直角三角形重难点题型专训
（11 大题型+15 道拓展培优）

【题型目录】

题型一 直角三角形的两个锐角互余

题型二 用 HL 证全等

题型三 全等的性质与 HL 综合

题型四 判断三边能否构成直角三角形

题型五 图形上与已知两点构成直角三角形的点

题型六 在网格中判断直角三角形

题型七 利用勾股定理的逆定理求解

题型八 勾股定理逆定理的实际应用

题型九 勾股定理逆定理的拓展问题

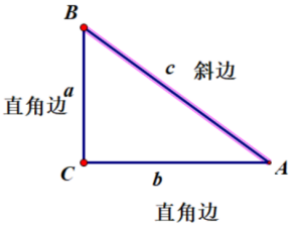
题型十 锐角互余的三角形是直角三角形

题型十一 直角三角形的综合

【知识梳理】

知识点 1 勾股定理

直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方如图：直角三角形 ABC 的两直角边长分别为 a，b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$.



注意：（1）勾股定理揭示了一个直角三角形三边之间的数量关系.

（2）利用勾股定理，当设定一条直角边长为未知数后，根据题目已知的线段长可以建立方程求解，这样就将数与形有机地结合起来，达到了解决问题的目的.

（3）理解勾股定理的一些变式：

$a^2=c^2-b^2$，$b^2=c^2-a^2$，$c^2=(a+b)^2-2ab$.

运用：1. 已知直角三角形的任意两条边长，求第三边；

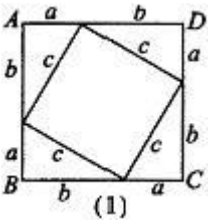
2. 用于解决带有平方关系的证明问题；

3.利用勾股定理，作出长为 $\sqrt{n}$ 的线段

知识点 2 勾股定理证明

方法一：将四个全等的直角三角形拼成如图（1）所示的正方形.

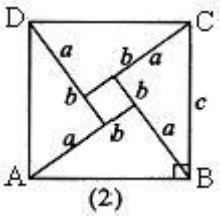
图（1）中 $S_{正方形ABCD}=(a+b)^2=c^2+4\times\frac{1}{2}ab$，所以 $a^2+b^2=c^2$.



(1)

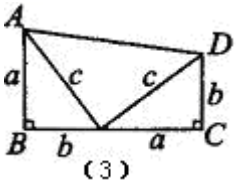
方法二：将四个全等的直角三角形拼成如图（2）所示的正方形.

图（2）中 $S_{正方形ABCD}=c^2=(b-a)^2+4\times\frac{1}{2}ab$，所以 $c^2=a^2+b^2$.



(2)

方法三：如图（3）所示，将两个直角三角形拼成直角梯形.



（3）

$S_{梯形ABCD}=\frac{(a+b)(a+b)}{2}=2\times\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$，所以 $a^2+b^2=c^2$.

知识点 3 勾股定理逆定理

1. **定义**：如果三角形的三条边长 a，b，c，满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形.

注意：（1）勾股定理的逆定理的作用是判定某一个三角形是否是直角三角形.

（2）勾股定理的逆定理是把“数”转为“形”，是通过计算来判定一个三角形是否为直角三角形.

2. 如何判定一个三角形是否是直角三角形

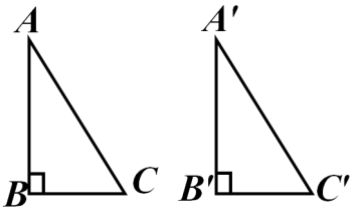
（1） 首先确定最大边（如 c）.

（2） 验证 c^2 与 a^2+b^2 是否具有相等关系. 若 $c^2=a^2+b^2$，则△ABC 是∠C＝90° 的直角三角形；若 $c^2\neq a^2+b^2$，则△ABC 不是直角三角形.

注意：当$a^2+b^2<c^2$时，此三角形为钝角三角形；当$a^2+b^2>c^2$时，此三角形为锐角三角形，其中c为三角形的最大边.

知识点 4　直角三角形的判定（直角边、斜边）

斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等（简写成"斜边、直角边"或"HL"）。



在Rt△ABC和Rt△$A'B'C'$中，

$\begin{cases} AC=A'C', \\ BC=B'C', \end{cases}$

∴△ABC≌△$A'B'C'$（HL）.

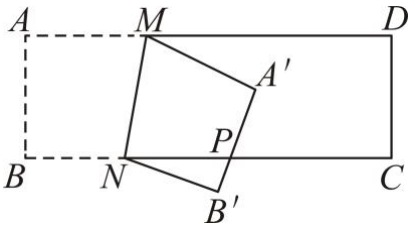
注意：用“HL”证明两个直角三角形全等，书写时两个三角形符号前面要加上“Rt”。

知识点 5 命题

	内容
定义	能判断一件事情的语句，叫做命题。
组成	命题由题设和结论两部分组成，题设是已知的事项，结论是由已知事项推出来的事项
表达形式	通常可以写成“如果……，那么……”的形式，“如果”后接的部分是题设，“那么”后接的部分是结论。
分类	题设成立，结论也成立，这样的命题叫做真命题
	题设成立，结论不成立，这样的命题叫做假命题。

【经典例题一 直角三角形的两个锐角互余】

【例 1】（2024 上·江苏苏州·八年级期末）如图，将长方形纸条$ABCD$沿着线段MN折叠，点A,B对应点为A'、B'，线段$A'B'$与边BC交于点P，若$\angle A'PC=70°$，则$\angle MNC$的度数是(　　)



A．60°　　B．75°　　C．70°　　D．80°

【答案】D

【分析】本题考查了折叠的性质，对顶角的性质，直角三角形的性质，由折叠可得 $\angle B'=\angle B=90°$，$\angle MNB=\angle MNB'$，由对顶角相等得到 $\angle NPB'=70°$，根据直角三角形的性质得到 $\angle B'NP=20°$，进而可求出 $\angle BNM=100°$，即可求出 $\angle MNC$ 的度数，掌握折叠的性质是解题的关键.

【详解】解：由折叠可得，$\angle B'=\angle B=90°$，$\angle MNB=\angle MNB'$，

$\because \angle A'PC=70°$，

$\therefore \angle NPB'=70°$，

$\therefore \angle B'NP=90°-70°=20°$，

$\therefore 2\angle BNM=180°+20°$，

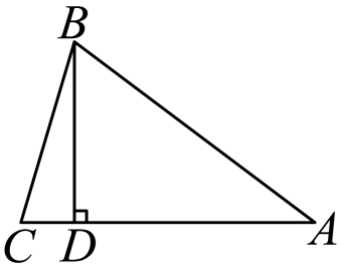
$\therefore \angle BNM=100°$，

$\therefore \angle MNC=180°-\angle BNM=180°-100°=80°$，

故选：D.

【变式训练】

1.（2023 上·辽宁大连·八年级统考期末）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=\angle ABC=2\angle A$，$BD$ 是 AC 边上的高，则 $\angle DBA$ 的度数是（　　）



A．18°　　B．36°　　C．54°　　D．72°

【答案】C

【分析】本题考查三角形中求角度，涉及三角形内角和定理、互余等知识，先由 $\angle C=\angle ABC=2\angle A$ 得到 $\angle A$，再由直角三角形两锐角互余即可得到答案，熟练掌握等腰三角形性质是解决问题的关键.

【详解】解：在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=\angle ABC=2\angle A$，

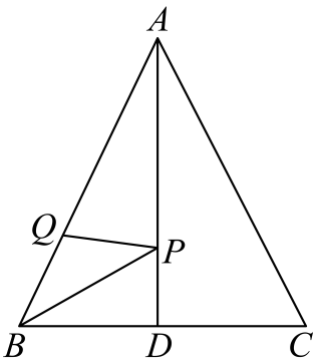
$\therefore \angle A+2\angle A+2\angle A=180°$，解得 $\angle A=36°$，

$\because$ BD 是 AC 边上的高，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$\angle DBA=90°-\angle A=90°-36°=54°$，

故选：C.

2.（2024 上·安徽阜阳·八年级统考期末）如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC=13$，$BC=10$，$AD=12$，AD是边BC上的中线.



（1）若$\angle C=m°$，则$\angle BAD$的度数是_____；（用含 m 的式子表示）

（2）若点 P 是线段 AD 上的一个动点，点 Q 为线段 AB 上的一个动点，则$PB+PQ$的最小值是_____.

【答案】 $90°-m°$ $\frac{120}{13}$ / $9\frac{3}{13}$

【分析】本题主要考查了三线合一定理，直角三角形的性质，轴对称最短路径问题：

（1）根据三线合一定理得到$\angle BAD=\angle CAD$，$AD\perp BC$，再根据直角三角形两锐角互余可得$\angle BAD=\angle CAD=90°-m°$；

（2）连接PC，过点 C 作$CQ'\perp AB$于点Q'，由对称性得到$PC=PB$，则当 C，P，Q 三点共线且$CQ\perp AB$时，$PB+PQ$的值最小，即为CQ'的长．；利用等面积法求出$CQ'=\frac{BC\cdot AD}{AB}=\frac{120}{13}$，则$PB+PQ$的最小值是$\frac{120}{13}$.

