

2025 二轮复习专项训练 5

基本初等函数、函数与方程

[考情分析] 基本初等函数作为高考的命题热点,多单独或与不等式综合考查,函数的应用问题集中体现在函数模型的选择使用.函数与方程主要是函数零点个数的判断、零点所在区间、求参数取值范围等方面.常以选择题、填空题的形式出现,有时难度较大.

【练前疑难讲解】

一、基本初等函数的图象与性质

1. 指数函数 $y=a^x(a>0, \text{ 且 } a\neq 1)$ 与对数函数 $y=\log_a x(a>0, \text{ 且 } a\neq 1)$ 互为反函数,其图象关于 $y=x$ 对称,它们的图象和性质分 $0<a<1, a>1$ 两种情况,着重关注两个函数图象的异同.

2. 幂函数 $y=x^\alpha$ 的图象和性质,主要掌握 $\alpha=1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1$ 五种情况.

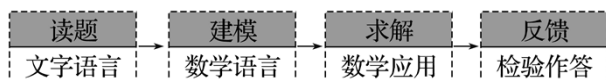
二、函数的零点

函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的零点就是方程 $f(x)=g(x)$ 的根,即函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=g(x)$ 的图象的交点的横坐标.

三、函数模型及其应用

应用函数模型解决实际问题的一般程序和解题关键

(1)一般程序:



(2)解题关键: 解答这类问题的关键是准确地建立相关函数解析式,然后应用函数、方程、不等式和导数的有关知识加以综合解答.

一、单选题

1. (2023·全国·高考真题) 设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减,则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -2]$ B. $[-2, 0)$
C. $(0, 2]$ D. $[2, +\infty)$

2. (2024·广东江苏·高考真题) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} -x^2-2ax-a, & x<0 \\ e^x+\ln(x+1), & x\geq 0 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 0]$ B. $[-1, 0]$ C. $[-1, 1]$ D. $[0, +\infty)$

3. (2023·天津·高考真题) 设 $a=1.01^{0.5}, b=1.01^{0.6}, c=0.6^{0.5}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$

C. $c < b < a$

D. $c < a < b$

4. (2024·安徽芜湖·二模) 在数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为其前 n 项和, 首项 $a_1 = 1$, 且函数

$f(x) = x^3 - a_{n+1} \sin x + (2a_n + 1)x + 1$ 的导函数有唯一零点, 则 $S_5 =$ ()

A. 26

B. 63

C. 57

D. 25

5. (21-22 高二下·陕西宝鸡·期末) 函数 $y = \ln x - \frac{2}{x}$ 的零点所在的大致区间是 ()

A. $(\frac{1}{e}, 1)$

B. $(1, 2)$

C. $(2, e)$

D. $(e, +\infty)$

6. (2024·全国·模拟预测) 青少年视力问题是社会普遍关注的问题, 视力情况可借助视力表测量, 通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据, 五分记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V 满足 $L = 5 + \lg V$. 已知小明和小李视力的五分记录法的数据分别为 4.5 和 4.9, 记

小明和小李视力的小数记录法的数据分别为 V_1, V_2 , 则 $\frac{V_2}{V_1} \in$ ()

A. $(1.5, 2)$

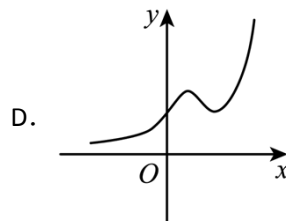
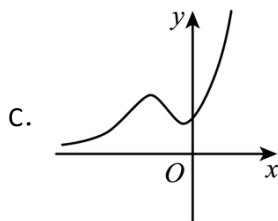
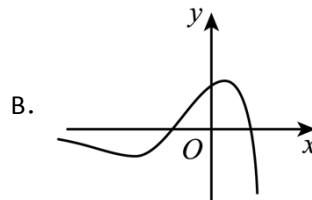
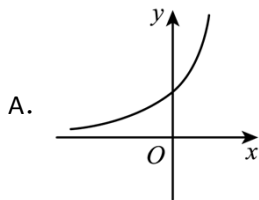
B. $(2, 2.5)$

C. $(2.5, 3)$

D. $(3, 3.5)$

二、多选题

7. (2023·湖北武汉·二模) 函数 $y = (kx^2 + 1)e^x$ 的图像可能是 ()



