

2023—2024 学年普通高中高二（上）期末教学质量检测

数学试题

本试卷共 4 页，22 题，满分 150 分，考试时间 120 分钟.

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内. 写在试卷、草稿纸和答题卡的非答题区域均无效.
4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交.

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 直线 $x + 2y + 2024 = 0$ 在 y 轴上的截距为 ()

- A. -2024 B. -1012 C. 1012 D. 2024

【答案】B

【解析】

【分析】利用截距的定义，结合直线方程即可得解.

【详解】因为 $x + 2y + 2024 = 0$ ，令 $x = 0$ ，得 $y = -1012$ ，

所以直线 $x + 2y + 2024 = 0$ 在 y 轴上的截距为 -1012.

故选：B.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，前 n 项和为 S_n ，若 $a_{25} + a_{2000} = 2$ ，则 S_{2024} 等于 ()

- A. 2023 B. 2024 C. 2025 D. 2048

【答案】B

【解析】

【分析】利用等差数列的下标和性质与求和公式即可得解.

$$\text{所以 } S_{2024} = \frac{(a_1 + a_{2024}) \times 2024}{2} = \frac{(a_{25} + a_{2000}) \times 2024}{2} = 2024.$$

3. 直线 m, n 的方向向量分别为 $\vec{m}, \vec{n}$, 平面 α 的法向量为 $\vec{a}$, 则下列选项正确的是 ()

B. 若 $m \perp \alpha$, 则 $\vec{m} \cdot \vec{a} = 0$

D. 若 $n \parallel \alpha$, 则 $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$

【解析】

【详解】若 $m \parallel n$ ，则 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 共线向量，故 A 错误；

若 $m \perp n$ ，则 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$ ，故 C 错误；

若 $n // \alpha$, 则 $\dot{n} \cdot \dot{\alpha} = 0$, 故 D 正确,

4. 直线 $x+2ay-2=0$ 与 $(2a-1)x-ay+5=0$ 平行, 则 a 的值为 ()

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{4}$ 或 0

D. $\frac{1}{2}$ 或 0

【答案】C

【解析】

【分析】利用直线平行求得 a ，再进行检验即可得解.

【详解】因为直线 $x+2ay-2=0$ 与 $(2a-1)x-ay+5=0$ 平行,

所以 $1 \times (-a) - 2a \times (2a - 1) = 0$, 解得 $a = 0$ 或 $a = \frac{1}{4}$,

当 $a=0$ 时, 两直线分别为 $x-2=0$, $-x+5=0$, 显然平行, 满足题意;

当 $a = \frac{1}{4}$ 时, 两直线分别为 $x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$, $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + 5 = 0$, 也平行, 满足题意;

综上, $a = 0$ 或 $a = \frac{1}{4}$.

故选: C.

5. 2023 年 9 月第 14 届中国国际园林博览会在安徽合肥举行. 某媒体甲、乙、丙三名记者去河南园、北京

园、香港园进行现场报道，若每个地方恰有一名记者，则甲去河南园的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用列举法，结合古典概型的概率公式即可得解.

【详解】记河南园、北京园、香港园分别为1,2,3,

则样本空间 $\Omega = \{(\text{甲} 1, \text{乙} 2, \text{丙} 3), (\text{甲} 1, \text{乙} 3, \text{丙} 2), (\text{甲} 2, \text{乙} 1, \text{丙} 3),$

$(\text{甲} 2, \text{乙} 3, \text{丙} 1), (\text{甲} 3, \text{乙} 2, \text{丙} 1), (\text{甲} 3, \text{乙} 1, \text{丙} 2)\}$, 共6个基本事件,

则甲去河南园的基本事件有2件,

所以甲去河南园的概率为 $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

故选: A.