【详解】解：（1）$\because \triangle ABC$是等腰三角形，$AB=AC=13$，AD是边BC上的中线，

$\therefore \angle BAD=\angle CAD$，$AD\perp BC$，

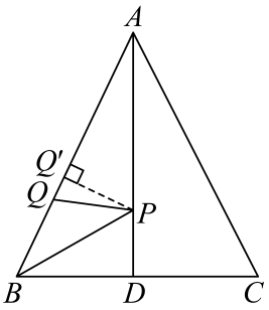
$\therefore \angle ADC=90°$，

$\because \angle C=m°$，

$\therefore \angle BAD=\angle CAD=90°-m°$，

故答案为：$90°-m°$；

（2）如图，连接PC，过点 C 作$CQ'\perp AB$于点Q'.



∵ AD 所在直线是等腰三角形 ABC 的对称轴，

∴ $PC=PB$，

∴ $PB+PQ=PC+PQ$，

∴ 当 C，P，Q 三点共线且 $CQ\perp AB$ 时， $PB+PQ$ 的值最小，即为 CQ' 的长.

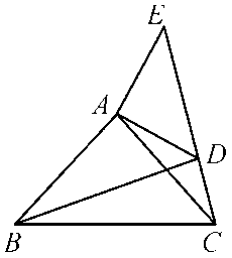
∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}AB\cdot CQ'$，

∴ $CQ'=\frac{BC\cdot AD}{AB}=\frac{10\times12}{13}=\frac{120}{13}$，

∴ $PB+PQ$ 的最小值是 $\frac{120}{13}$，

故答案为： $\frac{120}{13}$.

3.（2014·山东泰安·统考一模）已知：如图，在 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ 中，$\angle BAC=\angle DAE=90°$，$AB=AC$，$AD=AE$，点 C、D、E 三点在同一直线上，连接 BD .



(1)求证：$\triangle BAD\cong\triangle CAE$；

(2)试猜想 BD 、 CE 有何特殊位置关系，并证明.

【答案】(1)见详解

(2) $BD\perp EC$，证明见详解

【分析】本题考查全等三角形的判定与性质，直角三角形的两锐角互余等知识.

（1）先证明 $\angle BAD=\angle CAE$，再根据“边角边”即可证明 $\triangle BAD\cong\triangle CAE$；

（2）根据 $\angle DAE=90°$ 得到 $\angle E+\angle ADE=90°$，根据 $\triangle BAD\cong\triangle CAE$ 得到 $\angle BDA=\angle E$，即可证明 $\angle BDE=90°$，问题得证.

【详解】（1）证明：$\because \angle BAC=\angle DAE=90°$，

$\therefore \angle BAC+\angle CAD=\angle DAE+\angle CAD$，

即 $\angle BAD=\angle CAE$.

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAE$ 中，$\begin{cases} BA=CA \\ \angle BAD=\angle CAE \\ DA=EA \end{cases}$，

$\therefore \triangle BAD\cong\triangle CAE$；

（2）解：$BD\perp EC$.

证明：$\because \angle DAE=90°$，

$\therefore \angle E+\angle ADE=90°$.

$\because \triangle BAD\cong\triangle CAE$，

$\therefore \angle BDA=\angle E$，

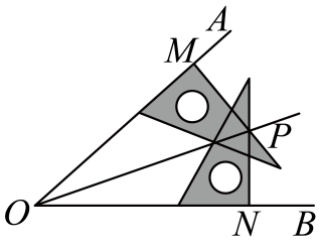
$\therefore \angle BDA+\angle ADE=90°$，

即 $\angle BDE=90°$，

$\therefore BD\perp EC$.

【经典例题二 用 HL 证全等】

【例 2】（2023 上·福建泉州·八年级校考期中）如图，用三角尺可以画角平分线：在已知 $\angle AOB$ 的两边上分别取点 M，N，使 $OM=ON$，再过点 M 画 OA 的垂线，过点 N 画 OB 的垂线，两垂线交于点 P，画射线 OP. 可以得到 $\triangle OMP\cong\triangle ONP$，所以 $\angle AOP=\angle BOP$，那么射线 OP 就是 $\angle AOB$ 的平分线. $\triangle OMP\cong\triangle ONP$ 的依据是（　）



A．SAS　　B．ASA　　C．HL　　D．SSS

【答案】C

【分析】本题考查全等三角形的判定和性质，角平分线的判定等知识，根据直角三角形全等的判定 HL 定理，可证 $\triangle OPM \cong \triangle OPN$，解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题.

【详解】由题意知 $OM = ON$，$\angle OMP = \angle ONP = 90°$，$OP = OP$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OMP$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ONP$ 中，$\begin{cases} OM = ON \\ OP = OP \end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle OMP \cong \mathrm{Rt}\triangle ONP(\mathrm{HL})$，

$\therefore \angle AOP = \angle BOP$，

故选：C.

【变式训练】

1.（2023 下·广东深圳·八年级统考期末）在课堂上，陈老师发给每人一张印有 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$（如图 1）的卡片，然后要求同学们画一个 $\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$，使得 $\mathrm{Rt}\triangle A'B'C' \cong \mathrm{Rt}\triangle ABC$. 小赵和小刘同学先画出了 $\angle MB'N = 90°$ 之后，后续画图的主要过程分别如图所示.

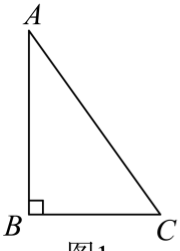
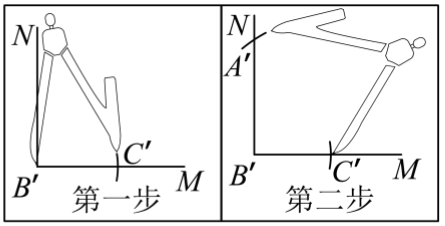
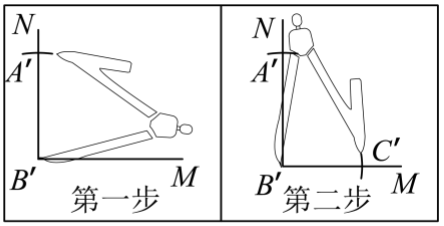


图1



小赵同学



小刘同学

对这两种画法的描述中正确的是（　）

A．小赵同学作图判定 $\mathrm{Rt}\triangle A'B'C' \cong \mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的依据是 HL

B．小赵同学第二步作图时，用圆规截取的长度是线段 BC 的长

C．小刘同学作图判定 $\mathrm{Rt}\triangle A'B'C' \cong \mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的依据是 ASA

D．小刘同学第一步作图时，用圆规截取的长度是线段 AC 的长

【答案】A

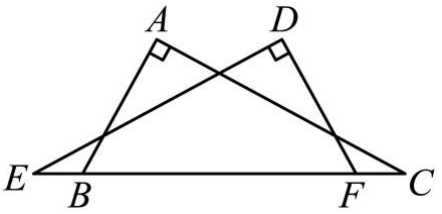
【分析】根据演示确定作图的具体步骤，结合全等的判定方法判断.

【详解】由图示知，小赵第一步为截取线段 $B'C' = BC$，第二步为作线段 $C'A' = CA$，判定方法为 HL；小刘第一步为截取线段 $B'A' = BA$，第二步为作线段 $B'C' = BC$，判定方法为 SAS.

故选：A.

【点睛】本题考查尺规作图，三角全等的判定，掌握一般三角全等、直角三角形全等的判定方法是解题的关键.

2.（2023 上·福建福州·八年级校考阶段练习）如图，E、B、F、C 在同一条直线上，若 $\angle D=\angle A=90°$，$EB=FC$，$AB=DF$．则 $\triangle ABC\cong\triangle DFE$ 全等的根据是_____．



【答案】HL

【分析】证出 $EF=BC$，由 HL 可证明 $\text{Rt}\triangle ABC\cong\text{Rt}\triangle DFE$．

【详解】解：$\because BE=FC$，

$\therefore BE+BF=FC+BF$，即 $EF=BC$，

$\because\angle A=\angle D=90°$，

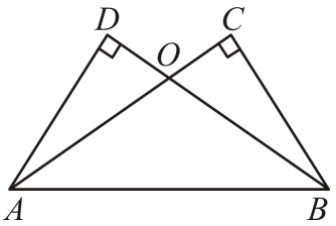
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle DFE$ 中，$\begin{cases}EF=CB\\AB=DF\end{cases}$，

$\therefore\text{Rt}\triangle ABC\cong\text{Rt}\triangle DFE(\text{HL})$，

故答案为：HL．

【点睛】本题考查全等三角形的判定，熟练掌握全等三角形的判定方法是解决问题的关键．

3.（2023 上·江苏无锡·八年级校联考期中）如图，已知 $AC\perp BC$，$BD\perp AD$，AC 与 BD 交于 O，AC=BD．



求证：

(1) BC=AD；

(2)$\triangle OAB$ 是等腰三角形；

(3)取 AB 中点 M，连接 DC，取 DC 中点 N，连接 MN，求证：$MN\perp DC$．

【答案】(1)见解析

(2)见解析

(3)见解析

【分析】本题主要考查了全等三角形的判定与性质以及等腰三角形的判定，熟练掌握全等三角形判定定理是解题关键.

（1）根据 $AC \perp BC$，$BD \perp AD$，得出 $\triangle ACB$ 和 $\triangle BDA$ 为直角三角形，利用 HL 定理得出 $\mathrm{Rt}\triangle ACB \cong \mathrm{Rt}\triangle BDA$，即可证出 $BC = AD$；

（2）根据 $\mathrm{Rt}\triangle ACB \cong \mathrm{Rt}\triangle BDA$，可得出 $\angle ABD = \angle BAC$，从而证出 $OA = OB$，再利用等腰三角形的判定得出即可；

（3）连接 DM，CM，分别证明 $\triangle ADM \cong \triangle BCM$，$\triangle DMN \cong \triangle CMN$，得 $\angle DNM = \angle CNM$，即可求证.