8. (2023·广东茂名·一模) e 是自然对数的底数, $m, n \in \mathbf{R}$, 已知 $me^m + \ln n > n \ln n + m$, 则下列结论一定正确的是 ()

A. 若 $m > 0$, 则 $m - n > 0$

B. 若 $m > 0$, 则 $e^m - n > 0$

C. 若 $m < 0$, 则 $m + \ln n < 0$

D. 若 $m < 0$, 则 $e^m + n > 2$

三、填空题

9. (2024·广东·一模) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{12})$ 上单调, 且满足

$f(\frac{\pi}{6}) = -1$, $f(\frac{3\pi}{4}) = 0$, 则 $\omega =$ _____.

10. (2024·广东梅州·模拟预测) 某科创公司新开发了一种溶液产品, 但这种产品含有 2% 的杂质, 按市场要求杂质含量不得超过 0.1%, 现要进行过滤, 已知每过滤一次杂质含量减少 $\frac{1}{3}$, 要使产品达到市场要求, 对该溶液过滤的最少次数为_____.

(参考数据: $\lg 2 \approx 0.301$, $\lg 3 \approx 0.477$)

参考答案:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8		
答案	D	B	D	C	C	C	ABC	BC		

1. D

【分析】利用指数型复合函数单调性, 判断列式计算作答.

【详解】函数 $y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 而函数 $f(x) = 2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减,

则有函数 $y = x(x-a) = (x - \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减, 因此 $\frac{a}{2} \geq 1$, 解得 $a \geq 2$,

所以 a 的取值范围是 $[2, +\infty)$.

故选: D

2. B

【分析】根据二次函数的性质和分界点的大小关系即可得到不等式组, 解出即可.

【详解】因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 且 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x + \ln(x+1)$ 单调递增,

$$\text{则需满足} \begin{cases} -\frac{-2a}{2 \times (-1)} \geq 0 \\ -a \leq e^0 + \ln 1 \end{cases}, \text{解得 } -1 \leq a \leq 0,$$

即 a 的范围是 $[-1, 0]$.

故选: B.

3. D

【分析】根据对应幂、指数函数的单调性判断大小关系即可.

【详解】由 $y = 1.01^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增, 则 $a = 1.01^{0.5} < b = 1.01^{0.6}$,

由 $y = x^{0.5}$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增, 则 $a = 1.01^{0.5} > c = 0.6^{0.5}$.

所以 $b > a > c$.

故选: D

4. C

【分析】计算 $f'(x)$, 分析 $f'(x)$ 的奇偶性, 可判断零点取值, 代入计算可得 $\{a_n\}$ 的递推关系, 求出前 5 项, 计算求和即可.

【详解】因为 $f(x) = x^3 - a_{n+1} \sin x + (2a_n + 1)x + 1$,

所以 $f'(x) = 3x^2 - a_{n+1} \cos x + (2a_n + 1)$, 由题意可知: $f'(x) = 0$ 有唯一零点.

令 $g(x) = f'(x) = 3x^2 - a_{n+1} \cos x + (2a_n + 1)$, 可知 $g(x)$ 为偶函数且有唯一零点,

则此零点只能为 0, 即 $g(0) = 0$, 代入化简可得: $a_{n+1} = 2a_n + 1$,

又 $a_1 = 1$, 所以 $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_4 = 15$, $a_5 = 31$, 所以 $S_5 = 57$.

故选: C

5. C

【分析】首先判断函数的单调性, 再根据零点存在性定理判断即可.

【详解】解: $y = f(x) = \ln x - \frac{2}{x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 又 $y = \ln x$ 与 $y = -\frac{2}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x) = \ln x - \frac{2}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $f(1) = \ln 1 - 2 = -2 < 0$, $f(2) = \ln 2 - 1 < 0$, $f(e) = \ln e - \frac{2}{e} = 1 - \frac{2}{e} > 0$,

所以 $f(2) \cdot f(e) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(2, e)$ 上存在唯一的零点.

故选: C

6. C

【分析】根据题意得到方程组, 求出 $\frac{V_2}{V_1} = \sqrt[5]{100}$, 根据 $2.5^5 \approx 98 < 100 < 3^5 = 243$ 得到

$\sqrt[5]{100} \in (2.5, 3)$.

