

## 专题 44 二项式定理

### 【题型归纳目录】

题型一：求二项展开式中的参数

题型二：求二项展开式中的常数项

题型三：求二项展开式中的有理项

题型四：求二项展开式中的特定项系数

题型五：求三项展开式中的指定项

题型六：求几个二（多）项式的和（积）的展开式中条件项系数

题型七：求二项式系数最值

题型八：求项的系数最值

题型九：求二项展开式中的二项式系数和、各项系数和

题型十：求奇数项或偶数项系数和

题型十一：整数和余数问题

题型十二：近似计算问题

题型十三：证明组合恒等式

题型十四：二项式定理与数列求和

题型十五：杨辉三角

### 【考点预测】

知识点 1、二项式展开式的特定项、特定项的系数问题

#### (1) 二项式定理

一般地，对于任意正整数  $n$ ，都有： $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^r a^{n-r} b^r + \dots + C_n^n b^n (n \in N^*)$ ，

这个公式所表示的定理叫做二项式定理，等号右边的多项式叫做  $(a+b)^n$  的二项展开式。

式中的  $C_n^r a^{n-r} b^r$  做二项展开式的通项，用  $T_{r+1}$  表示，即通项为展开式的第  $r+1$  项： $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$ ，

其中的系数  $C_n^r$  ( $r=0, 1, 2, \dots, n$ ) 叫做二项式系数，

#### (2) 二项式 $(a+b)^n$ 的展开式的特点：

①项数：共有  $n+1$  项，比二项式的次数大 1；

②二项式系数：第  $r+1$  项的二项式系数为  $C_n^r$ ，最大二项式系数项居中；

③次数：各项的次数都等于二项式的幂指数  $n$ 。字母  $a$  降幂排列，次数由  $n$  到 0；字母  $b$  升幂排列，次数从 0 到  $n$ ，每一项中， $a$ ， $b$  次数和均为  $n$ ；

④项的系数：二项式系数依次是  $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^r, \dots, C_n^n$ ，项的系数是  $a$  与  $b$  的系数（包括二项式系数）。

#### (3) 两个常用的二项展开式：

$$\textcircled{1} (a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + L + (-1)^r \cdot C_n^r a^{n-r} b^r + L + (-1)^n \cdot C_n^n b^n \quad (n \in N^*)$$

$$\textcircled{2} (1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + L + C_n^r x^r + L + x^n$$

#### (4) 二项展开式的通项公式

二项展开式的通项： $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$  ( $r = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ )

公式特点：①它表示二项展开式的第  $r+1$  项，该项的二项式系数是  $C_n^r$ ；

②字母  $b$  的次数和组合数的上标相同；

③  $a$  与  $b$  的次数之和为  $n$ 。

**注意：**①二项式  $(a+b)^n$  的二项展开式的第  $r+1$  项  $C_n^r a^{n-r} b^r$  和  $(b+a)^n$  的二项展开式的第  $r+1$  项  $C_n^r b^{n-r} a^r$  是有区别的，应用二项式定理时，其中的  $a$  和  $b$  是不能随便交换位置的。

②通项是针对在  $(a+b)^n$  这个标准形式下而言的，如  $(a-b)^n$  的二项展开式的通项是  $T_{r+1} = (-1)^r C_n^r a^{n-r} b^r$  (只需把  $-b$  看成  $b$  代入二项式定理)。

## 2、二项式展开式中的最值问题

### (1) 二项式系数的性质

①每一行两端都是 1，即  $C_n^0 = C_n^n$ ；其余每个数都等于它“肩上”两个数的和，即  $C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m$ 。

②对称性每一行中，与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等，即  $C_n^m = C_n^{n-m}$ 。

③二项式系数和令  $a=b=1$ ，则二项式系数的和为  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + L + C_n^r + L + C_n^n = 2^n$ ，变形式  $C_n^1 + C_n^2 + L + C_n^r + L + C_n^n = 2^n - 1$ 。