6. 直线 $y = kx + 2$ 与抛物线 $x^2 = 4y$ 交于 A, B 两点, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ (O 为抛物线顶点) 的值为 ()

- A. -6 B. -4 C. 4 D. 12

【答案】B

【解析】

【分析】联立直线与抛物线方程求得 $x_1 x_2$, 从而利用平面向量数量积的坐标表示即可得解.

【详解】由 $\begin{cases} y = kx + 2 \\ x^2 = 4y \end{cases}$, 得 $x^2 - 4kx - 8 = 0$, 易得 $\Delta > 0$,

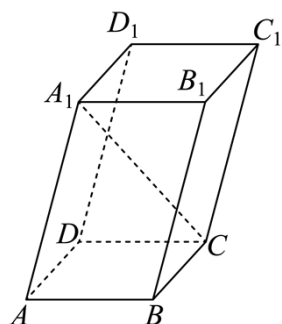
设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 x_2 = -8$,

$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + \frac{x_1^2}{4} \cdot \frac{x_2^2}{4} = -8 + \frac{64}{16} = -4$.

故选: B.

7. 如图, 在平行六面体 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$ 中, $AB = AD = 3$, $AA_1 = 4$, $\angle BAD = 90^\circ$,

$\angle A_1 AB = \angle A_1 AD = 60^\circ$, 则 $|A_1 C|$ 等于 ()



- A. $\sqrt{10}$ B. $\sqrt{46}$ C. $\sqrt{58}$ D. 10

【答案】A

【解析】

【分析】先用向量线性运算表示出 $\vec{A_1C}$ ，再利用数量积的运算法则计算 $|\vec{A_1C}|$ ，从而得解.

【详解】依题意，设 $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$, $\vec{AA_1} = \vec{c}$,

因为 $AB = AD = 3$, $AA_1 = 4$, $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = 60^\circ$,

所以 $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = 9$, $|\vec{c}|^2 = 16$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 3 \times 4 \cos 60^\circ = 6$,

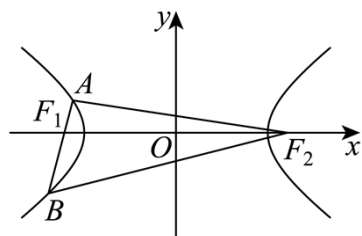
又 $\vec{A_1C} = \vec{A_1A} + \vec{AC} = -\vec{AA_1} + \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$,

所以 $|\vec{A_1C}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{c}}$
 $= \sqrt{9 + 9 + 16 - 2 \times 6 - 2 \times 6} = \sqrt{10}$.

故选：A.

8. 如图，已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，过点 F_1 的直线与双曲线

C 的左支交于点 A, B ，若 $\vec{AF_1} \cdot \vec{AF_2} = 0, \vec{BF_1} = \frac{3}{2} \vec{F_1A}$ ，则双曲线 C 的渐近线方程为 ()



- A. $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}x$ B. $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}x$

C. $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{5}x$

D. $y = \pm \frac{5\sqrt{3}}{6}x$

【答案】C

【解析】

【分析】根据给定条件，利用双曲线的定义结合勾股定理求得 $|AF_1| = \frac{2a}{5}$, $|AF_2| = \frac{12a}{5}$ ，再利用勾股定理求出 $\frac{b}{a}$ 即可得解.

【详解】依题意，设 $|AF_1| = 2m$ ，则 $|BF_1| = 3m$ ， $|AF_2| = 2a + 2m$, $|BF_2| = 2a + 3m$ ，
由 $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} = 0$ ，得 $AF_1 \perp AF_2$ ，在 $\text{Rt}\triangle BAF_2$ 中， $25m^2 + (2m + 2a)^2 = (3m + 2a)^2$ ，
整理得 $5m^2 - am = 0$ ，因此 $m = \frac{a}{5}$ ， $|AF_1| = \frac{2a}{5}$, $|AF_2| = \frac{12a}{5}$ ，
在 $\text{Rt}\triangle F_1AF_2$ 中，有 $(\frac{2a}{5})^2 + (\frac{12a}{5})^2 = (2c)^2$ ，整理得 $37a^2 = 25c^2$ ，
显然 $37a^2 = 25(a^2 + b^2)$ ，即 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{12}{25}$ ，解得 $\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ ，

所以双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{5}x$.