【详解】依题意, $\begin{cases} 4.9 = 5 + \lg V_2 \\ 4.5 = 5 + \lg V_1 \end{cases}$, 两式相减可得, $0.4 = \lg V_2 - \lg V_1 = \lg \frac{V_2}{V_1}$,

故 $\frac{V_2}{V_1} = 10^{0.4} = \sqrt[5]{100}$ ，而 $2.5^5 \approx 98 < 100 < 3^5 = 243$ ，故 $\sqrt[5]{100} \in (2.5, 3)$ 。

故选：C。

7. ABC

【分析】分类讨论函数的单调性及极值点判断各个选项即可。

【详解】 $f(x) = (kx^2 + 1)e^x$ ，

当 $k = 0$ 时， $f(x) = e^x$ ，A 选项正确；

$$f'(x) = (kx^2 + 2kx + 1)e^x，$$

$$\Delta = 4k^2 - 4k \leq 0 \Rightarrow 0 \leq k \leq 1，$$

$$f'(x) = (kx^2 + 2kx + 1)e^x \geq 0，f(x) = (kx^2 + 1)e^x$$

$k > 1$ 时， $f'(x) = (kx^2 + 2kx + 1)e^x = 0$ 有两个根 x_1, x_2 ，且 $x_1 x_2 = \frac{1}{k}$ ， $x_1 + x_2 = -2$ 时

$x_1 < 0, x_2 < 0$ ，根据极值点判断，故 C 选项正确，D 选项错误；

当 $k < 0$ 时， $f'(x) = (kx^2 + 2kx + 1)e^x = 0$ 有两个根 $x_1 < x_2$ ，且 $x_1 x_2 = \frac{1}{k}$ ， $x_1 + x_2 = -2$ ，此时

$x_1 < 0, x_2 > 0$ ，故 B 选项正确。

故选：ABC。

8. BC

【分析】构造函数 $f(x) = xe^x - x$ 根据题意分析可得 $f(m) > f(\ln n)$ ，对 A、D：取特值分析

判断；对 B、C：根据 $f(x)$ 的单调性，分类讨论分析判断。

【详解】原式变形为 $me^m - m > n \ln n - \ln n$ ，

构造函数 $f(x) = xe^x - x$ ，则 $f(m) > f(\ln n)$ ，

$$\therefore f'(x) = e^x(x+1) - 1，$$

当 $x > 0$ 时， $e^x > 1, x+1 > 1$ ，则 $e^x(x+1) > 1$ ，即 $f'(x) = e^x(x+1) - 1 > 0$ ；

当 $x < 0$ 时， $0 < e^x < 1, x+1 < 1$ ，则 $e^x(x+1) < 1$ ，即 $f'(x) = e^x(x+1) - 1 < 0$ ；

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

对于 A：取 $m = n = e$ ，则 $\ln n = 1 < m$

$\because f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(m) > f(\ln n)$,

即 $m = n = e$ 满足题意, 但 $m - n = 0$, A 错误;

对于 B: 若 $m > 0$, 则有:

当 $\ln n \leq 0$, 即 $n \leq 1$ 时, 则 $e^m > 1 \geq n$, 即 $e^m - n > 0$;

当 $\ln n > 0$, 即 $n > 1$ 时, 由 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 时单调递增, 且 $f(m) > f(\ln n)$,

故 $m > \ln n$, 则 $e^m - n > 0$;

综上所述: $e^m - n > 0$, B 正确;

对于 C: 若 $m < 0$, 则有:

当 $\ln n \leq 0$, 即 $n \leq 1$ 时, $m + \ln n < 0$ 显然成立;

当 $\ln n > 0$, 即 $n > 1$ 时, 令 $h(x) = f(x) - f(-x) = x(e^x + e^{-x} - 2)$,

$\because e^x + e^{-x} - 2 \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} - 2 = 0$, 当且仅当 $e^x = e^{-x}$, 即 $x = 0$ 时等号成立,

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, 所以 $h(x) < 0$, 即 $f(x) < f(-x)$,

由 $m < 0$ 可得 $f(m) < f(-m)$, 即 $f(\ln n) < f(-m)$

又 $\because$ 由 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 时单调递增, 且 $\ln n > 0, -m > 0$,

$\therefore \ln n < -m$, 即 $\ln n + m < 0$;

综上所述: $\ln n + m < 0$, C 正确;

对于 D: 取 $m = -2$, $n = \frac{1}{e}$, 则 $\ln n = -1 < m$,

$\because f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 故 $f(m) > f(\ln n)$,

$\therefore$ 故 $m = -2$, $n = \frac{1}{e}$ 满足题意, 但 $e^m + n = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} < 2$, D 错误.

