

分数(百分数)应用题典型解法

一、数形结合思想

数形结合是研究数学问题的重要思想，画线段图能将题目中抽象的数量关系，直观形象地表示出来，进行分析、推理和计算，从而降低解题难度。画线段图常常与其它解题方法结合使用，可以说，它是学生弄清分数（百分数）应用题题意、分析其数量关系的基本方法。

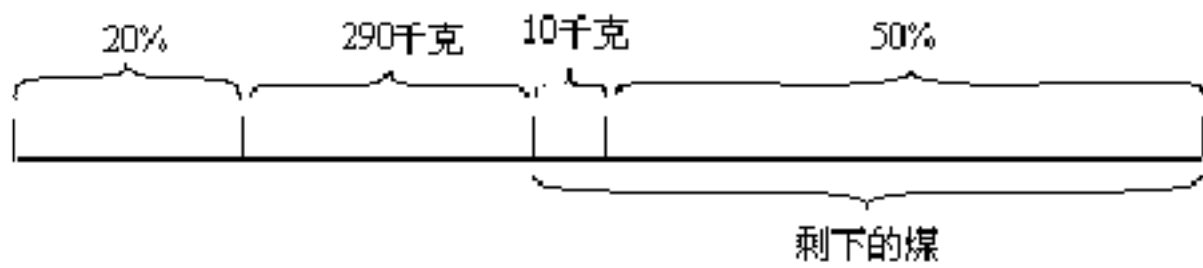
【例 1】一桶油第一次用去 $\frac{1}{5}$ ，第二次比第一次多用去 $\frac{1}{5}$ 20 千克，还剩下 22 千克。原来这桶油有多少千克？

[分析与解]



从图中可以清楚地看出：这桶油的千克数 $\times (1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{5}) = 20 + 22$ ，则这桶油的千克数为： $(20 + 22) \div (1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{5}) = 70$ （千克）

【例 2】一堆煤，第一次用去这堆煤的 20%，第二次用去 290 千克，这时剩下的煤比原来这堆煤的一半还多 10 千克，求原来这堆煤共有多少千克？



[分析与解]

显然，这堆煤的千克数 $\times (1 - 20\% - 50\%) = 290 + 10$ ，则这堆煤的千克数为： $(290 + 10) \div (1 - 20\% - 50\%) = 1000$ （千克）