故选：C

【点睛】易错点睛：双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，而双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

($a > 0, b > 0$) 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{a}{b}x$ (即 $x = \pm \frac{b}{a}y$)，应注意其区别与联系.

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. 方程 $mx^2 + (m-1)y^2 = 1$ (m 为常数) 表示的曲线可能是 ()

A. 直线

B. 椭圆

C. 双曲线

D. 抛物线

【答案】ABC

【解析】

【分析】根据题意取不同的 m 值代入方程，可得方程所表示的曲线的形状，从而可得出答案.

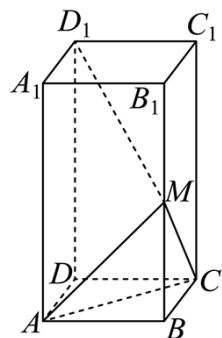
【详解】解析：若 $m = 1$ ，方程表示直线；若 $m > 1$ ，方程表示椭圆；

若 $0 < m < 1$ ，方程表示双曲线； $m \leq 0$ ，方程不表示任何曲线；

由于方程没有一次项，方程不可能表示抛物线。

故选：ABC.

10. 如图，在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， M 是 BB_1 的中点， $AA_1 = 2AB = 2$ ，则 ()



A. $AM \perp CM$

B. $D_1M \perp$ 平面 MAC

C. 二面角 $M - AC - B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

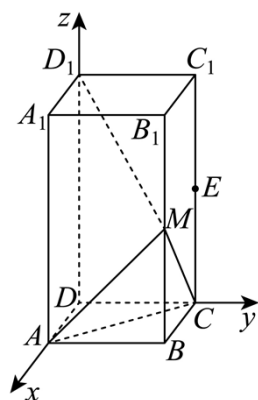
D. D_1 到平面 MAC 的距离为 $\sqrt{3}$

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据题意建立空间直角坐标系，利用空间向量法逐一分析判断即可。

【详解】以 D 为坐标原点，以 DA, DC, DD_1 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系 $D - xyz$ ，



则 $A(1,0,0), B(1,1,0), C(0,1,0), D_1(0,0,2), M(1,1,1)$,

对于 A, $\overrightarrow{AM} = (0,1,1), \overrightarrow{CM} = (1,0,1)$, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 1 \neq 0$,

所以 AM, CM 不垂直，故 A 错误；

对于 B, $\overrightarrow{D_1M} = (1,1,-1)$, 所以 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{D_1M} = 0, \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{D_1M} = 0$,

所以, $\vec{D_1M}$ 是平面 MAC 的一个法向量, 即 $D_1M \perp$ 平面 MAC , 故 B 正确;

对于 C, 易知平面 ABC 的一个法向量 $\vec{n} = (0, 0, 1)$,

$$\text{而 } \left| \cos \langle \vec{n}, \vec{D_1M} \rangle \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{D_1M}|}{|\vec{n}| |\vec{D_1M}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以二面角 $M-AC-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 C 正确;

对于 D, D_1 到平面 MAC 的距离 $d = |\vec{D_1M}| = \sqrt{3}$, 故 D 正确.

故选: BCD.