【详解】（1）$\because AC \perp BC$，$BD \perp AD$，

$\therefore \angle C = \angle D = 90°$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BDA$ 中，

$AB = BA$，$AC = BD$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ACB \cong \mathrm{Rt}\triangle BDA(\mathrm{HL})$，

$\therefore BC = AD$

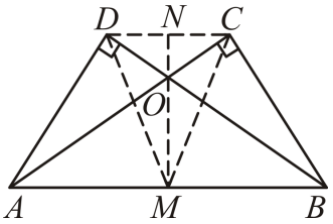
（2）由（1）$\mathrm{Rt}\triangle ACB \cong \mathrm{Rt}\triangle BDA$

$\therefore \angle ABD = \angle BAC$，

$\therefore OA = OB$，

$\therefore \triangle OAB$ 是等腰三角形；

（3）连接 DM，CM，



由（1）（2）得，$BC = AD$，$\angle ABC = \angle BAD$，

$\because$ M 是 AB 中点，

$\therefore AM = BM$，

在 $\triangle ADM$ 和 $\triangle BCM$ 中，$\begin{cases} AD = BC \\ \angle MAD = \angle MBC \\ AM = BM \end{cases}$

$\therefore \triangle ADM \cong \triangle BCM$，

$\therefore DM = CM$，

$\because$ N 是 DC 中点，

$\therefore DN = CN$，

在$\triangle DMN$和$\triangle CMN$中，$\begin{cases} DM = CM \\ DN = CN \\ MN = MN \end{cases}$

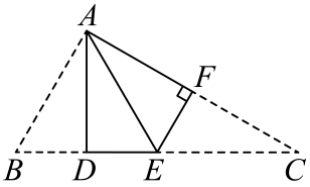
$\therefore \triangle DMN \cong \triangle CMN$，

$\therefore \angle DNM = \angle CNM$，

$\therefore MN \perp DC$.

【经典例题三 全等的性质与 HL 综合】

【例 3】（2024 上·安徽六安·八年级校考期末）如图，在$\triangle ABC$中，点 D、E 在 BC 边上，点 F 在 AC 边上，将 $\triangle ABD$ 沿着 AD 翻折，使点 B 和点 E 重合，将 $\triangle CEF$ 沿着 EF 翻折，点 C 恰与点 A 重合．结论：① $\angle BAC = 90°$；② $DE = EF$；③ $\angle B = 2\angle C$；④ $AB = EC$ 其中正确的有（　）



A．①②③④　　B．③④　　C．①②④　　D．①②③

【答案】B

【分析】本题考查翻折变换，等边三角形的判定，全等三角形的判定和性质，三角形内角和定理等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题.将 $\triangle ABD$ 沿着 AD 翻折，可得 $AB = AE$，$\angle B = \angle AEB$，将 $\triangle CEF$ 沿着 EF 翻折，可得 $AE = CE$，$\angle C = \angle CAE$，进而得到 $AB = CE$，$\angle AEB = \angle C + \angle CAE = 2\angle C$，从而判断①②正确，再假设③④成立，得到与题干条件矛盾，从而判断①②不一定正确.

【详解】解：$\because$将 $\triangle ABD$ 沿着 AD 翻折，使点 B 和点 E 重合，

$\therefore AB = AE$，$\angle B = \angle AEB$，

$\because$将 $\triangle CEF$ 沿着 EF 翻折，点 C 恰与点 A 重合，

$\therefore AE=CE$，$\angle C=\angle CAE$，

$\therefore AB=CE$，$\therefore$④正确；

$\because \angle AEB=\angle C+\angle CAE=2\angle C$，

$\therefore \angle B=2\angle C$，故③正确；

当$\angle BAC=90°$，则$\angle B+\angle C=3\angle C=90°$，

$\therefore \angle C=30°$，$\angle B$=60°，

$\therefore \triangle ABE$为等边三角形，与题干条件矛盾，故①不准确，

同理：当$DE=EF$，而$AE=AE$，$\angle ADE=\angle AFE=90°$，

则$\triangle ADE\cong\triangle AFE(\mathrm{HL})$，

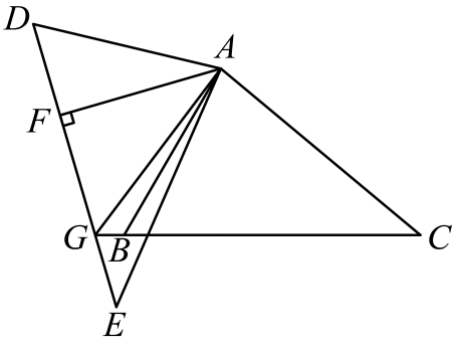
$\therefore \angle BAD=\angle EAD=\angle EAC$，

结合三角形的内角和可得：$\angle BAC=90°$，与题干条件矛盾，故②不准确，

故选：B.

【变式训练】

1.（2023 上·江苏连云港·八年级校考期中）如图，在$\triangle ADE$和$\triangle ABC$中，$\angle E=\angle C$，$DE=BC$，$AE=AC$，过A作$AF\perp DE$，垂足为F，DE交CB的延长线于点G，连接AG．四边形$DGBA$的面积为16，$AF=4$，则FG的长是（　）

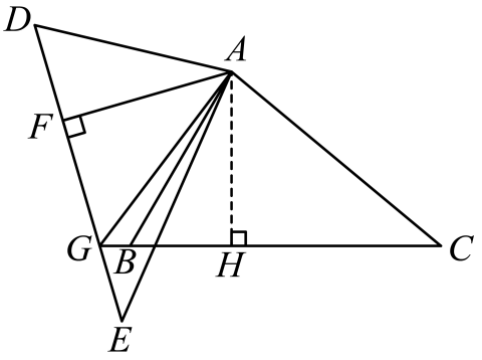


A．4　　B．$\frac{5}{2}$　　C．3　　D．$\frac{10}{3}$

【答案】A

【分析】本题考查了全等三角形的判定与性质以及三角形面积等知识．过点A作$AH\perp BC$于H，证$\triangle ABC\cong\triangle AED$，得$AF=AH$，再证$\mathrm{Rt}\triangle AFG\cong\mathrm{Rt}\triangle AHG$，同理$\mathrm{Rt}\triangle ADF\cong\mathrm{Rt}\triangle ABH$，得$S_{四边形DGBA}=16$，进而得到$FG$的长．

【详解】解：过点A作$AH \perp BC$于H，如图所示：



在$\triangle ABC$和$\triangle ADE$中，$\begin{cases} BC = DE \\ \angle C = \angle E \\ CA = EA \end{cases}$，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AED(\mathrm{SAS})$，

$\therefore AD = AB$，$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AED}$，

又$\because AF \perp DE$，

$\therefore \frac{1}{2} \times DE \times AF = \frac{1}{2} \times BC \times AH$，

$\therefore AF = AH$，

$\because AF \perp DE$，$AH \perp BC$，

$\therefore \angle AFG = \angle AHG = 90°$，

在$\mathrm{Rt}\triangle AFG$和$\mathrm{Rt}\triangle AHG$中，$\begin{cases} AG = AG \\ AF = AH \end{cases}$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AFG \cong \mathrm{Rt}\triangle AHG(\mathrm{HL})$，

同理：$\mathrm{Rt}\triangle ADF \cong \mathrm{Rt}\triangle ABH(\mathrm{HL})$，

$\therefore S_{四边形DGBA} = S_{四边形AFGH} = 16$，

$\because \mathrm{Rt}\triangle AFG \cong \mathrm{Rt}\triangle AHG$，

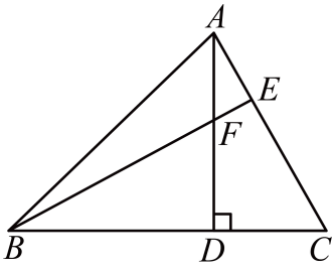
$\therefore S_{\mathrm{Rt}\triangle AFG} = 8$，

$\because AF = 4$，

$\therefore \frac{1}{2} \times FG \times 4 = 8$，解得：$FG = 4$；

故选：A.

2．（2023 上·浙江温州·八年级统考期中）如图，在$\triangle ABC$中，$AD \perp BC$于点D，在AD上取点F，使得$BF = AC = 10, DF = CD = 6$，连接$BF$并延长交$AC$于点$E$，则$BE =$_____.



【答案】$\frac{56}{5}$

【分析】此题考查了勾股定理，全等三角形的性质和判定等知识，首先根据勾股定理求出$AD=8$，然后证明出$Rt\triangle CDA \cong Rt\triangle FDB$，得到$\angle CAD = \angle FBD$，$BD = AD = 8$，再证明$BE \perp AC$，然后利用等面积法求出$BE = \frac{56}{5}$即可.

【详解】解：$\because AD \perp BC$，

$\therefore \angle CDA = \angle FDB = 90°$，

$\because AC = 10$，$CD = 6$，

$\therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = 8$，

$\because \angle CDA = \angle FDB = 90°$，$CD = FD$，$AC = BF$，

$\therefore Rt\triangle CDA \cong Rt\triangle FDB(HL)$，

$\therefore \angle CAD = \angle FBD$，$BD = AD = 8$，

$\therefore BC = BD + CD = 14$，

$\because \angle CAD + \angle C = 90°$，

$\therefore \angle FBD + \angle C = 90°$，

$\therefore \angle BEC = 90°$，

$\therefore BE \perp AC$，

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BE = \frac{1}{2} BC \cdot AD$，

$\therefore 10BE = 14 \times 8$，解得$BE = \frac{56}{5}$，

故答案为：$\frac{56}{5}$.