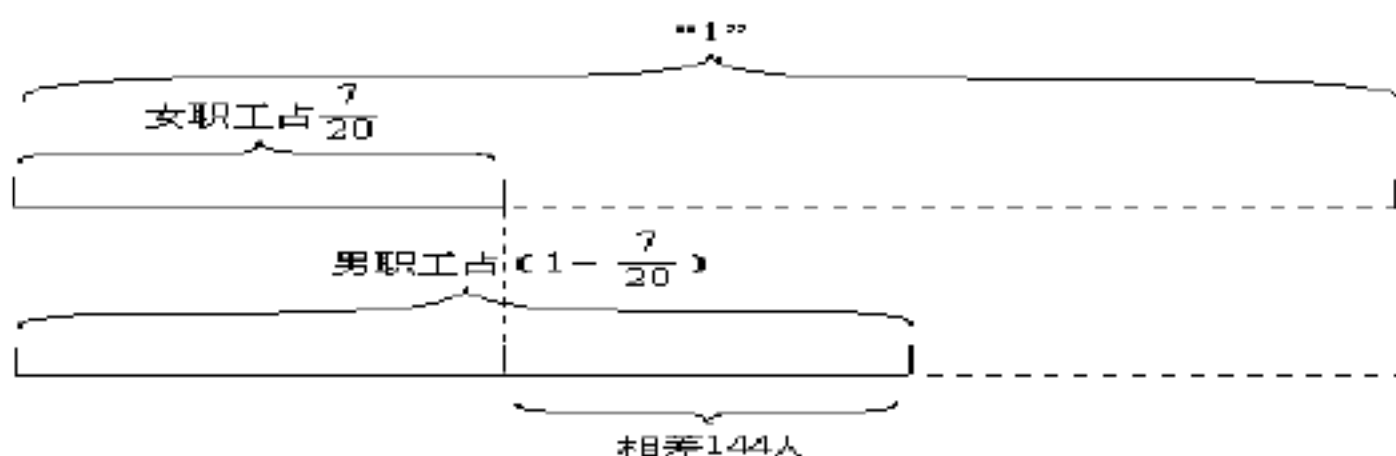
二、对应思想

量率对应是解答分数应用题的根本思想，量率对应是通过题中具体数量与抽象分率之间的对应关系来分析和解决问题的思想。（量率对应常常和画线段图结合使用，效果极佳。）

【例 3】缝纫机厂女职工占全厂职工人数的 $\frac{7}{20}$ ，比男职工少 144 人，缝纫机厂共有职工多少人？

[分析与解]

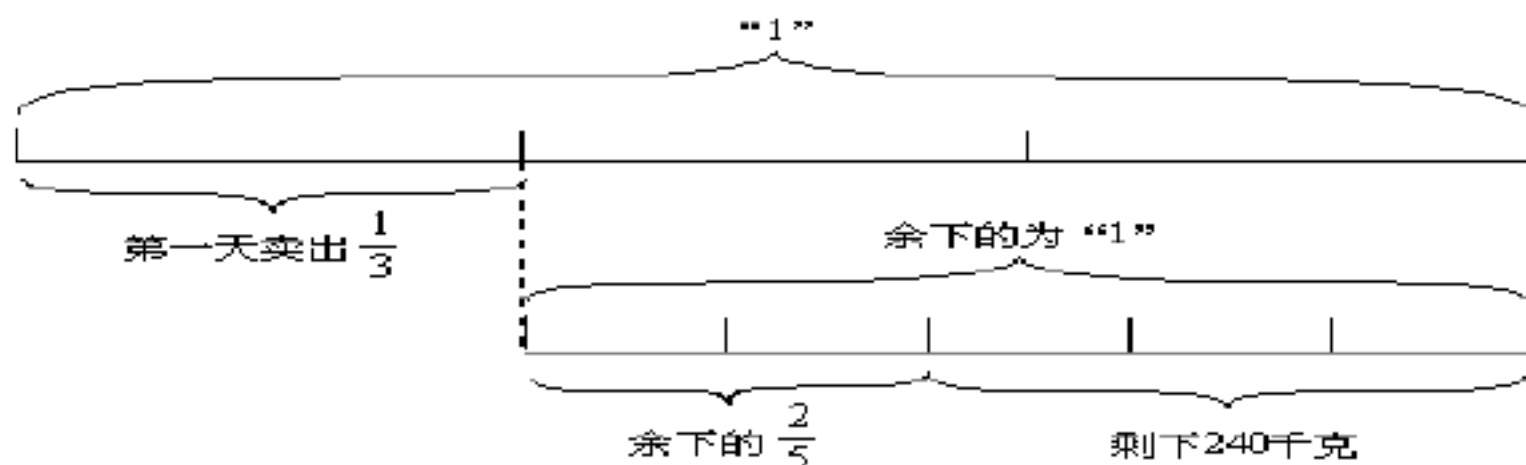
解题的关键是找到与具体数量 144 人的相对应的分率。



从线段图上可以清楚地看出女职工占 $\frac{7}{20}$ ，男职工占 $1 - \frac{7}{20} = \frac{13}{20}$ ，女职工比男职工少占全厂职工人数的 $\frac{13}{20} - \frac{7}{20} = \frac{3}{10}$ ，也就是 144 人与全厂人数的 $\frac{3}{10}$ 相对应。全厂的人数为：

$$144 \div \left(1 - \frac{7}{20} - \frac{7}{20}\right) = 480 \text{ (人)}$$

【例 4】菜农张大伯卖一批大白菜，第一天卖出这批大白菜的 $\frac{1}{3}$ ，第二天卖出余下的 $\frac{2}{5}$ ，这时还剩下 240 千克大白菜未卖，这批大白菜共有多少千克？



[分析与解]

