

昌平区 2023——2024 学年第一学期高二年级期末质量抽测

数学试卷

本试卷共 4 页，共 150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将答题卡交回.

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知直线过点 $P(-1,1)$ ，且倾斜角是 45° ，则直线不经过（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】D

【解析】

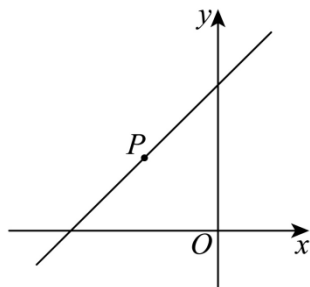
【分析】根据题意，求出直线方程，画出图象，结合图象得到答案.

【详解】直线过点 $P(-1,1)$ ，且倾斜角是 45° ，

所以直线斜率 $k = \tan 45^\circ = 1$ ，

所以直线方程为 $y - 1 = x + 1$ ，即 $x - y + 2 = 0$ ，

画出直线图象为



结合图象可知，直线不过第四象限，

故选：D.

2. 若 $(1+x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ ，则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 =$ （ ）

- A. 8 B. 16 C. 32 D. 64

【答案】C

【解析】

【分析】根据给定条件，利用赋值法计算作答.

【详解】因为 $(1+x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ ，

所以当 $x=1$ 时, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2^5 = 32$,

故选: C.

3. 某气象台天气预报的准确率为 80%, 则 3 次预报中恰有 1 次预报准确的概率是 ()

- A. 9.6% B. 10.4% C. 80% D. 99.2%

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据独立重复实验的概率公式可求出结果.

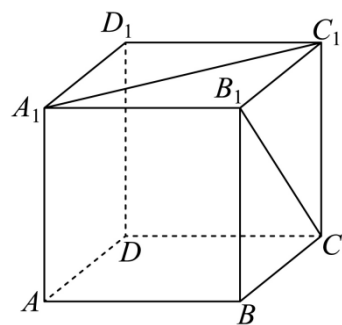
【详解】 由天气预报的准确率为 80%,

则 3 次预报中恰有 1 次预报准确的概率为:

$$P = C_3^1 0.8^1 \times (1-0.8)^2 = 3 \times 0.8 \times 0.04 = 0.096, \text{ 即 } 9.6\%.$$

故选: A.

4. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 直线 CB_1 与直线 A_1C_1 所成角的大小为 ()



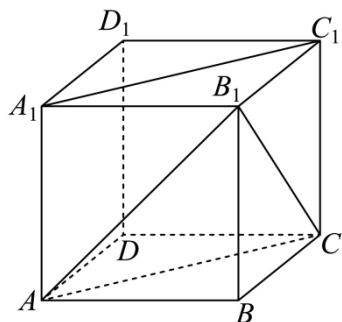
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 连接 AC 、 AB_1 , 可得 $AC \parallel A_1C_1$ 且 $\triangle ACB_1$ 为等边三角形, 即可得直线 CB_1 与直线 A_1C_1 所成角的大小.

【详解】



连接 AC , AB_1 , 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 易得 $AC \parallel A_1C_1$,

故直线 CB_1 与直线 A_1C_1 所成角的大小与直线 CB_1 与直线 AC 所成角大小相等,

又 $AB_1 = CB_1 = AC$, 故 $\triangle ACB_1$ 为等边三角形, 故 $\angle ACB_1 = \frac{\pi}{3}$,

即直线 CB_1 与直线 A_1C_1 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

故选: C.

5. 已知某班级中, 喜欢文学阅读的学生占 75%, 喜欢文学阅读而且喜欢科普阅读的学生占 30%. 若从这个班级的学生中任意抽取一人, 则在抽到的学生喜欢文学阅读的条件下, 该学生也喜欢科普阅读的概率为 ()

- A. 22.5% B. 30% C. 40% D. 75%

【答案】C

【解析】

【分析】由条件概率的公式计算即可得.

【详解】设事件 A 为“抽到喜欢文学阅读的学生”, 设事件 B 为“抽到喜欢科普阅读的学生”,

则 $P(A) = 0.75$, $P(AB) = 0.3$,

$$\text{则 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.75} = \frac{2}{5},$$

即在抽到的学生喜欢文学阅读的条件下, 该学生也喜欢科普阅读的概率为 40%.

故选: C.