故选: BC.

【点睛】结论点睛: 指对同构的常用形式:

(1) 积型: $ae^a \leq b \ln b$,

① 构造形式为: $ae^a \leq b \ln b$, 构造函数 $f(x) = xe^x$;

② 构造形式为: $e^a \ln e^a \leq b \ln b$, 构造函数 $f(x) = x \ln x$;

③ 构造形式为: $a + \ln a \leq \ln b + \ln(\ln b)$, 构造函数 $f(x) = x + \ln x$.

(2) 商型: $\frac{e^a}{a} \leq \frac{b}{\ln b}$,

① 构造形式为: $\frac{e^a}{a} \leq \frac{e^{\ln b}}{\ln b}$, 构造函数 $f(x) = \frac{e^x}{x}$;

② 构造形式为: $\frac{e^a}{\ln e^a} \leq \frac{b}{\ln b}$, 构造函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$;

③ 构造形式为: $a - \ln a \leq \ln b - \ln(\ln b)$, 构造函数 $f(x) = x - \ln x$.

9. $\frac{6}{7}$

【分析】由单调性确定函数 $f(x)$ 的最小正周期范围, 再结合零点及最小值点求出周期即可得解.

【详解】依题意, $f(x)_{\min} = f(\frac{\pi}{6}) = -1$, 而函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{12})$ 上单调,

则函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T \geq 2(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{6}) = \frac{5\pi}{6}$, 又 $f(\frac{3\pi}{4}) = 0$, $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{12} < T$,

因此 $\frac{T}{4} = \frac{7\pi}{12}$, 解得 $T = \frac{7\pi}{3}$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6}{7}$.

故答案为: $\frac{6}{7}$

10. 8

【分析】设至少需要过滤 n 次, 得到 $0.02 \times (\frac{2}{3})^n \leq 0.001$, 结合对数的运算和参考数据, 求

得 $n \geq 8$, 即可求解.

【详解】设至少需要过滤 n 次, 可得 $0.02 \times (\frac{2}{3})^n \leq 0.001$, 即 $(\frac{2}{3})^n \leq \frac{1}{20}$,

两边取对数, 可得 $n \lg \frac{2}{3} \leq \lg \frac{1}{20}$, 所以 $n \geq \frac{\lg \frac{1}{20}}{\lg \frac{2}{3}} = \frac{1 + \lg 2}{\lg 3 - \lg 2} \approx 7.4$,

又因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $n \geq 8$, 所以使产品达到市场要求的过滤次数最少为 8 次.

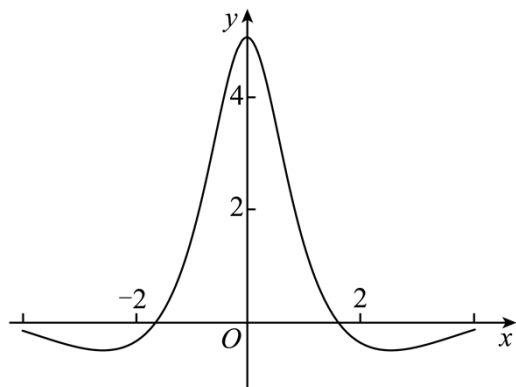
故答案为: 8.

【基础保分训练】

一、单选题

1. (2023·天津·高考真题) 已知函数 $f(x)$ 的部分图象如下图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能为

()



A. $\frac{5e^x - 5e^{-x}}{x^2 + 2}$

B. $\frac{5\sin x}{x^2 + 1}$

C. $\frac{5e^x + 5e^{-x}}{x^2 + 2}$

D. $\frac{5\cos x}{x^2 + 1}$

2. (2022·江苏连云港·二模) 若函数 $f(x) = x(1 + \frac{m}{1-e^x})$ 是偶函数, 则 $m =$ ()

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

3. (2024·四川成都·二模) 已知函数 $f(x) = 2^{ax^2-x+1}$ 的值域为 M . 若 $(1, +\infty) \subseteq M$, 则实数 a 的取值范围是 ()