从线段图上可以清楚地看出 240 千克的对应分率是第一天卖出 $\frac{1}{3}$ 后余下的 $\left(1 - \frac{2}{5}\right)$ 。则第一天卖出后余下的大白菜千克数为：

$$240 \div \left(1 - \frac{2}{5}\right) = 400 \text{ (千克)}$$

同理 400 千克的对应分率为这批大白菜的 $\left(1 - \frac{1}{3}\right)$ ，则这批大白菜的千克数为：

$$400 \div \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 600 \text{ (千克)}$$

三、转化思想

转化是解决数学问题的重要手段，可以这样说，任何一个解题过程都离不开转化。它是把某一个数学问题，通过适当的变化转化成另一个数学问题来进行思考、求解，从而实现从繁到简、由难到易的转化。复杂的分数应用题，常常含有几个不同的单位“1”，根据题目的具体情况，将不同的单位“1”转化成统一的单位“1”，使隐蔽的数量关系明朗化。

1、从分数的意义出发，把分数变成份数进行“率”的转化

【例 5】男生人数是女生人数的 $\frac{4}{5}$ ，男生人数是学生总人数的几分之几？

[分析与解]

男生人数是女生的 $\frac{4}{5}$ ，是将女生人数看作单位“1”，平均分成 5 份，男生是这样的 4 份，学生总人数为这样的（4+5）份，求男生人数是学生总人数的几分之几？就是求 4 份是（4+5）份的几分之几？

$$4 \div (4+5) = \frac{4}{9}$$

【例 6】兄弟两人各有人民币若干元，其中弟的钱数是兄的 $\frac{4}{5}$ ，若弟给兄 4 元，则弟的钱数是兄的 $\frac{2}{3}$ ，求兄弟两人原来各有多少元？

[分析与解]

兄弟两人的总钱数是不变量，把它看作单位“1”，原来弟的钱数占两人总钱数的 $\frac{4}{4+5}$ ，后来弟的钱数占两人总钱数的 $\frac{2}{2+3}$ ，则两人的总钱数为：

$$4 \div \left(\frac{4}{4+5} - \frac{2}{2+3} \right) = 90 \text{ (元)}$$

$$\text{弟原来的钱数为：} 90 \times \frac{4}{4+5} = 40 \text{ (元)}$$

$$\text{兄原来的钱数为：} 90 - 40 = 50 \text{ (元)}$$

2、直接运用分率计算进行“率”的转化

【例 7】甲是乙的 $\frac{2}{3}$ ，乙是丙的 $\frac{4}{5}$ ，甲是丙的的几分之几？

[分析与解]

甲是乙的 $\frac{2}{3}$ ，乙是丙的 $\frac{4}{5}$ ，求甲是丙的的几分之几？就是求 $\frac{4}{5}$ 的 $\frac{2}{3}$ 是多少？

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

【例 8】某工厂计划一月份生产一批零件，由于改进生产工艺，结果上半月生产了计划的 $\frac{2}{5}$ ，下半月比上半月多生产了 $\frac{1}{5}$ ，这样全月实际生产了 1980 个零件，一月份计划生产多少个？

[分析与解]

$\frac{1}{5}$ 是以上半月的产量为“1”，下半月比上半月多生产 $\frac{1}{5}$ ，即下半月生产了计划的 $\frac{3}{5} \times (1 + \frac{1}{5}) = \frac{18}{25}$ 。则计划的 $(\frac{2}{5} + \frac{18}{25})$ 为 1980 个，计划生产个数为：

$$1980 \div [\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times (1 + \frac{1}{5})] = 1500 \text{ (个)}$$

3、通过恒等变形，进行“率”的转化

【例 9】甲的 $\frac{4}{5}$ 等于乙的 $\frac{3}{7}$ ，甲是乙的几分之几？

[分析与解]