11. 九连环是我国从古至今广为流传的一种益智游戏, 它用九个圆环相连成串, 以解开为胜. 《红楼梦》中有林黛玉巧解九连环的记载. 九连环一般是用金属丝制成圆形小环九枚, 九环相连, 套在条形横板或各式框架上, 并贯以环柄. 玩时, 按照一定的程序反复操作, 可使 9 个环分别解开, 或合二为一, 假设环的数量为 $n (n \leq 9, n \in \mathbf{N}^*)$, 解开 n 连环所需总步数为 S_n , 解下每个环的步数为 a_n , 数列 $\{a_n\}$ 满足: $S_1 = 1$, $S_2 = 2$, $a_n = 2S_{n-2} + 1 (n \geq 3)$, 则 ()



A. $a_4 = 5$

B. $S_4 = a_5$

C. $S_6 = 42$

D. $\{S_n + S_{n-1}\}$ 成等比数列

【答案】AC

【解析】

【分析】根据题意逐一计算 a_n 与 S_n 的前 6 项, 从而判断 ABC, 利用 $a_n = S_n - S_{n-1}$, 结合等比数列的定义判断 D, 从而得解.

【详解】因为 $S_1 = 1$, $S_2 = 2$, $a_n = 2S_{n-2} + 1 (n \geq 3)$,

所以 $a_3 = 2S_1 + 1 = 3, S_3 = 5$, $a_4 = 2S_2 + 1 = 5, S_4 = 10$,

$a_5 = 2S_3 + 1 = 11, S_5 = 21, a_6 = 2S_4 + 1 = 21, S_6 = 42$, 故 AC 正确, B 错误;

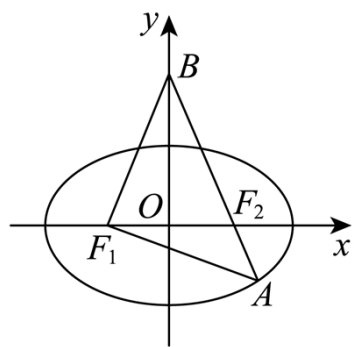
当 $n \geq 3$ 时, $a_n = 2S_{n-2} + 1$, 即 $S_n - S_{n-1} = 2S_{n-2} + 1$,

则 $S_n + S_{n-1} = 2(S_{n-1} + S_{n-2}) + 1$, 所以 $\{S_n + S_{n-1}\}$ 不是等比数列, 故 D 错误.

故选: AC.

12. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 如图, 过 F_2 的直线与 C 交于点

A , 与 y 轴交于点 B , $\vec{F_1A} \cdot \vec{F_1B} = 0$, $\vec{BF_2} = 4\vec{F_2A}$, 设 C 的离心率为 e , 则 ()



A. $|AF_2| = \frac{a}{2}$

B. $2\cos \angle BF_1F_2 = e$

C. $\sin \angle F_1AF_2 = \frac{3}{5}$

D. $e^2 = \frac{2}{5}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】利用平面向量的知识, 结合椭圆的定义与勾股定理求得所需线段关于 a 的表示, 从而利用离心率的定义与余弦定理逐一分析判断各选项即可.

【详解】因为 $\vec{F_1A} \cdot \vec{F_1B} = 0$, $\vec{BF_2} = 4\vec{F_2A}$, 所以 $F_1A \perp F_1B$, $|BF_2| = 4|F_2A|$,

对于 A, 依题意, 设 $|AF_2| = m$, 则 $|BF_2| = 4m = |BF_1|$, $|AF_1| = 2a - m$,

如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABF_1$ 中, $16m^2 + (2a - m)^2 = 25m^2$,

则 $(a - 2m)(a + m) = 0$, 故 $a = 2m$ 或 $a = -m$ (舍去),

所以 $|AF_2| = \frac{a}{2}$, 故 A 正确;

对于 B, 由选项 A 知, $|AF_1| = \frac{3a}{2}$, $|BF_2| = |BF_1| = 2a$, 则 $|AB| = \frac{5a}{2}$,

在 $\text{Rt}\triangle BOF_1$ 中, $\cos \angle BF_1F_2 = \frac{|OF_1|}{|BF_1|} = \frac{c}{2a} = \frac{e}{2}$, 即 $2\cos \angle BF_1F_2 = e$, 故 B 正确;