④奇数项的二项式系数和等于偶数项的二项式系数和在二项式定理中，令  $a=1, b=-1$ ，

$$\text{则 } C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + L + (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0,$$

$$\text{从而得到： } C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdots + C_n^{2r} + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + L + C_n^{2r+1} + \cdots = \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}.$$

⑤最大值：

如果二项式的幂指数  $n$  是偶数，则中间一项  $T_{\frac{n}{2}+1}$  的二项式系数  $C_n^{\frac{n}{2}}$  最大；

如果二项式的幂指数  $n$  是奇数，则中间两项  $T_{\frac{n+1}{2}}$ ， $T_{\frac{n+1}{2}+1}$  的二项式系数  $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ ， $C_n^{\frac{n+1}{2}}$  相等且最大。

### (2) 系数的最大项

求  $(a+bx)^n$  展开式中最大的项，一般采用待定系数法。设展开式中各项系数分别为  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ ，设

第  $r+1$  项系数最大，应有  $\begin{cases} A_{r+1} \geq A_r \\ A_{r+1} \geq A_{r+2} \end{cases}$ ，从而解出  $r$  来。

## 知识点 3、二项式展开式中系数和有关问题

常用赋值举例：

$$(1) \text{ 设 } (a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \text{L} + C_n^r a^{n-r} b^r + \text{L} + C_n^n b^n,$$

二项式定理是一个恒等式, 即对  $a, b$  的一切值都成立, 我们可以根据具体问题的需要灵活选取  $a, b$  的值.

$$\textcircled{1} \text{ 令 } a=b=1, \text{ 可得: } 2^n = C_n^0 + C_n^1 + \text{L} + C_n^n$$

$$\textcircled{2} \text{ 令 } a=1, b=-1, \text{ 可得: } 0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \text{L} + (-1)^n C_n^n, \text{ 即:}$$

$$C_n^0 + C_n^2 + \text{L} + C_n^n = C_n^1 + C_n^3 + \text{L} + C_n^{n-1} \text{ (假设 } n \text{ 为偶数), 再结合 } \textcircled{1} \text{ 可得:}$$

$$C_n^0 + C_n^2 + \text{L} + C_n^n = C_n^1 + C_n^3 + \text{L} + C_n^{n-1} = 2^{n-1}.$$

$$(2) \text{ 若 } f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \text{L} + a_1 x + a_0, \text{ 则}$$

$$\textcircled{1} \text{ 常数项: 令 } x=0, \text{ 得 } a_0 = f(0).$$

$$\textcircled{2} \text{ 各项系数和: 令 } x=1, \text{ 得 } f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \text{L} + a_{n-1} + a_n.$$

$\textcircled{3}$  奇数项的系数和与偶数项的系数和

$$(i) \text{ 当 } n \text{ 为偶数时, 奇数项的系数和为 } a_0 + a_2 + a_4 + \text{L} = \frac{f(1) + f(-1)}{2};$$

$$\text{偶数项的系数和为 } a_1 + a_3 + a_5 + \text{L} = \frac{f(1) - f(-1)}{2}.$$

(可简记为:  $n$  为偶数, 奇数项的系数和用“中点公式”, 奇偶交错搭配)

$$(ii) \text{ 当 } n \text{ 为奇数时, 奇数项的系数和为 } a_0 + a_2 + a_4 + \text{L} = \frac{f(1) - f(-1)}{2};$$

$$\text{偶数项的系数和为 } a_1 + a_3 + a_5 + \text{L} = \frac{f(1) + f(-1)}{2}.$$

(可简记为:  $n$  为奇数, 偶数项的系数和用“中点公式”, 奇偶交错搭配)

若  $f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \text{L} + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ , 同理可得.