3.（2024 上·湖北武汉·八年级统考期末）（1）如图 1，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=\alpha\left(0°<\alpha<180°\right)$，$CD$ 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于 D，过 C 点作 DC 的垂线交 AB 的垂直平分线于 M，连 AM，N 在 AC 的延长线上．求证：CM 平分 $\angle BCN$；

（2）把（1）中的“CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 手 D”换成“CD 平分 $\angle ACB$ 的外角 $\angle ACF$ 交直线 AB 于 D”，其他条件不变，请在图 2 中补全图形，并直接写出 $\angle BAM$ 的度数_____；（用含 α 的式子表示）

（3）在（1）的条件下；若 $\alpha=90°$（如图 3），且 $BC=2AC=10$，作 $MH\perp BC$ 于 H，求 MH 的长度．

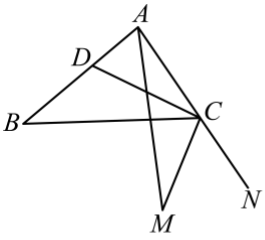


图1

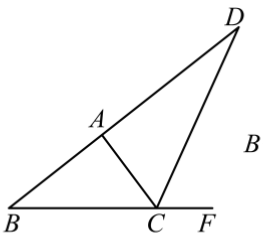


图2

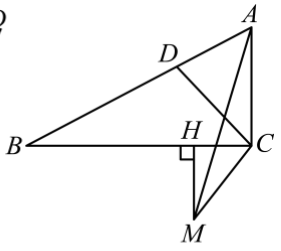


图3

【答案】（1）见解析；（2）补全图形见解析，$\frac{1}{2}\alpha$ （3）2.5

【分析】本题考查的是三角形全等的判定和性质、角平分线的性质、三角形内角和定理．

（1）根据垂直的定义得到 $\angle DCM=90°$，根据角平分线的定义得到 $\angle ACD=\angle BCD$，得到 $\angle NCM=\angle BCM$；

（2）连接 MA、MB，过点 M 作 $ME\perp BC$ 于 E，$MH\perp CA$ 交 CA 的延长线于 H，根据题意得到 $\angle HME=180°-\alpha$，证明 $\mathrm{Rt}\triangle BME\cong\mathrm{Rt}\triangle AMH$，得到 $\angle BME=\angle AMH$，根据等腰三角形的性质计算，得到答案；

（3）连接 MB，过点 M 作 $ME\perp AC$ 交 AC 的延长线于 E，根据角平分线的性质得到 $MH=ME$，证明 $\mathrm{Rt}\triangle BHM\cong\mathrm{Rt}\triangle AEM$，得到 $AE=BH$，根据题意列式计算即可．

【详解】解：（1）证明：$\because DC\perp CM$，

$\therefore\angle DCM=90°$，

$\therefore\angle DCB+\angle BCM=90°$，$\angle ACD+\angle NCM=90°$，

$\because CD$ 平分 $\angle ACB$，

$\therefore\angle ACD=\angle BCD$，

$\therefore\angle NCM=\angle BCM$，即 CM 平分 $\angle BCN$；

（2）解：如图 2，连接 MA、MB，过点 M 作 $ME\perp BC$ 于 E，$MH\perp CA$ 交 CA 的延长线于 H，

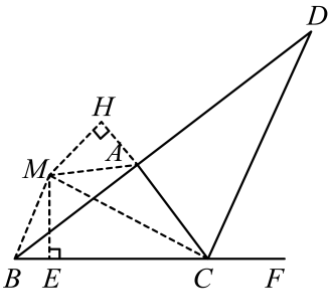


图2

则 $\angle HME=180°-\alpha$，

由（1）可知：$\angle ACM=\angle BCM$，

$\because ME\perp BC$，$MH\perp CA$，

$\therefore ME=MH$，

∵点 M 在 AB 的垂直平分线上，

$\therefore MB=MA$，

在 $Rt\triangle BME$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle AMH$ 中，$\begin{cases}MB=MA\\ME=MH\end{cases}$，

$\therefore \mathrm{Rt}\square BME\cong\mathrm{Rt}\square AMH(\mathrm{HL})$，

$\therefore \angle BME=\angle AMH$，

$\therefore \angle BMA=\angle EMH=180°-\alpha$，

$\because MB=MA$，

$\therefore \angle BAM=\frac{1}{2}(180°-180°+\alpha)=\frac{1}{2}\alpha$，

故答案为：$\frac{1}{2}\alpha$；

（3）解：如图 3，连接 MB，过点 M 作 $ME\perp AC$ 交 AC 的延长线于 E，

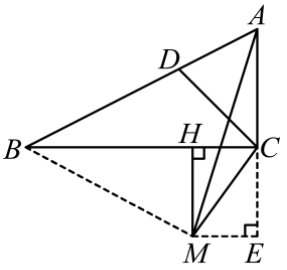


图3

$\because \angle ACB=\alpha=90°$，$CD$ 平分 $\angle ACB$，

$\therefore \angle ACD=\angle BCD=45°$，

$\because CD \perp CM$，

$\therefore \angle MCH = \angle MCE = 45°$，

$\because MH \perp BC$，$ME \perp AC$，

$\therefore MH = ME$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BHM$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle AEM$ 中，$\begin{cases} MH = EM \\ MB = AM \end{cases}$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BHM \cong \mathrm{Rt}\triangle AEM(\mathrm{HL})$，

$\therefore AE = BH$，

$\therefore 10 - MH = 5 + MH$，

解得：$MH = 2.5$.

【经典例题四 判断三边能否构成直角三角形】

【例 4】（2024 上·山东泰安·七年级统考期末）已知$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边的长分别是a、b、c，根据下列条件不能判定$\triangle ABC$为直角三角形的是（　）

A．$\angle A:\angle B:\angle C = 3:4:5$　　B．$\angle A = \angle C - \angle B$

C．$a = 10, b = 24, c = 26$　　D．$(a+b)(a-b) = c^2$

【答案】A

【分析】本题主要考查了三角形内角和定理以及勾股定理逆定理等知识，根据三角形内角和定理以及勾股定理逆定理分析判断即可求出答案.

【详解】解：A.由题意，$\angle C = \frac{5}{12} \times 180° = 75°$，

$\therefore \triangle ABC$是锐角三角形，本选项符合题意.

B.$\because \angle A = \angle C - \angle B$，$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$，

$\therefore \angle C = 90°$，

$\therefore \triangle ABC$是直角三角形，本选项不符合题意.

C.$\because a = 10, b = 24, c = 26$，

$\therefore a^2 + b^2 = c^2$，

$\therefore \angle C = 90°$，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，本选项不符合题意．

D．$\because (b+c)(b-c)=a^2$，

$\therefore b^2-c^2=a^2$，

$\therefore b^2=a^2+c^2$，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，本选项不符合题意．

故选：A．

【变式训练】

1．（2024 上·上海闵行·八年级统考期末）在 $\triangle ABC$ 中，a、b、c 分别为 $\angle A$，$\angle B$ 和 $\angle C$ 的对边，在下列条件中，无法判定 $\triangle ABC$ 为直角三角形的是（　）

A．$\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$　　B．$b^2=a^2-c^2$

C．$\angle C=\angle A-\angle B$　　D．$a:b:c=12:13:5$

【答案】A

【分析】此题考查了直角三角形的判定，根据三角形的内角和，勾股定理逆定理即可，解题的关键是熟练掌握勾股定理逆定理及三角形的内角和定理的应用．

【详解】A 、设三角形的三角分别为 $3x°$，$4x°$，$5x°$，$3x+4x+5x=180$，解得：$x=15$，

$\therefore \angle A=15°\times 3=45°$，$\angle B=15°\times 4=60°$，$\angle C=15°\times 5=75°$，

$\therefore \triangle ABC$ 不是直角三角形，此选项符合题意；

B 、$\because b^2=a^2-c^2$，

$\therefore a^2=b^2+c^2$，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，此选项不符合题意；

C 、由 $\angle C=\angle A-\angle B$ 得，$\angle A=\angle C+\angle B=12\times 180°=90°$，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，此选项不符合题意；

D 、由 $a:b:c=12:13:5$，设 $a=12k$，$b=13k$，$c=5k$，则 $a^2+c^2=(12k)^2+(5k)^2=169k^2=b^2$，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，此选项不符合题意；

故选：A．

2．（2022 上·四川成都·八年级成都嘉祥外国语学校校考期末）在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°,\angle A,\angle B,\angle C$的对边分别为$a$、$b$、$c$，下列条件中：①$a^2:b^2:c^2=1:2:3$；②$(a+b)(a-b)=c^2$；③$\angle A:\angle B:\angle C=1:1:2$；④$a=9,b=40,c=41$．能判断$\triangle ABC$是符合条件的直角三角形的有_____个．

【答案】3

【分析】本题主要考查了勾股定理的逆定理以及三角形内角和定理．根据勾股定理的逆定理以及三角形内角和定理，逐项判断即可．

【详解】解：①由题意知，$a^2+b^2=c^2$，则$\triangle ABC$是符合条件的直角三角形，符合题意；

②由题意知，$c^2+b^2=a^2$，则$\triangle ABC$是直角三角形，但不是符合$\angle C=90°$的条件形，故不符合题意；

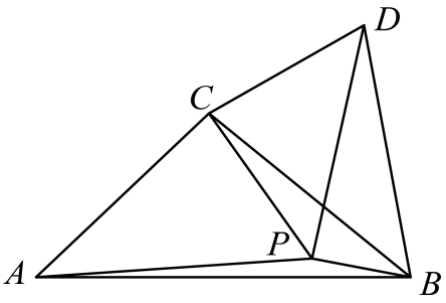
③由题意知$\angle A=45°,\angle B=45°,\angle C=90°$，则$\triangle ABC$是符合条件的直角三角形，符合题意；

