微分方程复习

1、根本概念

微分方程　凡含有未知函数的导数或微分的方程叫微分方程.

微分方程的阶　微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶.

微分方程的解　代入微分方程能使方程成为恒等式的函数称为微分方程的解.

1、根本概念

线性微分方程：当微分方程中所含的未知函数及其各阶导数全是一次幂时，微分方程就称为线性微分方程.

在线性微分方程中，假设未知函数及其各阶导数的系数全是常数，那么称这样的微分方程为常系数线性微分方程

1、根本概念

通解　**如果**微分方程的解中含有任意常数，并且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的通解.

特解　确定了通解中的任意常数以后得到的解，叫做微分方程的特解.

初始条件　用来确定任意常数的条件.

初值问题　求微分方程满足初始条件的解的问题，叫初值问题.

2、一阶微分方程的解法

(1)　可别离变量的微分方程

形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$ 的方程，称为可分离变量的方程.

可分离变量方程的特点：等式右边可以分解成两个函数之积，其中一个只是 x 的函数，另一个只是 y 的函数.

可分离变量方程的解法：

（1）分离变量：将该方程化为等式一边只含变量 y ，而另一边只含变量 x 的形式，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x \text{ 其中 } g(y) \neq 0$$

（2）两边积分： $\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x$

（3）计算上述不定积分，得通解.

例1 求$y'+xy=0$的通解.

2、一阶微分方程的解法

(2)　齐次方程

形如 $\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{y}{x})$

解法　作变量代换　$u=\dfrac{y}{x}$

2、一阶微分方程的解法

(3) 可化为齐次的方程

形如 $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$

当$c = c_1 = 0$时，齐次方程．否那么为非齐次方程．

解法 令 $x = X + h,$

$y = Y + k,$ 化为齐次方程.

〔其中h和k是待定的常数〕

2、一阶微分方程的解法

(4) 一阶线性微分方程

形如 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

当$Q(x)\equiv 0$, 方程称为齐次的.

当$Q(x)\not\equiv 0$, 方程称为非齐次的.

1、 齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$.

2、非齐次微分方程的通解为

$$y=[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]e^{-\int P(x)dx}$$

例2 求方程$y' = \dfrac{y + x\ln x}{x}$的通解.

2、一阶微分方程的解法

(5) 伯努利(Bernoulli)方程

形如 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \qquad (n\neq 0,1)$

当$n=0,1$时， 方程为线性微分方程.

当$n\neq 0,1$时， 方程为非线性微分方程.

解法 经过变量代换化为线性微分方程. 令$z=y^{1-n}$,

$$y^{1-n}=z$$

$$=e^{-\int(1-n)P(x)dx}\left(\int Q(x)(1-n)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx+c\right).$$

例3 求通解 $xy' + 2y = 3x^3 y^{\frac{4}{3}}$.

3、可降阶的高阶微分方程的解法

(1) $y^{(n)} = f(x)$ **型**

解法 **接连积分n次，得通解.**

例4 求方程$y^{(3)} = \cos x$的通解 .

解 因为$y^{(3)} = \cos x$, 所以 $y'' = \int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C_1$,

$$y' = \int (\sin x + C_1) \mathrm{d}x = -\cos x + C_1 x + C_2$$

$$y = \int (-\cos x + C_1 x + C_2) \mathrm{d}x = -\sin x + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

3、可降阶的高阶微分方程的解法

(2) $y'' = f(x, y')$ **型**

特点 不显含未知函数y.

解法 令 $y' = P(x)$, $y'' = P'$,

代入原方程, 得 $P' = f(x, P(x))$.

这是一个关于自变量 x 和未知函数$p(x)$的一阶微分方程, 若可以求出其通解$\varphi = \varphi(x, C_1)$, 则$y' = \varphi(x, C_1)$再积分一次就能得原方程的通解.

3、可降阶的高阶微分方程的解法

例 5 求方程$2xy'y''=1+(y')^2$

解 因为方程$2xy'y''=1+(y')^2$

$y'=p(x) \qquad y''(x)=p'(x)$

$$2xp'p=1+p^2,$$

分离变量得 $$\frac{2p\mathbf{d}p}{1+p^2}=\frac{\mathbf{d}x}{x},$$

3、可降阶的高阶微分方程的解法

两边积分$\ln(1+p^2)=\ln x+\ln C_1$，得$1+p^2=C_1x$.

即 $p=\pm\sqrt{C_1x-1}$ ，也即 $y'=\pm\sqrt{C_1x-1}$.

所以 $y=\pm\int(C_1x-1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\pm\frac{2}{3C_1}(C_1x-1)^{\frac{3}{2}}+C_2$为所求方程的通解.

3、可降阶的高阶微分方程的解法

(3) $y'' = f(y, y')$ **型**

特点 不显含自变量x.

解法 令 $y' = P(x)$,

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp(y)}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p,$$

于是, 方程$y'' = f(y, y')$可化为 $p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$.

这 是 关 于 y p

$p = \varphi(y, C_1)$ $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$

3、可降阶的高阶微分方程的解法

例6　求通解 $y'' = \dfrac{1+y'^2}{2y}$.

解　方程不显含x.

令 $y' = P$,　$y'' = P\dfrac{dP}{dy}$,　代入方程，得

$$P\frac{dP}{dy} = \frac{1+P^2}{2y},$$

解得，$1+P^2 = C_1 y$,

$\therefore$　$P = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$,　即 $\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$,

故方程的通解为 $\dfrac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + C_2$.

4. 线性微分方程解的结构

〔1〕　二阶齐次方程解的结构:

形如　$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$　　　(1)

定理 1 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(1) 的两个解, 那末 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 也是(1) 的解. （C_1, C_2 是常数）

定理 2：如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(1) 的两个线性无关的特解，那么 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 就是方程(1) 的通解.

〔2〕二阶非齐次线性方程的解的结构

形如 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ (2)

定理 3　设y^*是(2)的一个特解，Y 是与(2)对应的齐次方程(1)的通解，那么$y = Y + y^*$是二阶非齐次线性微分方程(2)的通解.

定理 4　**设非齐次方程(2)的右端$f(x)$是几个函数之和，如$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$**

而y_1^*与y_2^*分别是方程，

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解，那么$y_1^* + y_2^*$就是原方程的特解.

例7 设 $y'' + p(x)y' = f(x)$ 有一特解为 $\frac{1}{x}$，对应的齐次方程有一特解为 x^2，试求：

（1） $p(x), f(x)$ 的表达式;

（2） 此方程的通解

解 （1） 由题设可得：

$$\begin{cases} 2 + p(x)2x = 0, \\ \frac{2}{x^3} + p(x)(-\frac{1}{x^2}) = f(x), \end{cases}$$

解此方程组，得

$$p(x) = -\frac{1}{x}, \quad f(x) = \frac{3}{x^3}.$$

（2） 原方程为 $y'' - \frac{1}{x}y' = \frac{3}{x^3}$.

显见 $y_1 = 1, y_2 = x^2$ 是原方程对应的齐次方程的两个线性无关的特解

又 $y^* = \frac{1}{x}$ 是原方程的一个特解

由解的结构定理得方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 x^2 + \frac{1}{x}.$$

5、二阶常系数齐次线性方程解法

形如 $y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} y' + P_n y = f(x)$

n阶常系数线性微分方程

$y'' + py' + qy = 0$ 二阶常系数齐次线性方程

$y'' + py' + qy = f(x)$ 二阶常系数非齐次线性方程

解法 由常系数齐次线性方程的特征方程的根确定其通解的方法称为特征方程法.