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的实轴长为 4, 则双曲线的渐近线方程为 ()

- A. $y = \pm \frac{1}{2}x$ B. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$ C. $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}x$ D. $y = \pm 2x$

【答案】A

【解析】

【分析】根据实轴长得到 $a = 2$, 再根据渐近线公式得到答案.

【详解】因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的实轴长为 4, 即 $2a = 4$, 解得 $a = 2$,

所以双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, 即 $b = 1$,

所以双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{1}{2}x$,

故选: A.

7. 为了迎接在杭州举行的第十九届亚运会, 学校开展了“争做运动达人, 喜迎杭州亚运”活动. 现从某班的 4 名男生和 3 名女生中选出 3 人参加活动, 则这 3 人中既有男生又有女生的选法种数为 ()

- A. 20 B. 30 C. 35 D. 60

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意, 分为两类: 一男两女或两男一女, 结合组合数公式, 即可求解.

【详解】由题意, 可分为两类: 一男两女或两男一女,

当一男两女时, 有 $C_4^1 C_3^2 = 12$ 种不同的选法;

当两男一女时, 有 $C_4^2 C_3^1 = 18$ 种不同的选法,

由分类计数原理得, 共有 $12 + 18 = 30$ 种不同的选法.

故选: B.

8. 已知直线 $l_1: ax - y + 1 = 0$, $l_2: x - by - 2 = 0$, 则“ $\frac{a}{b} = -1$ ”是“ $l_1 \perp l_2$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】由 $l_1 \perp l_2$, 求得即 $\frac{a}{b} = -1$ 或 $a = b = 0$, 结合充分条件、必要条件的判定方法, 即可求解.

【详解】因为直线 $l_1: ax - y + 1 = 0$, $l_2: x - by - 2 = 0$,

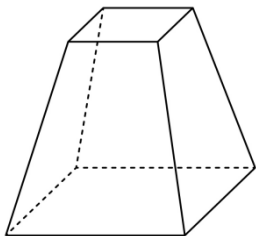
所以当 $l_1 \perp l_2$ 时, $a \cdot 1 + (-1)(-b) = 0$, 即 $a + b = 0$, 即 $\frac{a}{b} = -1$ 或 $a = b = 0$,

所以“ $\frac{a}{b} = -1$ ”能推出“ $l_1 \perp l_2$ ”, “ $l_1 \perp l_2$ ”不能推出“ $\frac{a}{b} = -1$ ”,

所以“ $\frac{a}{b} = -1$ ”是“ $l_1 \perp l_2$ ”充分不必要条件,

故选: A.

9. 《九章算术》中的方亭指的是正四面形棱台体建筑物, 正四面形棱台即今天的正四棱台. 如图, 某方亭的上底面与下底面的边长分别为 4 和 8, 每个侧面与下底面夹角的正切值均为 $\sqrt{14}$, 则方亭的侧面积为 ()



- A. $64\sqrt{15}$ B. $48\sqrt{15}$ C. $12\sqrt{15}$ D. $4\sqrt{15}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用侧面与下底面的夹角的正切值均为 $\sqrt{14}$ ，求得正棱台的高，进而求得其斜高，结合侧面积公式，即可求解.

【详解】设上底面为 $ABCD$ ，下底面为 $A'B'C'D'$ ，取 BC 的中点 E ， $B'C'$ 的中点 F ，连接 EF ，
 设上底面的中心为 O ，下底面的中心为 O' ，连接 OO' , OE , $O'F$ ，
 过点 E 作 $EH \perp O'F$ 于点 H ，如图所示，
 因为 $EF \perp B'C'$, $HF \perp B'C'$ ，

所以 $\angle EFH$ 即为侧面与下底面夹角的平面角，即 $\tan \angle EFH = \sqrt{14}$ ，

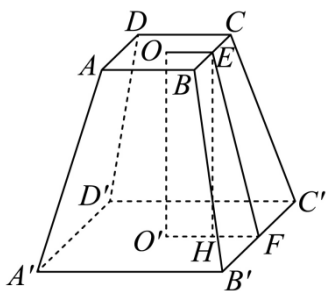
又因为 $HF = O'F - O'H = O'F - OE = 4 - 2 = 2$ ，

所以 $\tan \angle EFH = \frac{EH}{HF} = \sqrt{14}$ ，所以 $EH = 2\sqrt{14}$ ，

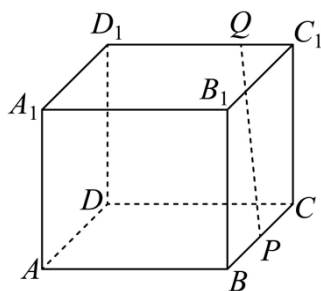
所以 $EF = \sqrt{EH^2 + HF^2} = \sqrt{56 + 4} = 2\sqrt{15}$ ，

所以方亭的侧面积为 $4 \times \frac{1}{2} \times (4 + 8) \times 2\sqrt{15} = 48\sqrt{15}$.