**注意:** 常见的赋值为令  $x=0, x=1$  或  $x=-1$ , 然后通过加减运算即可得到相应的结果.

### 【典例例题】

**题型一: 求二项展开式中的参数**

**例 1.** (2023·湖南·模拟预测) 已知  $\left(x + \frac{a}{x}\right)^6$  的展开式中的常数项为  $-160$ , 则实数  $a = (\quad)$

A. 2

B. -2

C. 8

D. -8

**例 2.** (2023·全国·高三专题练习)  $\left(ax - \frac{2}{x}\right)^6$  展开式中的常数项为  $-160$ , 则  $a = (\quad)$

A. -1

B. 1

C.  $\pm 1$

D. 2

例 3. (2023·全国·高三专题练习) 已知二项式  $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^5$  的展开式中,  $x^4$  项的系数为 40, 则  $a =$  ( )

- A. 2                      B. -2                      C. 2 或 -2                      D. 4

例 4. (2023·湖北·高三阶段练习) 若  $(2x+1)^n$  的展开式中  $x^3$  项的系数为 160, 则正整数  $n$  的值为 ( )

- A. 4                      B. 5                      C. 6                      D. 7

例 5. (2023·四川·乐山市教育科学研究所三模(理))  $(m-x)^5$  展开式中  $x^3$  的系数为 -20, 则  $m^2 =$  ( )

- A. 2                      B. 1                      C. 3                      D.  $\sqrt{2}$

### 【方法技巧与总结】

在形如  $(ax^m + bx^n)^N$  的展开式中求  $x^t$  的系数, 关键是利用通项求  $r$ , 则  $r = \frac{Nm-t}{m-n}$ .

### 题型二: 求二项展开式中的常数项

例 6. (2023·全国·高三阶段练习(理))  $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^6$  展开式中的常数项为 ( )

- A. 160                      B. 120                      C. 90                      D. 60

例 7. (2023·浙江·慈溪中学高三开学考试)  $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$  的展开式中的常数项为 ( )

- A. -60                      B. 60                      C. 64                      D. 120

例 8. (2023·全国·高三专题练习(理)) 二项式  $\left(x^5 - \frac{2\sqrt{x}}{x^3}\right)^n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 的展开式中含有常数项, 则  $n$  的最小值

等于 ( )

- A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 5

例 9. (2023·全国·模拟预测) 二项式  $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$  的展开式中的常数项为 ( )

- A. 210                      B. -210                      C. 252                      D. -252

### 【方法技巧与总结】

写出通项, 令指数为零, 确定  $r$ , 代入.

### 题型三: 求二项展开式中的有理项

例 10. (2023·全国·高三专题练习) 在二项式  $(\sqrt{2}+x)^{11}$  的展开式中, 系数为有理数的项的个数是\_\_\_\_\_.

例 11. (2023·湖南·长郡中学模拟预测) 已知  $(\sqrt{3}-x)^n$  展开式的二项式系数之和为 64, 则展开式中系数为有理数的项的个数是\_\_\_\_\_.

例 12. (2023·湖南长沙·模拟预测) 已知  $(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}x)^n$  ( $n \in N^*, 1 \leq n \leq 12$ ) 的展开式中有且仅有两项的系数为有理数, 试写出符合题意的一个  $n$  的值\_\_\_\_\_.

例 13. (2023·全国·高三专题练习)  $(\sqrt{3}x+\sqrt[3]{2})^{100}$  的展开式中系数为有理数项的共有\_\_\_\_\_项.

例 14. (2023·上海·格致中学高三阶段练习) 在  $(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})^{50}$  的展开式中有\_\_项为有理数.

### 【方法技巧与总结】

先写出通项, 再根据数的整除性确定有理项.

#### 题型四: 求二项展开式中的特定项系数

例 15. (2023·北京海淀·一模) 在  $(\sqrt{x}-x)^4$  的展开式中,  $x^2$  的系数为 ( )

- A. -1                      B. 1                      C. -4                      D. 4

例 16. (2023·云南·高三阶段练习 (理)) 在  $(x^2-\frac{1}{x})^6$  的二项展开式中, 第 4 项的二项式系数是 ( )

- A. 20                      B. -20                      C. 15                      D. -15

例 17. (2023·全国·高三专题练习) 若  $(x-2y)^n$  的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等, 则  $n =$  ( ).