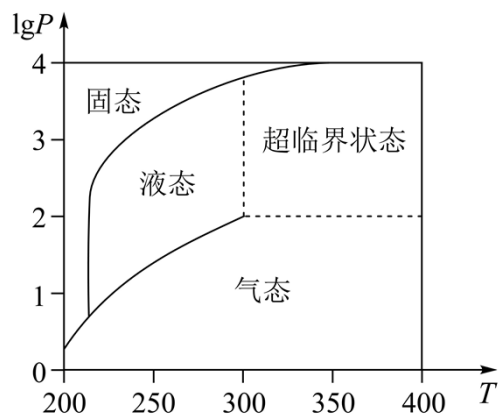
A. $(-\infty, \frac{1}{4}]$

B. $[0, \frac{1}{4}]$

C. $(-\infty, -\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}, +\infty)$

D. $[\frac{1}{4}, +\infty)$

4. (2022·北京·高考真题) 在北京冬奥会上, 国家速滑馆“冰丝带”使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术, 为实现绿色冬奥作出了贡献. 如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与 T 和 $\lg P$ 的关系, 其中 T 表示温度, 单位是 K ; P 表示压强, 单位是 bar . 下列结论中正确的是 ()



A. 当 $T = 220$, $P = 1026$ 时, 二氧化碳处于液态

B. 当 $T = 270$, $P = 128$ 时, 二氧化碳处于气态

C. 当 $T = 300$, $P = 9987$ 时, 二氧化碳处于超临界状态

D. 当 $T = 360$, $P = 729$ 时, 二氧化碳处于超临界状态

5. (23-24 高三上·北京·期中) 近年来纯电动汽车越来越受消费者的青睐, 新型动力电池迎来了蓬勃发展的风口. Peukert 于 1898 年提出蓄电池的容量 C (单位: Ah), 放电时间 t

(单位: h) 与放电电流 I (单位: A) 之间关系的经验公式: $C = I^n \cdot t$, 其中 n 为

Peukert 常数. 为测算某蓄电池的 Peukert 常数 n , 在电池容量不变的条件下, 当放电电流

$I = 20\text{A}$ 时, 放电时间 $t = 20\text{h}$; 当放电电流 $I = 50\text{A}$ 时, 放电时间 $t = 5\text{h}$. 若计算时取

$\lg 2 \approx 0.3$, 则该蓄电池的 Peukert 常数 n 大约为 ()

A. 1.25

B. 1.5

C. 1.67

D. 2

6. (22-23 高二上·云南玉溪·阶段练习) 已知函数 $y = f(x) (x \in \mathbf{R})$ 如满足: $f(x+3) = -f(x)$,

$f(-x) + f(x) = 0$, 且 $x \in [-3, 0)$ 时, $f(x) = \log_8(x+4)$, 则 $f(2024) = ()$

A. -3

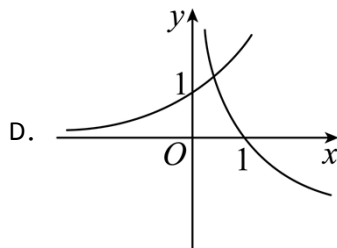
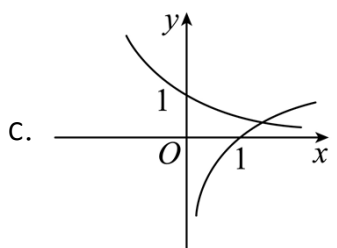
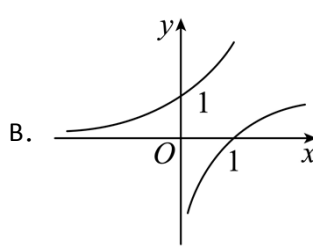
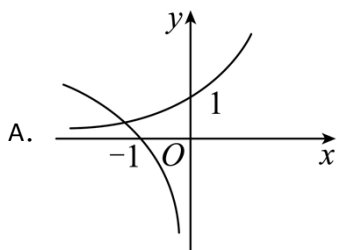
B. $-\frac{1}{3}$

C. 0

D. $\frac{1}{3}$

7. (21-22 高三下·北京·开学考试) 已知 $\lg a + \lg b = 0$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$, $b > 0$ 且 $b \neq 1$), 则函