④由题意知$a^2+b^2=c^2$，则$\triangle ABC$是符合条件的直角三角形，符合题意；

即符合要求的只有 3 个，

故答案为：3．

3．（2024 上·山东淄博·七年级校联考期末）如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，P是$\triangle ABC$内一点，且$PA=3$，$PB=1$，$PC=CD=2$，$CD\perp PC$．



(1)$\triangle CAP$与$\triangle CBD$全等吗？请说明理由；

(2)求$\angle BPC$的度数．

【答案】(1)$\triangle CAP$与$\triangle CBD$全等，理由见解析

(2)$135°$

【分析】本题考查全等三角形的判定和性质，勾股定理逆定理．

（1）根据SAS证明$\triangle CAP$与$\triangle CBD$全等即可；

（2）利用勾股定理的逆定理得出$\triangle PDB$是直角三角形，进而解答即可．

【详解】（1）解：$\triangle CAP$ 与 $\triangle CBD$ 全等，理由如下：

$\because \angle ACB=90°$，$CD\perp PC$，

$\therefore \angle ACB=\angle PCD=90°$，

$\therefore \angle ACP=\angle BCD$，

在 $\triangle CAP$ 与 $\triangle CBD$ 中，$\begin{cases}AC=BC\\ \angle ACP=\angle BCD\\ PC=CD\end{cases}$，

$\therefore \triangle CAP\cong\triangle CBD(\mathrm{SAS})$；

（2）解：$\because \triangle CAP\cong\triangle CBD$，

$\therefore PA=BD=3$，

$\because PC=CD=2$，$CD\perp PC$，

$\therefore DP=\sqrt{PC^2+CD^2}=2\sqrt{2}$，$\angle CPD=45°$，

$\therefore DP^2=8=BD^2-PB^2=3^2-1^2=8$，

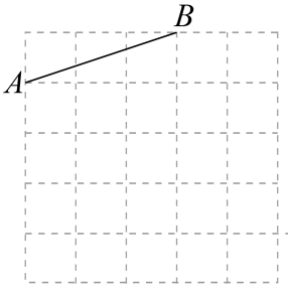
$\therefore \triangle BDP$ 是直角三角形，

$\therefore \angle DPB=90°$，

$\therefore \angle BPC=\angle DPB+\angle CPD=135°$.

【经典例题五 图形上与已知两点构成直角三角形的点】

【例 5】（2023 下·浙江台州·八年级校考期中）在如图所示的 5×5 的方格图中，点 A 和点 B 均为图中格点．点 C 也在格点上，满足 $\triangle ABC$ 为以 AB 为斜边的直角三角形．这样的点 C 有（　　）



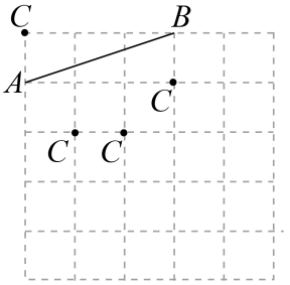
A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

【答案】D

【分析】结合网格的性质和直角三角形的判定找到对应点即可.

【详解】解：如图，满足条件的点 C 共有 4 个，

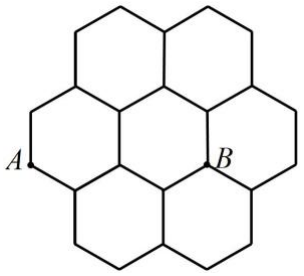
故选 D.



【点睛】此题主要考查了勾股定理逆定理，正确进行讨论，把每种情况考虑全，是解决本题的关键.

【变式训练】

1.（2022·河北承德·统考二模）如图，在由边长为 1 的 7 个正六边形组成的网格中，点 A，B 在格点上．若再选择一个格点 C，使$\triangle ABC$ 是直角三角形，且每个直角三角形边长均大于 1，则符合条件的格点 C 的个数是（　）

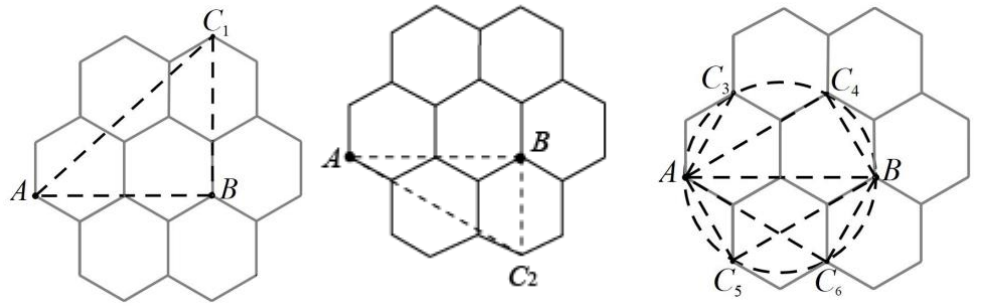


A．2　　B．4　　C．5　　D．6

【答案】D

【分析】分三种情况讨论，当∠A=90°，或∠B=90°，或∠C=90°时，分别画出符合条件的图形，即可解答.

【详解】解：分三种情况讨论，当∠A=90°，或∠B=90°，或∠C=90°如图



符合条件的格点 C 的个数是 6 个

故选：D.

【点睛】本题考查正多边形和圆的性质、直角三角形的判定与性质、直径所对的圆周角是 90°等知识，是基础考点，掌握相关知识是解题关键.

2.（2021 上·江西九江·八年级统考期末）已知在平面直角坐标系中 A（$-2\sqrt{3}$，0）、B（2，0）、C（0，2）．点 P 在 x 轴上运动，当点 P 与点 A、B、C 三点中任意两点构成直角三角形时，点 P 的坐标为_____.

【答案】（0，0），（$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，0），（-2，0）

【分析】因为点 P、A、B 在 x 轴上，所以 P、A、B 三点不能构成三角形．再分 Rt△PAC 和 Tt△PBC 两种情况进行分析即可.

【详解】解：∵点 P、A、B 在 x 轴上，

∴P、A、B 三点不能构成三角形.

设点 P 的坐标为（m，0）.

当△PAC 为直角三角形时，

①∠APC＝90°，易知点 P 在原点处坐标为（0，0）；

②∠ACP＝90°时，如图，

∵∠ACP＝90°

∴AC2＋PC2＝AP2，

$\therefore (2\sqrt{3})^2+2^2+m^2+2^2=(m+2\sqrt{3})^2$，

解得，m＝$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

∴点 P 的坐标为（$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，0）；

当△PBC 为直角三角形时，

①∠BPC＝90°，易知点 P 在原点处坐标为（0，0）；

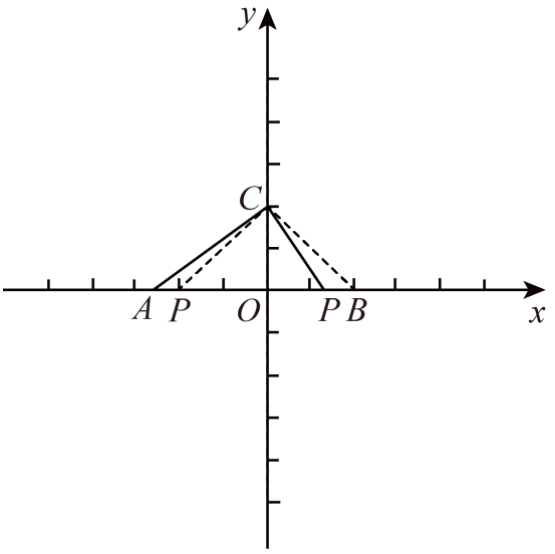
②∠BCP＝90°时，

∵∠BCP＝90°，CO⊥PB，

∴PO＝BO＝2，

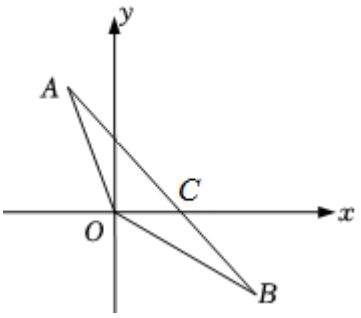
∴点 P 的坐标为（-2，0）.

综上所述点 P 的坐标为（0，0），（$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，0），（-2，0）.



【点睛】本题考查了勾股定理及其逆定理，涉及到了数形结合和分类讨论思想．解题的关键是不重复不遗漏的进行分类．

3．（2022 上·云南文山·八年级统考期末）如图，在平面直角坐标系中，直线 AB：$y=-\frac{5}{4}x+\frac{7}{4}$ 与 x 轴交于点 C，且点 $A(-1,m)$，$B(n,-2)$．



(1)点 C 的坐标为

(2)求原点 O 到直线 AB 的距离；

(3)在 x 轴上是否存在一点 P，使得 $\triangle ACP$ 是直角三角形?若存在，求出点 P 的坐标.

【答案】(1)$\left(\frac{7}{5},0\right)$；

(2)$\frac{7\sqrt{41}}{41}$；

(3)存在，点 P 的坐标为 $(-1,0)$ 或 $\left(-\frac{19}{4},0\right)$

【分析】(1)令$y=0$，即可求解；

(2)首先可求得点 A、B 的坐标，根据两点间距离公式可求得AB的长，再根据$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{7}{2}$，设原点$O$到直线$AB$的距离为$d$，列方程即可求解；

(3)设点P的坐标为$(x,0)$，根据题意可知$\angle ACP$不为直角，分两种情况，利用勾股定理即可求解.