- A. 9                      B. 10                      C. 11                      D. 12

例 18. (2023·甘肃·武威第八中学高三阶段练习) 在  $(x-\frac{1}{x})^5$  的展开式中,  $x$  的系数为 ( )

- A. -10                      B. -5                      C. 5                      D. 10

### 【方法技巧与总结】

写出通项, 确定  $r$ , 代入.

#### 题型五: 求三项展开式中的指定项

例 19. (2023·广东·高三阶段练习)  $(3x^2 + 2x + 1)^{10}$  的展开式中,  $x^2$  项的系数为\_\_\_\_\_.

例 20. (2023·广东·仲元中学高三阶段练习)  $(x^2 + x + y)^5$  的展开式中,  $x^5y^2$  的系数为\_\_\_\_\_.

例 21. (2023·山西大附中高三阶段练习(理))  $\left(x^2 + \frac{1}{x} - 2\right)^5$  的展开式中常数项为\_\_\_\_\_.

例 22. (2023·广东·广州市庆丰实验学校一模)  $(2x + \frac{2}{x^2} - 1)^6$  的展开式中的常数项为\_\_\_\_\_. (用数字填写正确答案)

例 23. (2023·全国·高三专题练习)  $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^{15}$  的展开式合并前的项数为 ( )

- A.  $C_{15}^4$                       B.  $A_{15}^4$                       C.  $A_{15}^4 \cdot A_4^4$                       D.  $4^{15}$

例 24. (2023·河北邢台·高三期末(理))  $(x + y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y})^4$  的展开式的常数项为

- A. 36                      B. -36                      C. 48                      D. -48

例 25. (2023·四川绵阳·三模(理)) 在  $\left(1 + \frac{2}{x} - x\right)^5$  的展开式中,  $x^2$  项的系数为 ( )

- A. -50                      B. -30                      C. 30                      D. 50

例 26. (2023·全国·高三专题练习)  $(x + y - 2z)^5$  的展开式中,  $xy^2z^2$  的系数是 ( )

- A. 120                      B. -120                      C. 60                      D. 30

### 【方法技巧与总结】

三项式  $(a + b + c)^n (n \in N)$  的展开式:

$$\begin{aligned}(a + b + c)^n &= [(a + b) + c]^n = L + C_n^r (a + b)^{n-r} c^r + L = L + C_n^r (L + C_{n-r}^q a^{n-r-q} b^q + L) c^r + L \\ &= L + C_n^r C_{n-r}^q a^{n-r-q} b^q c^r + L\end{aligned}$$

若令  $n - r - q = p$ , 便得到三项式  $(a + b + c)^n (n \in N)$  展开式通项公式:

$$C_n^r C_{n-r}^q a^p b^q c^r (p, q, r \in N, p + q + r = n),$$

其中  $C_n^r C_{n-r}^q = \frac{n!}{r!(n-r)!q!(n-r-q)!} = \frac{n!}{p!q!r!}$  叫三项式系数.

题型六: 求几个二(多)项式的和(积)的展开式中条件项系数

例 27. (2023·江苏江苏·高三阶段练习)  $\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^6$  的展开式中  $x^4y^2$  的系数为 ( )

- A. 6                      B. -9                      C. -6                      D. 9

例 28. (2023·四川·高三开学考试(理))  $(x^3+1)\cdot\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^6$  的展开式中的常数项为 ( )

- A. 240                      B. -240                      C. 400                      D. 80

例 29. (2023·云南师大附中高三阶段练习)  $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)(x+2)^6$  的展开式中  $x^3$  的系数为 ( )

- A. 160                      B. -160                      C. 148                      D. -148

例 30. (2023·新疆克拉玛依·三模(理)) 已知  $\left(x+\frac{m}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$  的展开式中常数项为 -40, 则  $m =$  ( )

- A. -3                      B. 3  
C.  $\frac{1}{3}$                       D.  $-\frac{1}{3}$