数 $f(x) = a^x$ 与 $g(x) = \log_{\frac{1}{b}} x$ 的图象可能是 ()



8. (21-22 高三上·江苏扬州·期末) 2018 年 9 月 24 日, 阿贝尔奖和菲尔兹奖双料得主, 英国

89 岁高龄的著名数学家阿蒂亚爵士宣布自己证明了黎曼猜想, 这一事件引起了数学界的震

动. 在 1859 年, 德国数学家黎曼向科学院提交了题目为《论小于某值的素数个数》的论文并

提出了一个命题, 也就是著名的黎曼猜想. 在此之前著名的数学家欧拉也曾研究过这个何

题, 并得到小于数字 x 的素数个数大约可以表示为 $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$ 的结论. 若根据欧拉得出的结

论, 估计 10000 以内的素数个数为 () (素数即质数, $\lg e \approx 0.43$, 计算结果取整数)

A. 1079

B. 1075

C. 434

D. 2500

9. (2023·天津·高考真题) 设 $a = 1.01^{0.5}$, $b = 1.01^{0.6}$, $c = 0.6^{0.5}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

A. $a < b < c$

B. $b < a < c$

C. $c < b < a$

D. $c < a < b$

10. (2023·河南·模拟预测) 函数 $f(x) = |(\frac{1}{2})^x - 1| - \log_2 x$ 的零点个数为 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

11. (2023·贵州遵义·模拟预测) 今年8月24日, 日本不顾国际社会的强烈反对, 将福岛第一核电站核污染废水排入大海, 对海洋生态造成不可估量的破坏. 据有关研究, 福岛核污水中的放射性元素有21种半衰期在10年以上; 有8种半衰期在1万年以上. 已知某种放射性元素在有机体体液内浓度 c (Bq/L) 与时间 t (年) 近似满足关系式 $c = k \cdot a^t$ (k, a 为大于0的常数且 $a \neq 1$). 若 $c = \frac{1}{6}$ 时, $t = 10$; 若 $c = \frac{1}{12}$ 时, $t = 20$. 则据此估计, 这种有机体体液内该放射性元素浓度 c 为 $\frac{1}{120}$ 时, 大约需要 () (参考数据: $\log_2 3 \approx 1.58, \log_2 5 \approx 2.32$)

A. 43年

B. 53年

C. 73年

D. 120年

12. (2022·广东惠州·二模) 函数 $f(x) = \ln(x+3)$ 的图像与函数 $g(x) = |x^2 - 2|$ 的图像的交点个数为 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 0

二、多选题

13. (2024·全国·模拟预测) 已知 $x > 0$, $y > 0$, 且 $x + y = 1$, 则 ()

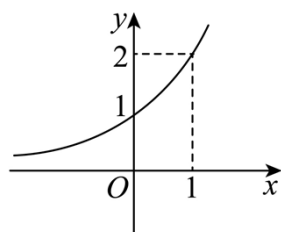
A. $2^{x-y} > \frac{1}{2}$

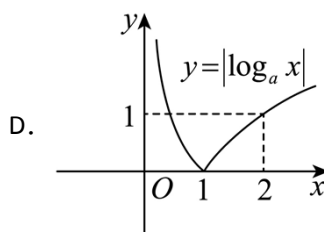
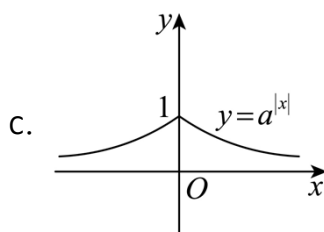
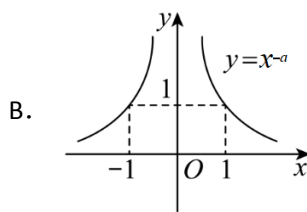
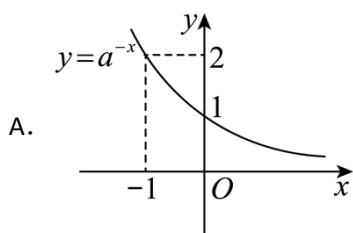
B. $\log_2 x + \log_2 y \leq -2$

C. $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{2}$

D. $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$

14. (2021·山东潍坊·三模) 已知函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象如下图所示, 则下列四个函数图象与函数解析式对应正确的是 ()