【详解】（1）解：令$y=0$，则$y=-\frac{5}{4}x+\frac{7}{4}=0$，

解得：$x=\frac{7}{5}$，

所以点C的坐标为$\left(\frac{7}{5},0\right)$；

（2）解：代入 A、B两点可得：$m=\frac{5}{4}+\frac{7}{4}$，$-2=-\frac{5}{4}n+\frac{7}{4}$，

解得：$m=3$，$n=3$，

故$A(-1,3)$，$B(3,-2)$，

$\therefore AB=\sqrt{(3+1)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{41}$，

$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times\frac{7}{5}\times(3+2)=\frac{7}{2}$，

设原点O到直线AB的距离为d，

则$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}AB\cdot d=\frac{1}{2}\times\sqrt{41}\times d=\frac{7}{2}$，

解得：$d=\frac{7}{\sqrt{41}}=\frac{7\sqrt{41}}{41}$，

故原点O到直线AB的距离为$\frac{7\sqrt{41}}{41}$；

（3）解：存在，

设点P的坐标为$(x,0)$，根据题意可知$\angle ACP$不为直角，

所以当$\triangle ACP$是直角三角形分两种情况：

①当$\angle APC=90°$时，此时点P的坐标为$(-1,0)$；

②当$\angle PAC=90°$，$AC^2+AP^2=CP^2$，

故$\left(\frac{7}{5}+1\right)^2+3^2+(x+1)^2+3^2=\left(\frac{7}{5}-x\right)^2$，

解得：$x=-\frac{19}{4}$，

此时点P的坐标为$\left(-\frac{19}{4},0\right)$；

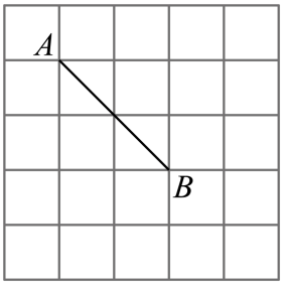
综上所述，满足条件的点P的坐标为$(-1,0)$或$\left(-\frac{19}{4},0\right)$.

【点睛】本题考查了两点间距离公式，坐标与图形，求不规则图形的面积，直角三角形的判定，解答的关键是采用分类讨论的思想.



【经典例题六 在网格中判断直角三角形】

【例 6】（2023 下·河南郑州·八年级校联考期末）如图，在5×5的正方形网格中，以AB为边画直角$\triangle ABC$，使点C在格点上，满足这样条件的点C的个数是（　　）



A．4　　B．6　　C．8　　D．10

【答案】C

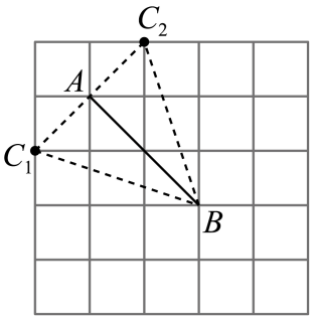
【分析】根据题意，根据格点作图方法以及勾股定理逆定理进行分类讨论①当$\angle BAC=90°$时，②当$\angle ABC=90°$时，③当$\angle ACB=90°$时，即可进行解答.

【详解】解：①当$\angle BAC=90°$时，如图，可作出 2 个点 C，

$\because AB^2=2^2+2^2=8$，$AC^2=1^2+1^2=2$，$BC^2=1^2+3^2=10$，

$\therefore AC^2+AB^2=BC^2$，

$\therefore \triangle ABC_1,\triangle ABC_2$为直角三角形；



②当$\angle ABC=90°$时，如图，可作出 4 个点 C，

$\because AB^2=2^2+2^2=8$，$AC_4^{\ 2}=AC_5^{\ 2}=1^2+3^2=10$，$BC_4^{\ 2}=BC_5^{\ 2}=1^2+1^2=2$，

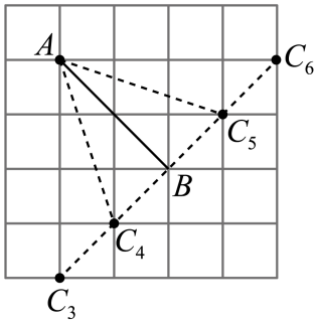
$\therefore BC_4^{\ 2}+AB^2=AC_4^{\ 2}, BC_5^{\ 2}+AB^2=AC_5^{\ 2}$，

$\therefore \triangle ABC_4, \triangle ABC_5$为直角三角形；

$\because AB^2=2^2+2^2=8$，$AC_3^{\ 2}=AC_6^{\ 2}=4^2=16$，$BC_3^{\ 2}=BC_6^{\ 2}=2^2+2^2=8$，

$\therefore BC_3^{\ 2}+AB^2=AC_3^{\ 2}, BC_6^{\ 2}+AB^2=AC_6^{\ 2}$，

$\therefore \triangle ABC_3, \triangle ABC_6$为直角三角形；

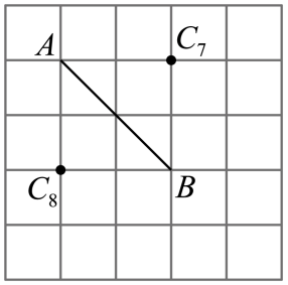


③当$\angle ACB=90°$，如图，可作出 2 个点 C，

$\because AB^2=2^2+2^2=8$，$AC_7^{\ 2}=AC_8^{\ 2}=BC_7^{\ 2}=BC_8^{\ 2}=2^2=4$，$BC_3^{\ 2}=BC_6^{\ 2}=2^2+2^2=8$，

$\therefore BC_7^{\ 2}+AC_7^{\ 2}+AB^2, BC_8^{\ 2}+AC_8^{\ 2}=AB^2$，

$\therefore \triangle ABC_7, \triangle ABC_8$为直角三角形；



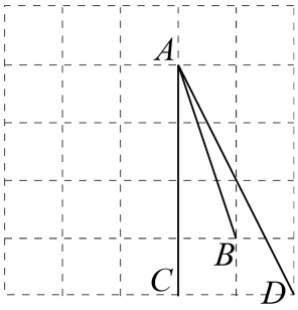
综上:以 AB 为边画直角$\triangle ABC$，使点 C 在格点上，满足这样条件的点 C 共 8 个.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了直角三角形的性质，格点作图，勾股定理逆定理，解题的关键是熟练掌握格点作图方法和勾股定理定理，解题时要注意找出所有符合条件的点.

【变式训练】

1.（2023 下·安徽合肥·八年级合肥市第四十五中学校考期中）如图，在正方形网格内，A、B、C、D 四点都在小方格的格点上，则 $\angle BAC+\angle DAC=$（　）

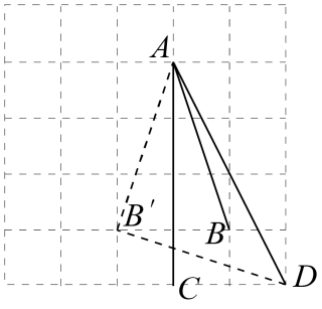


A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．75°

【答案】B

【分析】作 B 关于 AC 的对称点 B'，连接 $B'A'$，$B'D$，则 $\angle BAC=\angle B'AC$，在网格中运用勾股定理得到线段长，进而证明 $\triangle AB'D$ 是等腰直角三角形，得到 $\angle B'AD=45^\circ$，即 $\angle BAC+\angle DAC=45^\circ$.

【详解】解：作 B 关于 AC 的对称点 B'，连接 $B'A'$，$B'D$，如图所示：



$\therefore \angle BAC=\angle B'AC$，

$\because B'A=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，$B'D=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，$AD=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，

$\therefore AB'=B'D$，$B'A^2+B'D^2=AD^2$，

$\therefore \triangle AB'D$ 是等腰直角三角形，

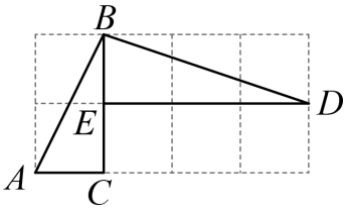
$\therefore \angle B'AD=45^\circ$，

$\therefore \angle BAC+\angle DAC=\angle B'AC+\angle DAC=\angle B'AD=45°$，

故选：B．

【点睛】本题考查网格中求角度问题，涉及勾股定理、勾股定理逆定理、等腰直角三角形的判定与性质等知识，熟练掌握等腰直角三角形的判定与性质是解决问题的关键．

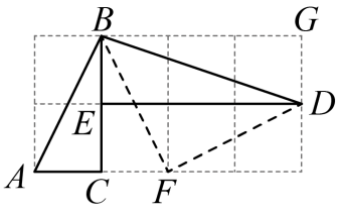
2．（2024 上·福建泉州·八年级统考期末）如图是2×4正方形网格图，点A、B、C、D、E都是格点，则$\angle BAC-\angle BDE=$_____°．



【答案】45

【分析】连接BF、DF，根据等腰三角形性质得出$\angle BAC=\angle BFC$，根据平行线的性质得出$\angle GBF=\angle BFC$，证明$\angle BAC=\angle GBF$，说明$\triangle BFD$为直角三角形，$\angle BFD=90°$，得出$\angle DBF=\angle BDF=\frac{1}{2}\times90°=45°$，根据平行线的性质得出$\angle GBD=\angle BDE$，得出$\angle BAC-\angle BDE=\angle GBF-\angle GBD=\angle DBF=45°$即可．

【详解】解：连接BF、DF如图所示：



$\because AB=BF=DF=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore \angle BAC=\angle BFC$，

$\because BG\ //\ AF$，

$\therefore \angle GBF=\angle BFC$，

$\therefore \angle BAC=\angle GBF$，

$\because BD=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，

$\therefore BD^2=BF^2+DF^2$，

$\therefore \triangle BFD$为直角三角形，$\angle BFD=90°$，

$\therefore \angle DBF = \angle BDF = \frac{1}{2} \times 90° = 45°$，

$\because ED // BG$，

$\therefore \angle GBD = \angle BDE$，

$\therefore \angle BAC - \angle BDE = \angle GBF - \angle GBD = \angle DBF = 45°$.

