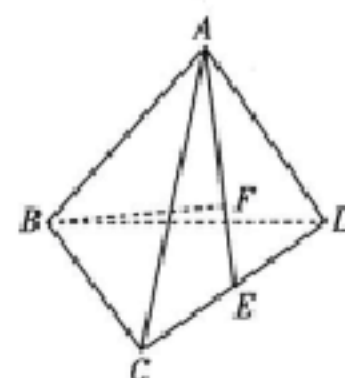
且 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FE}$, 若 $\overrightarrow{BF} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$, 则 $(x, y, z) =$

A. $(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

B. $(-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

C. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$

D. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$



8. 直线 l 的方向向量为 $(2, 3)$, 直线 m 过点 $(1, 1)$ 且与 l 垂直, 则直线 m 的方程为

A. $2x + 3y - 5 = 0$

B. $2x - 3y + 1 = 0$

C. $3x + 2y - 5 = 0$

D. $3x - 2y - 1 = 0$

9. 已知 $\{a, b, c\}$ 是空间的一个基底, 那么下列选项中不可作为基底的是

A. $\{a, b, a + c\}$

B. $\{a, b, a + 2b\}$

C. $\{a + 2c, b, c\}$

D. $\{a, a + b, a + c\}$

10. 设 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ 的左、右焦点, M 为 C 上一点且在第一象限, 若 $\triangle MF_1F_2$

为等腰三角形, 则 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为

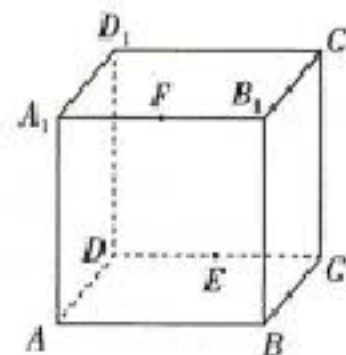
A. 2

B. $\frac{8}{3}$

C. 17

D. $\sqrt{35}$

11. 如图,在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 CD, A_1B_1 的中点,则下列结论正确的是



- ①点 F 到点 E 的距离为 $\sqrt{2}$;
 ②点 F 到直线 ED_1 的距离为 $\frac{\sqrt{30}}{5}$;
 ③点 F 到平面 AED_1 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$;
 ④平面 BFC_1 到平面 AED_1 的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

- A. ①②④ B. ②③④ C. ①④ D. ①②③

12. 下列结论正确的个数是

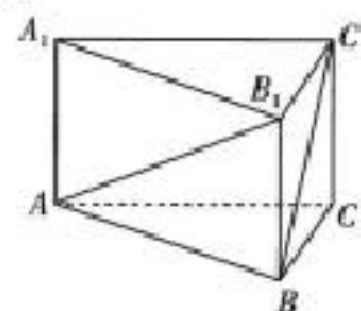
- ①已知点 $A(4,0), B(0,0), C(0,3)$,则 $\triangle ABC$ 外接圆的方程为 $(x-2)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$;
 ②已知点 $A(-1,0), B(1,0)$,动点 P 满足 $|PA| = 2|PB|$,则动点 P 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0$;
 ③已知点 M 在圆 $O: x^2 + y^2 = 9$ 上, $P(9,0)$,且点 N 满足 $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NP}$,则点 N 的轨迹方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 4$.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二、填空题(本大题共4小题,每小题4分,共16分,把答案写在题中横线上)

13. 过点 $(1,3)$,斜率 $k=0$ 的直线方程为_____.

14. 如图,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,若 $AB = \sqrt{2}, AA_1 = 1$,则



AB_1 与 BC_1 所成角的大小为_____.

15. 在平面直角坐标系中,若直线 l 过点 $P_0(x_0, y_0)$,且以 $\mu = (A, B)$ 为法向量(与直线方向向量垂直的向量),则直线 l 上任意一点 $P(x, y)$ 满足: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. 请你大胆类比猜想:在空间直角坐标系中,若平面 α 过点 $Q_0(x_0, y_0, z_0)$,且以 $v = (a, b, c)$ 为法向量,则平面 α 上任意一点 $P(x, y, z)$ 满足:_____.

16. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = AD = 2, AA_1 = 1, P$ 为底面 $ABCD$ (含边界)上的动点,且满足 $AC_1 \perp A_1P$,则点 P 轨迹的长度为_____.

三、解答题(本大题共5小题,共48分,解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分8分)

已知 $A(0,1), B(-2,-1), C(5,3)$ 三点.