由条件可得等式：甲 $\times \frac{4}{5}$ = 乙 $\times \frac{3}{7}$

方法 1：等式两边同除以 $\frac{4}{5}$ 得：甲 $\times \frac{4}{5} =$ 乙 $\times \frac{3}{7} \div \frac{4}{5}$

$$\text{甲} = \text{乙} \times \frac{18}{25}$$

方法 2：根据比例的基本性质得：甲：乙 = $\frac{3}{7} : \frac{4}{5}$

化简得：甲：乙 = 15 : 28

即甲是乙的 $\frac{18}{25}$ 。

【例 10】五（2）班有学生 54 人，男生人数的 75% 和女生人数的 80% 都参加了课外兴趣小组，而未参加课外兴趣小组的男、女生人数刚好相等，这个班男、女生各有多少人？

[分析与解]

由条件可得等式：

$$\text{男生人数} \times (1 - 75\%) = \text{女生人数} \times (1 - 80\%)$$

$$\text{男生人数} : \text{女生人数} = 4 : 5$$

就是男生人数是女生人数的 $\frac{4}{5}$ 。

$$\text{女生人数} : 54 \div \left(1 + \frac{4}{5}\right) = 30 \text{ (人)}$$

$$\text{男生人数} : 54 - 30 = 24 \text{ (人)}$$

四、变中求定的解题思想

分数（百分数）应用题中有许多数量前后发生变化的题型，一个数量的变化，往往引起另一个数量的变化，但总存在着不变量。解题时要善于抓住不变量为单位“1”，问题就会迎刃而解。

1、部分量不变

【例 11】有两种糖放在一起，其中软糖占 $\frac{9}{20}$ ，再放入 16 块硬糖以后，软糖占两种糖总数的 $\frac{1}{4}$ ，求软糖有多少块？

[分析与解]

根据题意，硬糖块数、两种糖的总块数都发生变化，但软糖块数不变，可以确定软糖块数为单位“1”，则原来硬糖块数是软糖块数的 $\left(1 - \frac{9}{20}\right) \div \frac{9}{20} = \frac{11}{9}$ 倍。加入 16 块硬糖以后，后来硬糖块数是软糖块数的 $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \div \frac{1}{4} = 3$ 倍，这样 16 块硬糖相当于软糖的 $3 - \frac{11}{9} = \frac{16}{9}$ 倍，从而求出软糖的块数。

$$16 \div \left[\left(1 - \frac{1}{4}\right) \div \frac{1}{4} - \left(1 - \frac{9}{20}\right) \div \frac{9}{20} \right] = 9 \text{ (块)}$$

2、和不变

【例 12】小明看一本课外读物，读了几天后，已读的页数是剩下页数的 $\frac{1}{8}$ ，后来他又读了 20 页，这时已读的页数是剩下页数的 $\frac{1}{6}$ ，这本课外读物共有多少页？

[分析与解]

根据题意，已读页数和未读页数都发生了变化，但这本书的总页数不变，可把总页数看作

单位“1”，原来已读页数占总页数的 $\frac{1}{1+6}$ ，又读了 20 页后，这时已读页数占总页数的 $\frac{1}{1+8}$ ，这 20 页占这本书总页数的 $(\frac{1}{1+6} - \frac{1}{1+8})$ ，则这本课外读物的页数为：

$$20 \div (\frac{1}{1+6} - \frac{1}{1+8}) = 630 \text{ (页)}$$

【例 13】兄弟三人合买一台彩电，老大出的钱是其他两人出钱总数的 $\frac{1}{2}$ ，老二出的钱是他两人出钱总数的 $\frac{1}{3}$ ，老三比老二多出 400 元。问这台彩电多少钱？

[分析与解]

从字面上看 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 的单位“1”都是其他两人出钱的总数，但含义是不同的， $\frac{1}{2}$ 是以老二和老三出钱的总数为单位“1”， $\frac{1}{3}$ 是以老大和老三出钱的总数为单位“1”。但三人出钱的

总数（彩电价格）是不变的，把它确定为单位“1”，老大出的钱数相当于彩电价格的 $\frac{1}{1+2}$ ，老二出的钱数相当于彩电价格的 $\frac{1}{1+3}$ ，老三出的钱数相当于彩电价格的 $1 - \frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+3}$