对于 C, 在 $\text{Rt}\triangle ABF_1$ 中, $\sin \angle F_1AF_2 = \sin \angle F_1AB = \frac{|BF_1|}{|AB|} = \frac{2a}{\frac{5a}{2}} = \frac{4}{5}$, 故 C 错误;

对于 D, 由选项 C 可得, $\cos \angle F_1AF_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \angle F_1AF_2} = \frac{3}{5}$,

在 $\triangle AF_1F_2$ 中, $\cos \angle F_1AF_2 = \frac{\frac{9a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - 4c^2}{2 \times \frac{3a}{2} \times \frac{a}{2}} = \frac{3}{5}$, 整理得 $c^2 = \frac{2}{5}a^2$,

故 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{2}{5}$, 故 D 正确.

故选: ABD.

【点睛】关键点点睛: 本题解决的关键是将各线段用 a, c 表示出来, 从而得解.

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 请将答案填在答题卡对应题号的位置上.

13. 已知 $\vec{AB} = (2, n, -2)$, 平面 α 的法向量 $\vec{n} = (1, -2, 2m)$, 若 $AB \perp \alpha$, 则 $m + n =$ _____.

【答案】 $-\frac{9}{2}$

【解析】

【分析】利用直线与平面垂直得到直线的方向向量与平面的法向量共线, 从而利用空间向量平行的坐标表示即可得解.

【详解】因为 $AB \perp \alpha$, 所以 $\vec{AB}$ 与 $\vec{n}$ 共线,

又 $\vec{AB} = (2, n, -2)$, $\vec{n} = (1, -2, 2m)$, 则 $m \neq 0$,

所以 $\frac{2}{1} = \frac{n}{-2} = \frac{-2}{2m}$, $\therefore m = -\frac{1}{2}, n = -4, \therefore m + n = -\frac{9}{2}$.

故答案为: $-\frac{9}{2}$.

14. 已知点 $A(5, 3)$, 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , P 为抛物线上的点, 则 $\triangle APF$ 周长的最小值为 _____.

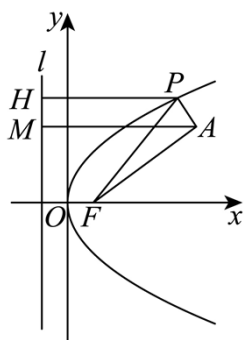
【答案】 11

【解析】

【分析】利用抛物线的定义求得 $|PF| + |PA| \geq |AM|$, 从而得解.

【详解】依题意， $F(1,0)$ ，设抛物线的准线为 $l: x = -1$ ，

分别过点 P, A 作 $PH \perp l$ ， $AM \perp l, H, M$ 为垂足，则 $|PF| = |PH|$ ，如图，



则 $|PF| + |PA| = |PH| + |PA| \geq |AM|$ ，

所以 $\triangle APF$ 周长 $|PF| + |PA| + |AF| \geq |AM| + |AF| = 5 + 1 + \sqrt{(5-1)^2 + 3^2} = 11$ 。

故答案为：11。

15. 圆 $C_1: (x+2)^2 + y^2 = 1$ 与 $C_2: (x-2)^2 + y^2 = 49$ 的位置关系为_____；与圆 C_1, C_2 都内切的动圆圆心的轨迹方程为_____。

【答案】 ① 内含 ②. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

【解析】

【分析】先利用圆心距与两半径之差的比较得到两圆位置关系；再利用两圆内切推得 $|PC_1| + |PC_2| = 6$ ，从而利用椭圆的定义即可得解。

【详解】依题意，圆心 $C_1(-2,0)$ ，半径 $r_1=1$ ，圆心 $C_2(2,0)$ ，半径 $r_2=7$ ，

所以 $|C_1C_2|=4 < r_2 - r_1$ ，则两圆内含；

设动圆的圆心 $P(x,y)$ ，半径为 r ，则 $|PC_1|=r-1, |PC_2|=7-r$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/145031313031012033>