(1)求 AB 边上中线所在直线的方程;

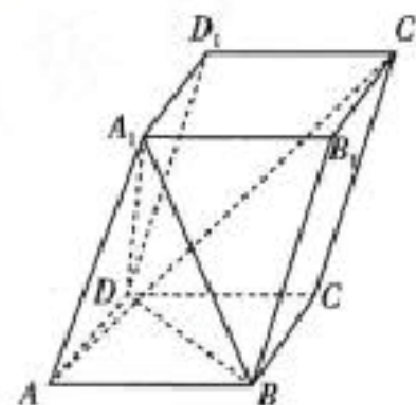
(2)求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分10分)

如图,在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AD=4, AA_1=5, \angle DAB=\angle DAA_1=\angle BAA_1=60^\circ$.

(1)求 AC_1 的长;

(2)求证: $AC_1 \perp BD$.



19. (本小题满分10分)

已知直线 l 过点 $(1,2)$,且被圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 截得的弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$.

(1)求直线 l 的方程;

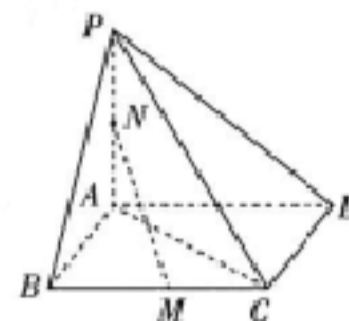
(2)若直线 l 的斜率存在,圆 C 过 A, B 两点,且圆心在 $x + y - 1 = 0$ 上,求圆 C 的方程.

20. (本小题满分10分)说明:请同学们在(A)、(B)两个小题中任选一题作答.

(A) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形. $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 点 M, N 分别为 BC, PA 的中点, 且 $AB = AC = 1, AD = \sqrt{2}$.

(1) 若 $PA = 1$, 求直线 MN 与平面 PBC 所成角的正弦值;

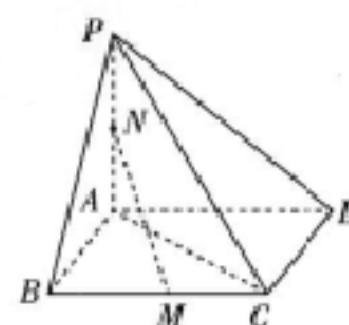
(2) 若直线 AC 与平面 PBC 所成角为 $\frac{\pi}{6}$, 求平面 PBC 与平面 $ABCD$ 的夹角的大小.



(B) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形. $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 点 M, N 分别为 BC, PA 的中点, 且 $AB = AC = 1, AD = \sqrt{2}$.

(1) 若 $PA = 1$, 求直线 MN 与平面 PBC 所成角的正弦值;

(2) 若直线 AC 与平面 PBC 所成角的正弦值的取值范围为 $(0, \frac{\sqrt{3}}{3}]$, 求平面 PBC 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值的取值范围.



21. (本小题满分10分)说明:请同学们在(A)、(B)两个小题中任选一题作答.

(A)已知平面上动点 $M(x, y)$ 与定点 $(1, 0)$ 的距离和 M 到定直线 $x = 2$ 的距离的比是常数 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 动点 M 的轨迹为曲线 C . 直线 l 的斜率存在, 且与曲线 C 交于 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 两个不同的点.

(1)求曲线 C 的方程;

(2)若 $\triangle OPQ$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 证明: $x_1^2 + x_2^2$ 为定值.

(B)已知平面上动点 $M(x, y)$ 与定点 $(1, 0)$ 的距离和 M 到定直线 $x = 2$ 的距离的比是常数 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 动点 M 的轨迹为曲线 C . 直线 l 与曲线 C 交于 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 两个不同的点.

(1)若直线 l 的方程为 $y = 2x + 2$, 求 $\triangle OPQ$ 的面积;

(2)若 $\triangle OPQ$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 证明: $x_1^2 + x_2^2$ 和 $y_1^2 + y_2^2$ 均为定值.