故答案为：45.

【点睛】本题主要考查了网格与勾股定理，勾股定理的逆定理，等腰三角形的性质，平行线的性质，解题的关键是作出辅助线，熟练掌握相关的性质.

3.（2024 上·浙江宁波·七年级校联考期末）如图是由边长为 1 的小正方形拼成的 4×8 网格图，请按要求画图：

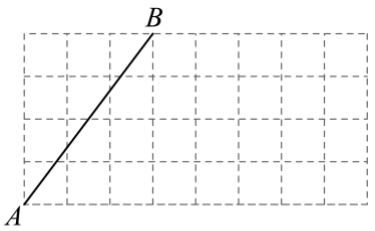


图1

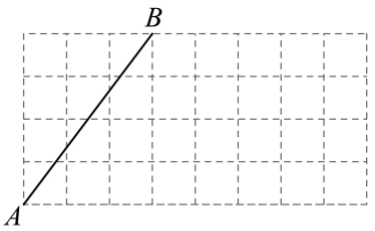


图2

(1)在图 1 中画一个钝角的等腰三角形 ABC，要求顶点 C 是格点；

(2)在图 2 中画一个等腰直角三角形 ABD，要求顶点 D 是格点；

【答案】(1)见解析

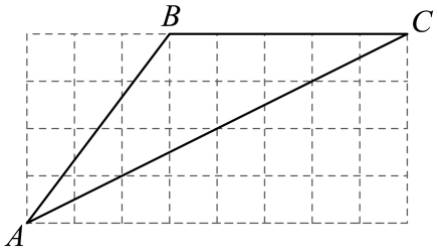
(2)见解析

【分析】本题考查了作图的应用与设计，掌握网格线的特征及等腰三角形的判定，勾股定理及其逆定理是解题的关键.

（1）根据网格线的特征及等腰三角形的判断作图；

（2）根据网格线的特征、勾股定理及等腰直角三角形的判断作图.

【详解】（1）解：如图所示，点 C 即为所求；



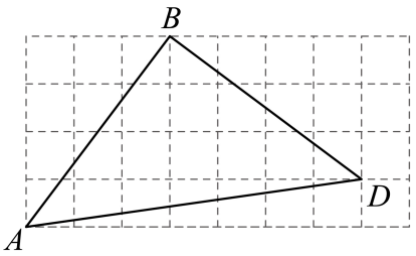
$\because AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$，$BC = 5$

$\therefore AB = BC$

$\because 90°<\angle ABC<180°$

$\therefore \triangle ABC$ 为钝角等腰三角形.

（2）解：如图所示，点 D 即为所求；



$\because AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$BD=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\therefore AB=BD$，$AB^2+BD^2=50$

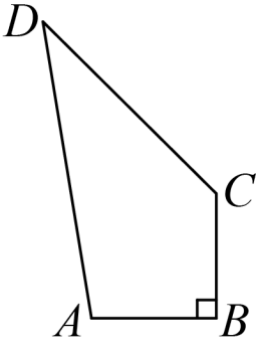
$\because AD^2=7^2+1^2=50$

$\therefore AB^2+BD^2=AD^2$

$\therefore \triangle ABD$ 为等腰直角三角形.

【经典例题七 利用勾股定理的逆定理求解】

【例 7】（2022 上·四川南充·九年级校考阶段练习）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=2$，$CD=4$，$DA=2\sqrt{6}$，且 $\angle ABC=90°$，则四边形 $ABCD$ 的面积是（　　）

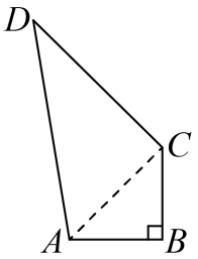


A．4　　B．$1+2\sqrt{2}$　　C．$2+4\sqrt{2}$　　D．$1+\sqrt{2}$

【答案】C

【分析】连接 AC，根据勾股定理可得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2\sqrt{2}$，再由勾股定理的逆定理可得 $\angle ACD=90°$，再根据四边形 $ABCD$ 的面积等于 $S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ACB}$，即可求解.

【详解】解：如图，连接AC，



在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$，$AB=2$，$BC=2$，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2\sqrt{2}$，

$\because CD=4$，$DA=2\sqrt{6}$，

$\therefore AC^2+CD^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+4^2=24=\left(2\sqrt{6}\right)^2=DA^2$，

$\therefore \angle ACD=90°$，

$\therefore$四边形$ABCD$的面积是$S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ACB}=\frac{1}{2}CD\cdot AC+\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{2}+\frac{1}{2}\times2\times2=2+4\sqrt{2}$．

故选：C．

【点睛】本题主要考查了勾股定理及其逆定理的应用，熟练掌握勾股定理及其逆定理是解题的关键．

【变式训练】

1．（2023上·浙江嘉兴·九年级校考开学考试）已知$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，且满足$a^2+\sqrt{b-\frac{1}{4}}+\left|c-\frac{\sqrt{17}}{4}\right|-2a+1=0$，则$\triangle ABC$的面积为（　　）

A．$\frac{1}{7}$　　B．$\frac{1}{8}$　　C．$\frac{1}{9}$　　D．$\frac{1}{10}$

【答案】B

【分析】根据平方的非负性，算术平方根的非负性，绝对值的非负性，即可求出$a=1$，$b=\frac{1}{4}$，$c=\frac{\sqrt{17}}{4}$，从而可得出$a^2+b^2=c^2$，即证明$\triangle ABC$为直角三角形，且a，b为直角边，最后根据三角形面积公式求解即可．

【详解】解：$\because a^2+\sqrt{b-\frac{1}{4}}+\left|c-\frac{\sqrt{17}}{4}\right|-2a+1=0$，

$\therefore (a-1)^2+\sqrt{b-\frac{1}{4}}+\left|c-\frac{\sqrt{17}}{4}\right|=0$，

$\therefore a-1=0,\ b-\frac{1}{4}=0,\ c-\frac{\sqrt{17}}{4}=0$，

解得：$a=1,\ b=\frac{1}{4},\ c=\frac{\sqrt{17}}{4}$.

$\because 1^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{17}{16}=\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2$，

$\therefore a^2+b^2=c^2$，

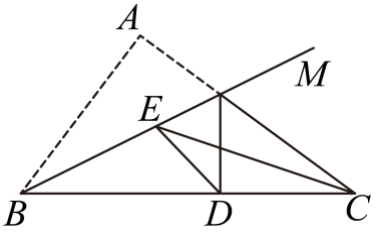
$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形，且 a，b 为直角边，

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$.

故选 B.

【点睛】本题考查非负数的性质，勾股定理逆定理．熟练掌握非负数的性质和勾股定理逆定理是解题关键．

2.（2023 上·江苏连云港·八年级校考期中）如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=6$，$AC=8$，$BC=10$．将 $\triangle ABC$ 沿射线 BM 折叠，使点 A 与 BC 边上的点 D 重合，E 为射线 BM 上一个动点，当 $\triangle CDE$ 周长最小时，CE 的长为_____.



【答案】5

【分析】本题考查了翻折变换，勾股定理的逆定理，轴对称的性质，掌握相关性质是解答本题的关键．

根据翻折的性质和勾股定理的逆定理，得到 $\triangle ABC$ 为直角三角形，设 $CE=x$，则 $AE=DE=AC-CE=8-x$，再利用勾股定理得到答案．

【详解】解：由题意得：

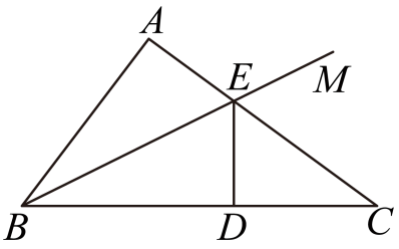
A，D 两点关于射线 BM 对称，

$\therefore C_{\triangle CDE}=CD+DE+CE$，

$\because CD$ 为定值，要使 $\triangle CDE$ 周长最小，

即 $DE+CE$ 最小，

$\therefore$ 如图，当点 E 为 AC 与射线 BM 的交点时，$\triangle CDE$ 周长最小，



$\because AB=6$，$AC=8$，$BC=10$，

$AB^2+AC^2=6^2+8^2=100$，

$BC^2=10^2=100$，

$\therefore AB^2+AC^2=BC^2$，

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形，

$\therefore \angle BAC=\angle BDE=\angle CDE=90°$，

$\because AB=BD=6$，

$\therefore CD=BC-BD=10-6=4$，

设 $CE=x$，则 $AE=DE=AC-CE=8-x$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，

$CE^2=DE^2+CD^2$，

即 $x^2=(8-x)^2+4^2$，

解得：$x=5$，

$\therefore CE=5$，

故答案为：5．

3．（2024 上·广东河源·八年级统考期末）（1）如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，$AC=13$，$AD=5$，$CD=12$，$BC=20$，求 $\triangle ABC$ 的面积；