$\frac{1}{1+3} = \frac{5}{12}$ ，400 元相当于彩电价格的 $\frac{5}{12} - \frac{1}{1+3} = \frac{1}{6}$ 。这台彩电的价格为：

$$400 \div (1 - \frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+3} - \frac{1}{1+3}) = 2400 \text{ (元)}$$

五、假设思想

假设思想是一种重要的数学思想，常用有推测性假设法和冲突式假设法。

1、推测性假设法

推测性假设法是通过假定，再按照题的条件进行推理，然后调整设定内容，从而得到正确答案。

【例 14】一条公路修了 1000 米后，剩下部分比全长的 $\frac{3}{5}$ 少 200 米，这条公路全长多少米？

[分析与解]

由题意知，假设少修 200 米，也就是修 $1000 - 200 = 800$ （米），那么剩下部分正好是全长的 $\frac{3}{5}$ ，因此已修的 800 米占全长的 $(1 - \frac{3}{5})$ ，所以这条公路全长为：

$$(1000 - 200) \div (1 - \frac{3}{5}) = 2000 \text{ (米)}$$

2、冲突式假设法

冲突式假设法是解应用题中常用的一种思维方法。通过对某种量的大胆假设，再依照已知条件进行推算，根据数量上出现的矛盾冲突，进行比较，作适当调整，从而找到正确答案的方法。

【例 15】甲、乙两班共有 96 人，选出甲班人数的 $\frac{1}{4}$ 和乙班人数的 $\frac{1}{5}$ ，组成 22 人的数学兴趣小组，问甲、乙两班原来各有多少人？

[分析与解]

假设两班都选出 $\frac{1}{4}$ ，则选出 $96 \times \frac{1}{4} = 24$ （人），假设比实际多选出 $24 - 22 = 2$ （人）。

调整：这是因为把选出乙班人数的 $\frac{1}{5}$ 假设为选出 $\frac{1}{4}$ ，多算了 $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ ，由此可先算出乙

班原来的人数。

$$(96 \times \frac{1}{4} - 22) \div (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) = 40 \text{ (人)}$$

甲班原来的人数： $96 - 40 = 56$ （人）

【例 16】某书店出售一种挂历，每售出 1 本可得 18 元利润。售出一部分后每本减价 10 元出售，全部售完。已知减价出售的挂历本数是减价前出售挂历本数的 $\frac{2}{3}$ 。书店售完这种挂历共获利润 2870 元。书店共售出这种挂历多少本？

[分析与解]

根据减价出售的挂历本数是减价前出售挂历本数的 $\frac{2}{3}$ ，我们假设减价前出售的挂历为 3

本，减价出售的挂历为 2 本，则售出这 $2+3=5$ （本）挂历所获的利润为： $18 \times 3 + (18 - 10) \times 2 = 70$ （元）

这与实际共获利润 2870 元相矛盾，这是什么原因造成的呢？

调整：这是因为把出售的挂历假设为 5 本，根据实际共获利润是假设所获利润的 $2870 \div 70 = 41$ 倍，实际共售出挂历的本数也应该是假设 5 本的 41 倍。即 $5 \times 41 = 205$ （本）

六、用方程解应用题思想

在用算术方法解应用题时，数量关系比较复杂，特别是逆向思考的应用题，往往棘手，而这些的应用题用列方程解答则简单易行。列方程解应用题一开始就用字母表示未知量，使它

与已知量处于同等地位，同时运算，组成等式，然后解答出未知数的值。列方程解应用题的关键是根据题中已知条件找出的等量关系，再根据等量关系列出方程。

【例 17】某工厂第一车间人数比第二车间的 $\frac{4}{5}$ 多 16 人，如果从第二车间调 40 人到第一车间，这时两个车间的人数正好相等，原来两个车间各有多少人？

[分析与解]

根据题意，有如下数量关系：

第一车间人数+40 人=第二车间人数-40 人

解：设第二车间有 X 人。

$$\frac{4}{5}X + 16 + 40 = X - 40$$

解得： X=480

第一车间人数为： $\frac{4}{5}X + 16 = \frac{4}{5} \times 480 + 16 = 400$ （人）

【例 18】老师买来一些本子和铅笔作奖品，已知本子本数与铅笔支数的比是 4：3，每位竞赛获奖的同学奖 8 本本子和 5 支铅笔，奖了 7 位同学后，剩下的本子本数与铅笔支数的比是 3：4，老师买来本子、铅笔各多少？