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	A	B	B	C	B	A	B	D	D	D

二、填空题

13. $y = 3$

14. 90°

15. $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

16. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

三、解答题

17. (本小题满分 8 分)

解: (1) $A(0, 1)$, $B(-2, -1)$ 中点坐标为 $D(-1, 0)$,1 分

则 AB 边上中线所在直线的方程为 $CD: x - 2y + 1 = 0$4 分

(2) 由 $A(0, 1)$, $B(-2, -1)$, 得 AB 所在直线方程为 $y = x + 1$, $|AB| = 2\sqrt{2}$,6 分

点 $C(5, 3)$ 到直线 AB 的距离 $d = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,7 分

则 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3$8 分

18. (本小题满分 10 分)

解: (1) $\{\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$ 可构成空间的一个基底, 则 $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$,2 分

所以 $\overrightarrow{AC_1}^2 = \overrightarrow{AA_1}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 113$,4 分

所以 AC_1 的长为 $\sqrt{113}$5 分

(2) 因为 $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$,

所以 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC_1} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$,

$$= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\begin{aligned}
 &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}^2 \\
 &= 10 + 16 - 10 - 16 = 0
 \end{aligned}$$

9 分

所以 $AC_1 \perp BD$, 10 分

19. (本小题满分 10 分)

解: (1) 当直线 l 的斜率不存在时, 直线 l 方程为 $x=1$, 与圆 O 的交点为 $(1, -\sqrt{3}), (1, \sqrt{3})$,
此时弦长为 $2\sqrt{3}$, 满足条件, 2 分

当直线 l 存在斜率时, 设直线 l 方程为 $y=kx-k+2$, 则 $\left(\frac{|-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2+3=4$,

解得 $k=\frac{3}{4}$, 所以直线 l 方程为 $3x-4y+5=0$, 4 分

故直线 l 方程为 $x=1$ 或 $3x-4y+5=0$. 5 分

(2) 设圆 C 的方程为 $x^2+y^2-4+\lambda(3x-4y+5)=0$,

即 $x^2+y^2+3\lambda x-4\lambda y+5\lambda-4=0$, 则其圆心坐标为 $(-\frac{3\lambda}{2}, 2\lambda)$, 7 分

因为圆心在 $x+y-1=0$ 上, 则 $\lambda=2$. 9 分

所以圆 C 的方程为 $x^2+y^2+6x-8y+6=0$. 10 分

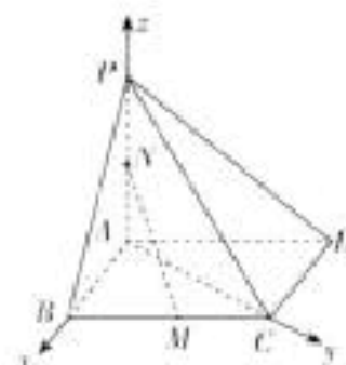
20. (本小题满分 10 分)

(A) 解: (1) 平行四边形 $ABCD$ 中, 因为 $AB=AC=1$, $AD=\sqrt{2}$, 则 $AB \perp AC$.

建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$,

则 $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $N(0, 0, \frac{1}{2})$, $P(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$,

$\overrightarrow{PB}=(1, 0, -1)$, $\overrightarrow{BC}=(-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{MN}=(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 2 分



设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n}=(x_1, y_1, z_1)$.

则 $\begin{cases} x_1 - z_1 = 0, \\ -x_1 + y_1 = 0, \end{cases}$ 得平面 PBC 的一个法向量 $\vec{n}=(1, 1, 1)$. 3 分

设直线 MN 与平面 PBC 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{MN}, \vec{n} \rangle \right| = \left| \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}} \right| = \frac{1}{3}$5 分

(2) 设 $PA = h$, 则 $P(0, 0, h), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0)$. $\overrightarrow{PB} = (1, 0, -h), \overrightarrow{BC} = (-1, 1, 0)$,

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, 则 $\begin{cases} x_1 - z_1 h = 0 \\ -x_1 + y_1 = 0 \end{cases}$,

得平面 PBC 的一个法向量 $\vec{n}_1 = (h, h, 1)$, 又 $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 0)$.

因为直线 AC 与平面 PBC 所成角为 $\frac{\pi}{6}$, 则 $\frac{h}{\sqrt{2h^2 + 1}} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, 解得 $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

.....7 分

设平面 $ABCD$ 的法向量为 $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$, 平面 PBC 与底面 $ABCD$ 所成角为 β ,

则 $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2h^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$9 分

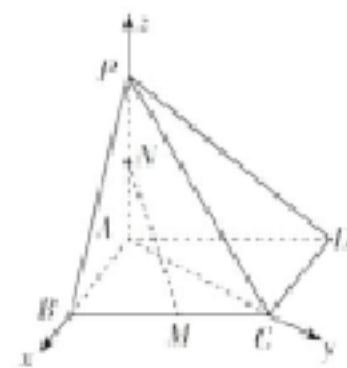
故平面 PBC 与底面 $ABCD$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$10 分

20 (B) 解: (1) 平行四边形 $ABCD$ 中, 因为 $AB = AC = 1, AD = \sqrt{2}$, 则 $AB \perp AC$.