（2）如图 2，在 $\triangle EFG$ 中，$EF=13$，$EG=20$，$FG=11$，求 $\triangle EFG$ 的面积．

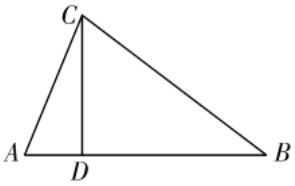


图 1

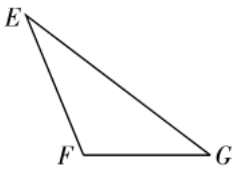


图 2

【答案】（1）126；（2）66

【分析】（1）根据勾股定理求出$CD^2+AD^2=169$，$AC^2=169$，求出$CD^2+AD^2=AC^2$，根据勾股定理的逆定理得出$\triangle ADC$是直角三角形，根据勾股定理求出BD，求出AB，再求出$\square ABC$的面积即可；

（2）过点E作$EM\perp FG$，交GF的延长线于点M．设$FM=x$，则$GM=11+x$，根据勾股定理得出$EM^2=EF^2-FM^2=EG^2-GM^2$，代入求出x，再求出EM，最后求出$\square EFG$的面积即可；

【详解】解：（1）$\because AC=13$，$AD=5$，$CD=12$，

$\therefore CD^2+AD^2=12^2+5^2=169$，$AC^2=13^2=169$，

$\therefore CD^2+AD^2=AC^2$，

$\therefore \angle ADC=90°$，

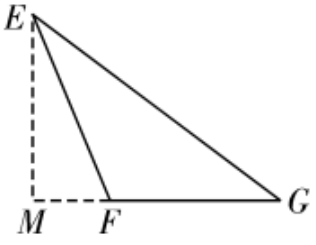
$\therefore \angle BDC=90°$，

由勾股定理得$BD=\sqrt{BC^2-CD^2}=\sqrt{20^2-12^2}=16$，

$\therefore AB=AD+BD=5+16=21$，

$\therefore S_{\square ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}\times 21\times 12=126$．

（2）如图，过点E作$EM\perp FG$，交GF的延长线于点M．设$FM=x$，则$GM=11+x$，



$\because$在$\mathrm{Rt}\triangle FEM$和$\mathrm{Rt}\triangle GEM$中，由勾股定理得$EM^2=EF^2-FM^2$，$EM^2=EG^2-GM^2$，

$\therefore EF^2-FM^2=EG^2-GM^2$，

$\therefore 13^2-x^2=20^2-(11+x)^2$，

解得$x=5$，即$FM=5$，

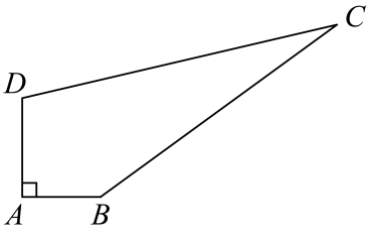
$\therefore EM=\sqrt{13^2-5^2}=12$，

$\therefore S_{\square EFG}=\frac{1}{2}FG\cdot EM=\frac{1}{2}\times 11\times 12=66$．

【点睛】本题考查了勾股定理，勾股定理的逆定理和三角形的面积等知识点，能熟记勾股定理的逆定理是解此题的关键，注意：如果一个三角形的两边a、b的平方和等于第三边c的平方，那么这个三角形是直角三角形.

【经典例题八 勾股定理逆定理的实际应用】

【例 8】(2023 上·江苏宿迁·八年级统考期中)李伯伯家有一块四边形田地$ABCD$，其中$\angle A=90°$，$AB=9\text{m}$，$BC=36\text{m}$，$CD=39\text{m}$，$AD=12\text{m}$，则这块地的面积为（　）

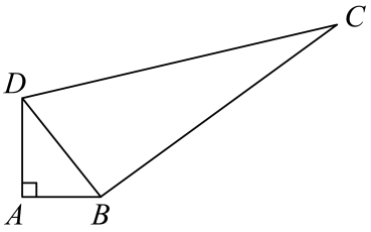


A．196m^2　　B．225m^2　　C．324m^2　　D．256m^2

【答案】C

【分析】本题考查了勾股定理和三角形面积的应用，连接BD，运用勾股定理逆定理可证$\triangle DBC$为直角三角形，可求出两直角三角形的面积，此块地的面积为两个直角三角形的面积和.

【详解】解：连接BD，则在$\text{Rt}\triangle ADB$中，



$BD^2=AB^2+AD^2=12^2+9^2=225$，

$\therefore BD=15$，

在$\triangle DBC$中，$CD^2=1521$，$DB^2+BC^2=15^2+36^2=1521$，

$\therefore DC^2=BD^2+BC^2$，

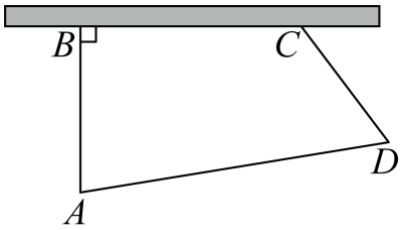
$\therefore \angle DBC=90°$，

$\therefore S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD+\frac{1}{2}BD\cdot CB=\frac{1}{2}\times12\times9+\frac{1}{2}\times15\times36=54+270=324$（平方米），

故答案为：C.

【变式训练】

1.（2023 下·辽宁鞍山·八年级统考期末）如图，学校在校园围墙边缘开垦一块四边形菜地 $ABCD$，测得 $AB=9\text{m}$，$BC=12\text{m}$，$CD=8m$，$AD=17\text{m}$，且 $\angle ABC=90°$，这块菜地的面积是（　）



A．48m^2　　B．114m^2　　C．122m^2　　D．158m^2

【答案】B

【分析】在 $\triangle ABC$ 中，利用勾股定理求出 AC 的长，再由勾股定理逆定理判断 $\triangle ACD$ 的形状，由三角形面积公式求得菜地的面积.

【详解】解：连接 AC

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，$AB=9\text{m}$，$BC=12\text{m}$，，

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{9^2+12^2}=15(\text{m})$

在 $\triangle ACD$ 中，$CD=8m$，$AD=17\text{m}$，

$AC^2+CD^2=64+225=289$，$AD^2=17^2=289$

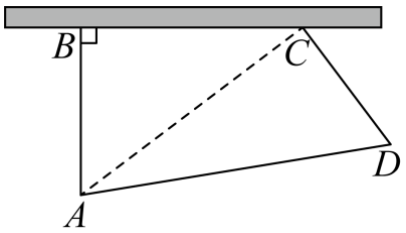
$\therefore AC^2+CD^2=AD^2$

$\therefore \triangle ACD$ 是直角三角形，且 $\angle ACD=90^{\circ}$.

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AB\cdot BC+\frac{1}{2}AC\cdot CD=\frac{1}{2}\times 9\times 12+\frac{1}{2}\times 8\times 15=114\left(\text{m}^2\right)$

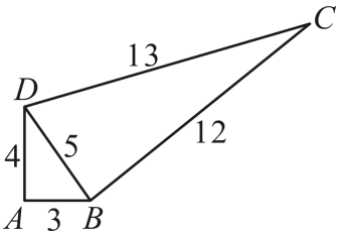
∴这块菜地的面积是 114m^2

故选：B



【点睛】本题考查勾股定理以及勾股定理逆定理的应用，四边形的面积等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

2.（2024 上·河北张家口·八年级统考期末）一个零件的形状如图所示，按规定这个零件中 $\angle A$ 与 $\angle DBC$ 都应为直角，工人师傅量的这个零件各边的尺寸如图所示.



（1）这个零件_____符合要求吗？（填“是”或“否”）

（2）这个四边形的面积为_____.

【答案】　　是　　36

【分析】本题考查了勾股定理的逆定理．熟练掌握勾股定理的逆定理是解题的关键．

（1）根据勾股定理的逆定理可求 $\triangle ABD$，$\triangle BCD$ 是直角三角形，且 $\angle A=90°$，$\angle DBC=90°$，然后作答即可；

（2）根据 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$，计算求解即可．

【详解】（1）解：∵ $3^2+4^2=25=5^2$，$5^2+12^2=169=13^2$，

∴ $AB^2+AD^2=BD^2$，$BD^2+BC^2=CD^2$，

∴ $\triangle ABD$，$\triangle BCD$ 是直角三角形，且 $\angle A=90°$，$\angle DBC=90°$，

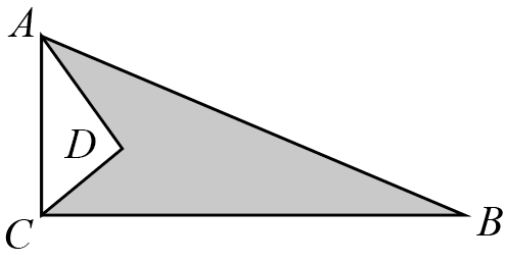
∴这个零件符合要求，

故答案为：是；

（2）解：由题意知 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD+\frac{1}{2}BD\cdot BC=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times5\times12=36$，

故答案为：36.

3.（2024 上·重庆沙坪坝·八年级统考期末）为了更好地提升居民的生活水平和居住满意度，某小区进行小范围绿化，要在一块如图所示的 $\triangle ABC$ 地块内进行绿化改造，点 D 为 $\triangle ABC$ 内一点，$\angle ADC=90°$，$CD=3$ 米，$AD=4$ 米，$BC=12$ 米，$AB=13$ 米.



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/138065063060006056