[分析与解]

根据题意，有如下数量关系：

（本子本数-8×7）：（铅笔支数-5×7）=3：4

解：设老师买来本子 4X 本，铅笔 3X 支。

$$(4X - 8 \times 7) : (3X - 5 \times 7) = 3 : 4$$

解得： X = 17

本子数： 4X=4×17=68（本）

铅笔数： 3X=3×17=51（本）

分数应用题解题方法

解答分数乘法应用题时，可以借助于线段图来分析数量关系。在画线段图时，先画

单位“1”的量。

一、分数应用题主要讨论的是以下三者之间的关系。

1、分率：表示一个数是另一个数的几分之几，这几分之几通常称为分率。

2、标准量：解答分数应用题时，通常把题目中作为单位“1”的那个数，称为标准量。（也叫单位“1”的数量）

3、比较量：解答分数应用题时，通常把题目中同标准量比较的那个数，称为比较量。（也叫分率对应的数量）

二、分数应用题的分类。（三类）

1、求一个数的几分之几是多少。（解这类应用题用乘法）

这类问题特点是已知一个看作单位“1”的数，求它的几分之几是多少，它反映的是整体与部分之间关系的应用题，基本的数量关系是：

单位“1”的量 $\times$ 分率=分率对应的量。

2、已知一个数的几分之几是多少，求这个数。（解这类应用题用除法）

这类问题特点是已知一个数的几分之几是多少的数量，求单位“1”的量。基本的数量关系是：

分率对应的量 $\div$ 分率=单位“1”的量。

3、求一个数是另一个数的几分之几。

这类问题特点是已知两个数量，比较它们之间的倍数关系，解这类应用题用除法。基本的数量关系是：

比较量 $\div$ 标准量=分率。

在分数应用题教学中，我认为它的难点，表现在两个方面：一是正确找出或选准标准量，即要求学生理解题意，抓住题目中的数量关系的内在规律。二是选准“对应量”即找出要求的数量或已知的数量是标准量的几分之几？（“对应量”指的是与单位“1”分率相对应的具体数量）。

三、分数应用题的基本训练。

1、正确审题训练。

正确审题是正确解题的前提。这里所说的审题，首先是根据题中的分率句，能准确分清比较量和单位“1”的量（看分率是谁的几分之几，谁就是单位“1”的量）。

判断单位“1”的量：知道单位“1”的量（用乘法），未知道单位“1”的量（用除法），为确定解题方法奠定基础；其次会把“比”字句转化成“是”字句；第三是能将省略式的分率句换说成比较详细的句子的能力。

2、画线段图的训练。

线段图有直观、形象等特点。按题中的数量比例，恰当选用实线或虚线把已知条件和问题表示出来，数形结合，有利于确定解题思路。

3、量、率对应关系训练。

量、率对应关系的训练是解较复杂分数应用题的重要环节。通过训练，能根据应用题的已知条件发挥联想，找出各种量、率间接对应关系，为正确解题铺平道路。

如：一批货物，第一次运走总数的 $\frac{1}{5}$ ，第二次运走总数的 $\frac{1}{4}$ ，还剩下 143 吨。则量、率对应关系有：

(1) 把货物的总重量看做是：单位“1”

(2) 第一次运走的占总重量的： $\frac{1}{5}$

(3) 第二次运走的占总重量的： $\frac{1}{4}$

(4) 两次共运走的占总重量的： $\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$

(5) 第一次比第二次少运走的占总重量的： $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$

(6) 第一次运走后剩下的占总重量的： $1 - \frac{1}{5}$

(7) 第二次运走后剩下的占总重量的： $1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{4}$

(8) 剩下 143 吨（数量）占总重量的： $1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{4}$ （分率）

4、转化分率训练。

在解较复杂的分数应用题时，常需要将间接分率转化为直接运用于解题的分率。