15. (23-24 高一下·陕西安康·期末) 已知函数 $f(x) = |\lg x|$, $0 < a < b$, 且 $f(a) = f(b)$, 则 ()

A. $ab = 1$

B. $ab = 10$

C. $a + 2b$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$

D. $(a+1)^2 + (b+1)^2 > 8$

16. (2022·辽宁葫芦岛·二模) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 10x + 1, & x \leq 0 \\ |\lg x|, & x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程

$f(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$) 有四个实数解 x_1, x_2, x_3, x_4 , 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则 $(x_1 + x_2)(x_3 - x_4)$ 的值可能是 ()

A. 0

B. 1

C. 99

D. 100

三、填空题

17. (2023·浙江宁波·二模) 若函数 $y = a^x$ ($a > 1$) 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值与最小值的差为 2, 则 $a =$ _____.

18. (2024·北京通州·二模) 已知函数 $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + \lg(x-2)$ 的定义域为_____.

19. (2024·上海·模拟预测) 函数 $f(x) = \log_2(2x) \cdot \log_8(8x)$ 的最小值为_____.

20. (2023·广东深圳·一模) 定义开区间 (a, b) 的长度为 $b - a$. 经过估算, 函数

$f(x) = \frac{1}{2^x} - x^{\frac{1}{3}}$ 的零点属于开区间_____ (只要求写出一个符合条件, 且长度不超过 $\frac{1}{6}$ 的开区间).

参考答案:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	A	B	D	B	B	B	B	D	B

题号	11	12	13	14	15	16				
答案	B	C	ABD	ABD	AD	BC				

1. D

【分析】由图知函数为偶函数，应用排除，先判断 B 中函数的奇偶性，再判断 A、C 中函数在 $(0, +\infty)$ 上的函数符号排除选项，即得答案.

【详解】由图知：函数图象关于 y 轴对称，其为偶函数，且 $f(-2) = f(2) < 0$ ，

由 $\frac{5\sin(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{5\sin x}{x^2+1}$ 且定义域为 $\mathbf{R}$ ，即 B 中函数为奇函数，排除；

当 $x > 0$ 时 $\frac{5(e^x - e^{-x})}{x^2+2} > 0$ 、 $\frac{5(e^x + e^{-x})}{x^2+2} > 0$ ，即 A、C 中 $(0, +\infty)$ 上函数值为正，排除；

故选：D

2. A

【分析】由题意可得 $f(-x) = f(x)$ ，化简整理即可求得 m 的值.

【详解】函数 $f(x) = x(1 + \frac{m}{1-e^x})$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$ ，由 $f(x)$ 是偶函数，得 $f(-x) = f(x)$ ，

即 $-x(1 + \frac{m}{1-e^{-x}}) = x(1 + \frac{m}{1-e^x})$ ，整理得 $\frac{m(e^x - 1)}{e^x - 1} = -2$ ，所以 $m = -2$.

故选：A

3. B

【分析】对实数 a 分类讨论，根据二次函数的性质及指数函数的值域可得结果.

【详解】当 $a = 0$ 时， $f(x) = 2^{-x+1} \in (0, +\infty)$ ，符合题意；

当 $a \neq 0$ 时，因为函数 $f(x) = 2^{ax^2-x+1}$ 的值域为 M 满足 $(1, +\infty) \subseteq M$ ，

由指数函数的单调性可知，即二次函数 $y = ax^2 - x + 1$ 的最小值小于或等于零；

若 $a > 0$ 时，依题意有 $y = ax^2 - x + 1$ 的最小值 $\frac{4a-1}{4a} \leq 0$ ，即 $0 < a \leq \frac{1}{4}$ ，

若 $a < 0$ 时，不符合题意；

综上： $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$ ，

故选：B.

4. D

【分析】根据 T 与 $\lg P$ 的关系图可得正确的选项.

【详解】当 $T = 220$ ， $P = 1026$ 时， $\lg P > 3$ ，此时二氧化碳处于固态，故 A 错误.

当 $T = 270$ ， $P = 128$ 时， $2 < \lg P < 3$ ，此时二氧化碳处于液态，故 B 错误.

当 $T = 300$ ， $P = 9987$ 时， $\lg P$ 与 4 非常接近，故此时二氧化碳处于固态，对应的是非超临界状态，故 C 错误.