故选：B.



10. 如图，在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = AD = 2$ ， $AA_1 = \sqrt{3}$ ， P ， Q 分别是棱 BC 和 C_1D_1 上的两个动点，且 $PQ = 2$ ，则 PQ 的中点 E 到 CC_1 的距离为（ ）



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

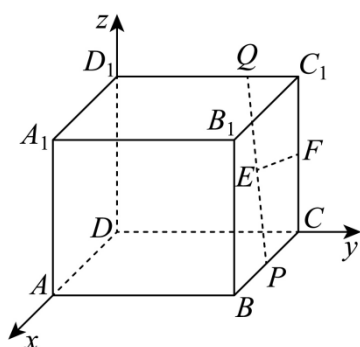
【答案】D

【解析】

【分析】取 CC_1 的中点 F ，连接 EF ，以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系，结合 $PQ = 2$ ，利用两点间距离公式，求出 EF 的长即可．

【详解】取 CC_1 的中点 F ，连接 EF ，

以 D 为坐标原点， DA ， DC ， DD_1 所在直线分别为 x ， y ， z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $P(x, 2, 0)$ ， $Q(0, y, \sqrt{3})$ ， $F\left(0, 2, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

因为 E 是 PQ 的中点，所以 $E\left(\frac{x}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

所以 $\overrightarrow{FE} = \left(\frac{x}{2}, \frac{y-2}{2}, 0\right)$ ，而 $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{DD_1} = (0, 0, \sqrt{3})$ ，

所以 $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{CC_1} = 0$ ，即 $EF \perp CC_1$ ，所以点 E 到 CC_1 的距离就是 EF ，

因为 $PQ = 2$ ，

所以 $PQ^2 = x^2 + (y-2)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$ ，即 $x^2 + (y-2)^2 = 1$ ，

$$\text{所以 } EF^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+2}{2} - 2\right)^2 = \frac{x^2 + (y-2)^2}{4} = \frac{1}{4}, \text{ 即 } EF = \frac{1}{2},$$

所以 PQ 的中点 E 到 CC_1 的距离为 $\frac{1}{2}$.

故选: D.

【点睛】关键点睛: 本题解决的关键是发现 $EF \perp CC_1$, 再利用整体法即可得解.

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 在 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中, x 的系数为_____.

【答案】 10

【解析】

【分析】 求出二项展开式的通项, 进而得到 x 的系数.

【详解】 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$ 展开式的通项为 $T_{k+1} = C_5^k x^{5-k} (-1)^k x^{-k} = C_5^k (-1)^k (x)^{5-2k}$,

令 $5-2k=1$, 即 $k=2$,

所以 $T_3 = C_5^2 (-1)^2 x = 10x$,

所以 x 的系数为 10,

故答案为: 10.

12. 设 F 为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, 则点 F 的坐标为_____; 若抛物线上一点 M 满足 $|MF| = 5$, 那么点 M 的横坐标为_____.

【答案】 ①. $(1, 0)$ ②. 4

【解析】

【分析】 根据抛物线方程易得 $p=2$, 即得焦点坐标; 利用抛物线的定义将焦半径 $|MF|$ 转化 $x_0 + \frac{p}{2}$, 即可求得点 M 的横坐标 x_0 .

【详解】 由 $y^2 = 4x$ 可得抛物线的焦准距为 $p=2$, 故焦点 F 的坐标为 $(1, 0)$;

不妨设 $M(x_0, y_0)$, 由 $|MF| = 5$ 可得: $x_0 + \frac{p}{2} = 5$, 即得: $x_0 = 4$, 即点 M 的横坐标为 4.

故答案为: $(1, 0)$; 4.

13. 北京的三条文化带——

大运河文化带、长城文化带、西山永定河文化带，是北京文化脉络乃至中华文明的精华所在.为了让同学们了解这三条文化带的内涵，现从4名老师中选3名老师，每人讲述一条文化带，每条文化带由一名老师讲述，则不同的分配方案种数是_____.