建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$,

则 $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), N(0, 0, \frac{1}{2}), P(0, 0, 1), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0)$.

$\overrightarrow{PB} = (1, 0, -1), \overrightarrow{BC} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{MN} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$2 分



设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$.

则 $\begin{cases} x_1 - z_1 = 0, \\ -x_1 + y_1 = 0, \end{cases}$ 得平面 PBC 的一个法向量 $\vec{n} = (1, 1, 1)$3 分

设直线 MN 与平面 PBC 所成角为 θ ，则 $\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{MN}, \vec{n} \rangle \right| = \left| \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}} \right| = \frac{1}{3}$5 分

(2) 设 $PA = h$ ，则 $P(0, 0, h), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0)$. $\overrightarrow{PB} = (1, 0, -h), \overrightarrow{BC} = (-1, 1, 0)$,

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$.

则 $\begin{cases} x_1 - z_1 h = 0 \\ -x_1 + y_1 = 0 \end{cases}$ ，得平面 PBC 的一个法向量 $\vec{n}_1 = (h, h, 1)$.

设平面 $ABCD$ 的法向量为 $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$ ，又 $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 0)$ ，7 分

设直线 AC 与平面 PBC 所成角为 α ，则 $\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{2h^2 + 1}} \in (0, \frac{\sqrt{3}}{3}]$,

所以 $h \in (0, 1]$8 分

设平面 PBC 与底面 $ABCD$ 所成角为 β ，则 $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2h^2 + 1}} \in [\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$10 分

21. (本小题满分 10 分)

(A) 解: (1) 根据题意, 得 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}|x-2|$,2 分

化简, 得曲线 C 的方程 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$4 分

(2) 设直线 l 的方程为 $y = kx + m$,

联立方程 $\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$

得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + 2(m^2 - 1) = 0$, $\Delta = 8(2k^2 - m^2 + 1)$,

$x_1 + x_2 = -\frac{4km}{2k^2 + 1}$, $x_1 x_2 = \frac{2(m^2 - 1)}{2k^2 + 1}$;6 分

$S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \sqrt{1+k^2} \frac{2\sqrt{2}\sqrt{2k^2 - m^2 + 1}}{2k^2 + 1} \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

化简，得 $2m^2 = 2k^2 + 1$ ，8 分

$$\text{所以 } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{16k^2m^2}{(2k^2+1)^2} - \frac{4(m^2-1)}{2k^2+1} = \frac{4k^2+2}{2k^2+1} = 2. \quad \text{.....10 分}$$

21 (B) 解：(1) 根据题意，得 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}|x-2|$ ，1 分

化简，得曲线 C 的方程 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 。3 分

联立直线与椭圆方程 $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$ ，得 $9x^2 + 16x + 6 = 0$ ， $\Delta = 40$ ，

$$\text{所以 } S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \sqrt{5} \frac{2\sqrt{10}}{9} \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{9}. \quad \text{.....4 分}$$

(2) 当直线 l 的斜率不存在时，设直线 l 的方程为： $x = m$ ；解得 $P(m, \sqrt{1 - \frac{m^2}{2}})$ ，

$Q(m, -\sqrt{1 - \frac{m^2}{2}})$ ，则 $S_{\triangle OPQ} = m\sqrt{1 - \frac{m^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，解得： $m = 1$ ，

则 $x_1^2 + x_2^2 = 2$ 。5 分

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为： $y = kx + m$ ；联立方程得： $\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$ ，

$$(2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + 2(m^2 - 1) = 0, \quad \Delta = 8(2k^2 - m^2 + 1),$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{4km}{2k^2 + 1}, \quad x_1x_2 = \frac{2(m^2 - 1)}{2k^2 + 1}, \quad \text{.....6 分}$$

$$S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + k^2} \frac{2\sqrt{2}\sqrt{2k^2 - m^2 + 1}}{2k^2 + 1} \frac{|m|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{化简得：} 2m^2 = 2k^2 + 1, \quad \text{.....8 分}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{16k^2m^2}{(2k^2+1)^2} - \frac{4(m^2-1)}{2k^2+1} = \frac{4k^2+2}{2k^2+1} = 2, \quad \text{.....9 分}$$

$$y_1^2 + y_2^2 = 1 - \frac{x_1^2}{2} + 1 - \frac{x_2^2}{2} = 2 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = 1, \quad \text{.....10 分}$$

(注：以上各题，其他正确解法相应付分)

山西省太原市 2022-2023 学年高二上学期 期中考试数学试题

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/138042065074006041>