当 $T = 360$ ， $P = 729$ 时，因 $2 < \lg P < 3$ ，故此时二氧化碳处于超临界状态，故 D 正确.

故选：D

5. B

【分析】由已知可得出 $\begin{cases} 20^n \times 20 = C \\ 50^n \times 5 = C \end{cases}$ ，可得出 $\left(\frac{5}{2}\right)^n = 4$ ，利用指数与对数的互化、换底公

式以及对数的运算法则计算可得 n 的近似值.

【详解】由题意可得 $\begin{cases} 20^n \times 20 = C \\ 50^n \times 5 = C \end{cases}$ ，所以 $20^n \times 20 = 50^n \times 5$ ，所以 $\left(\frac{5}{2}\right)^n = 4$ ，

$$\text{所以 } n = \log_{\frac{5}{2}} 4 = \frac{\lg 4}{\lg \frac{5}{2}} = \frac{2 \lg 2}{\lg \frac{10}{4}} = \frac{2 \lg 2}{1 - 2 \lg 2} \approx \frac{2 \times 0.3}{1 - 2 \times 0.3} = 1.5.$$

故选：B.

6. B

【分析】先判断出函数 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数，再利用周期性直接求解即可.

【详解】由 $f(x+3) = -f(x)$ ，则 $f(x+6) = -f(x+3) = f(x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数，

又 $f(-x) + f(x) = 0$ ，即 $f(x) = -f(-x)$ ，

$$\text{所以 } f(2024) = f(2) = -f(-2) = -\log_8 2 = -\frac{1}{3}.$$

故选：B.

7. B

【分析】由 $\lg a + \lg b = 0$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$ ， $b > 0$ 且 $b \neq 1$)，得 $ab = 1$ ，从而得到 $g(x) = \log_a x$

与 $f(x) = a^x$ 互为反函数，根据互为反函数的性质即可得到结果.

【详解】 $\because \lg a + \lg b = 0$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$ ， $b > 0$ 且 $b \neq 1$)，

$$\therefore ab = 1, \therefore b = \frac{1}{a},$$

$\therefore g(x) = \log_{\frac{1}{b}} x = \log_a x$ ，函数 $f(x) = a^x$ 与函数 $g(x) = \log_{\frac{1}{b}} x$ 互为反函数，

$\therefore$ 函数 $f(x) = a^x$ 与 $g(x) = \log_{\frac{1}{b}} x$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称，且具有相同的单调性。

故选：B.

8. B

【分析】计算 $\pi(10000)$ 的值，即可得解.

【详解】因为 $\pi(10000) = \frac{10000}{\ln 10000} = \frac{10000}{4 \ln 10} = 2500 \lg e \approx 2500 \times 0.43 = 1075$ ，

所以，估计 10000 以内的素数个数为 1075.

故选：B.

9. D

【分析】根据对应幂、指数函数的单调性判断大小关系即可.

【详解】由 $y = 1.01^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增，则 $a = 1.01^{0.5} < b = 1.01^{0.6}$ ，

由 $y = x^{0.5}$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增，则 $a = 1.01^{0.5} > c = 0.6^{0.5}$.

所以 $b > a > c$.

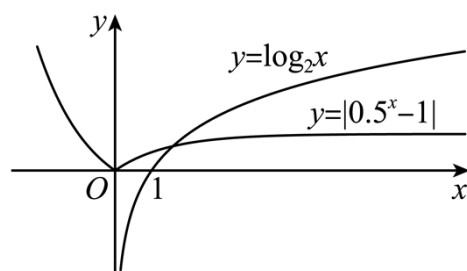
故选：D

10. B

【分析】根据给定条件，作出函数 $y = \log_2 x$ 与 $y = |(\frac{1}{2})^x - 1|$ 图象，利用图象交点个数作答.

【详解】由 $f(x) = 0$ ，得 $|(\frac{1}{2})^x - 1| = \log_2 x$ ，因此函数 $f(x)$ 的零点即为函数 $y = \log_2 x$ 与 $y = |(\frac{1}{2})^x - 1|$ 的图象交点横坐标，

在同一坐标系内作出函数 $y = \log_2 x$ 与 $y = |(\frac{1}{2})^x - 1|$ 的图象，如图，



观察图象知，函数 $y = \log_2 x$ 与 $y = |(\frac{1}{2})^x - 1|$ 的图象有唯一公共点，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/138105044017007014>