【答案】24

【解析】

【分析】根据排列的含义结合排列数的计算，即可得答案.

【详解】从4名老师中选3名老师，每人讲述一条文化带，每条文化带由一名老师讲述，相当于从4个不同元素中选3个元素的排列问题，

则不同的分配方案种数为 $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ ，

故答案为：24

14. 已知圆 $D: x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$ ，则圆 D 的半径为_____；与圆 D 和圆 $x^2 + y^2 = 1$ 都相切的直线的方程为_____。（只需写出一条直线的方程）

【答案】 ①. 4 ②. $x = 1$ （答案不唯一， $7x + 24y + 25 = 0$ 或 $3x - 4y + 5 = 0$ 亦可）

【解析】

【分析】将圆的一般方程化为标准方程即可得圆心；设出两圆的公切线方程，注意讨论斜率是否存在，由切线的性质列式计算即可得公切线方程.

【详解】由 $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$ ，即 $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$ ，

故圆 D 的半径为4，圆心坐标为 $(-3, 4)$ ，

设直线 l 与圆 D 和圆 $x^2 + y^2 = 1$ 都相切，

若直线斜率不存在，设直线为 $x = m$ ，

需有 $\begin{cases} |-3 - m| = 4 \\ |m| = 1 \end{cases}$ ，解得 $m = 1$ ，故 $x = 1$ 符合要求；

若直线斜率存在，设直线为 $y = kx + t$ ，即 $kx - y + t = 0$ ，

需有 $\begin{cases} \frac{|-3k - 4 + t|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 4 \\ \frac{|t|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1 \end{cases}$ ，两式相除得 $\frac{|-3k - 4 + t|}{|t|} = 4$ ，

故 $-3k - 4 + t = 4t$ 或 $-3k - 4 + t = -4t$ ，

化简得 $t = \frac{-3k-4}{3}$ 或 $t = \frac{3k+4}{5}$,

由 $\frac{|t|}{\sqrt{k^2+1}}=1$ 可得 $t^2=k^2+1$,

故有 $\left(\frac{-3k-4}{3}\right)^2=k^2+1$ 或 $\left(\frac{3k+4}{5}\right)^2=k^2+1$,

化简得 $24k=-7$ 或 $(4k-3)^2=0$,

即 $k=-\frac{7}{24}$ 或 $k=\frac{3}{4}$,

则 $t=\frac{-3k-4}{3}=-\frac{25}{24}$ 或 $t=\frac{3k+4}{5}=\frac{5}{4}$,

故该直线为 $-\frac{7}{24}x-y-\frac{25}{24}=0$ 或 $\frac{3}{4}x-y+\frac{5}{4}=0$,

即 $7x+24y+25=0$ 或 $3x-4y+5=0$,

综上所述, 与圆 D 和圆 $x^2+y^2=1$ 都相切的直线的方程有:

$x=1$ 、 $7x+24y+25=0$ 、 $3x-4y+5=0$.

故答案为: 4; $x=1$ (答案不唯一, $7x+24y+25=0$ 或 $3x-4y+5=0$ 亦可)

15. 数学中有许多形状优美的曲线, 曲线 $E:|x|+|y|+x^2y^2=3$ 就是其中之一. 给出下列四个结论:

- ①曲线 E 关于坐标原点对称;
- ②曲线 E 上任意一点到原点的距离的最小值为 2;
- ③曲线 E 恰好经过 8 个整点 (即横、纵坐标均为整数的点);
- ④曲线 E 所围成的区域的面积大于 8.

其中所有正确结论的序号是_____.

【答案】 ①③④

【解析】

【分析】 对①: 将点 $(-x, -y)$ 代入, 依旧满足该方程即可得; 对②: 找出反例即可得; 对③: 由曲线可得 $|x| \leq 3$, 将所有整点求出即可得; 对④: 借助曲线的对称性, 证明该曲线在第一象限部分与坐标轴围成的面积大于直线 $x+y-2=0$ 与坐标轴围成的面积即可得.

【详解】 对①: 将点 $(-x, -y)$ 代入, 可得 $|-x|+|-y|+x^2y^2=|x|+|y|+x^2y^2=3$, 故①正确;

对②: 令 $x=1$, 则 $|y|=1$, 故 $(1, 1)$ 在曲线 E 上, 该点到原点的距离为 $\sqrt{2} < 2$,

故②错误;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/138066043135006117>