例 31. (2023·江苏南京·三模)  $(1+x)^4(1+2y)^a$  ( $a \in \mathbf{N}^*$ ) 的展开式中, 记  $x^m y^n$  项的系数为  $f(m, n)$ . 若  $f(0, 1) + f(1, 0) = 8$ , 则  $a$  的值为 ( )

- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

例 32. (2023·全国·高三专题练习) 在  $\left(x+\frac{y^2}{x}\right)\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^5$  的展开式中, 含  $x^3y^2$  的项的系数是 ( )

- A. 10                      B. 12                      C. 15                      D. 20

### 【方法技巧与总结】

分配系数法

#### 题型七: 求二项式系数最值

例 33. (2023·全国·高三专题练习) 在  $(x+1)^n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 的展开式中, 若第 5 项为二项式系数最大的项, 则  $n$  的值不可能是 ( )

- A. 7                      B. 8                      C. 9                      D. 10

例 34. (2023·全国·高三专题练习)  $(1+2x)^7$  展开式中二项式系数最大的项是 ( )

- A.  $280x^3$                       B.  $560x^4$                       C.  $280x^3$  和  $560x^4$                       D.  $672x^5$  和  $560x^4$

**例 35.** (2023·湖南·高三阶段练习) 设  $m$  为正整数,  $(x+y)^{2m}$  的展开式中二项式系数的最大值为  $a$ ,  $(x+y)^{2m+1}$  的展开式中的二项式系数的最大值为  $b$ . 若  $15a=8b$ , 则  $m$  的值为 ( )

A. 5                      B. 6                      C. 7                      D. 8

**例 36.** (2023·全国·高三专题练习)  $\left(\sqrt{x} + \frac{a}{x}\right)^5$  的展开式中  $x$  的系数等于其二项式系数的最大值, 则  $a$  的值为 ( )

A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. -2

**例 37.** (2023·安徽·高三阶段练习 (理)) 在  $(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x)^n$  的展开式中, 只有第五项的二项式系数最大, 则展开式中  $x^6$  的系数为 ( )

A.  $\frac{45}{4}$                       B.  $-\frac{35}{8}$                       C.  $\frac{35}{8}$                       D. 7

**【方法技巧与总结】**

利用二项式系数性质中的最大值求解即可.

**题型八：求项的系数最值**

**例 38.** (2023·全国·高三专题练习) 已知  $(1-3x)^n$  的展开式中各项系数之和为 64, 则该展开式中系数最大的项为\_\_\_\_\_.

**例 39.** (2023·重庆巴蜀中学高三阶段练习)  $(x-1)^9$  的展开式中系数最小项为第\_\_\_\_\_项.

**例 40.** (2023·全国·高三专题练习) 若  $(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[4]{x}})^n$  展开式中前三项的系数和为 163, 则展开式中系数最大的项为\_\_\_\_\_.

**例 41.** (2023·江苏·姜堰中学高三阶段练习)  $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2n}$  ( $n \in N^*$ ) 展开式中只有第 6 项系数最大, 则其常数项为\_\_\_\_\_.

**例 42.** (2023·上海·高三开学考试) 假如  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^n$  的二项展开式中  $x^3$  项的系数是 -84, 则  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^n$  二项展开式中系数最小的项是\_\_\_\_\_.

### 【方法技巧与总结】

有两种类型问题，一是找是否与二项式系数有关，如有关系，则转化为二项式系数最值问题；如无关系，则转化为解不等式组： $\begin{cases} T_r \geq T_{r+1} \\ T_r \geq T_{r-1} \end{cases}$ ，注意：系数比较大小.

#### 题型九：求二项展开式中的二项式系数和、各项系数和

例 43. (2023·全国·高三专题练习) 若  $(1-x)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_7x^7$ , 则  $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_7| =$  \_\_\_\_\_.

(用数字作答)

例 44. (2023·广东·高三阶段练习) 已知  $(2+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , 若  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 81$ , 则自然数  $n$  等于 \_\_\_\_\_.

例 45. (2023·广东·广州大学附属中学高三阶段练习(理)) 若  $(x+y)^3(2x-y+a)^5$  的展开式中各项系数的和为 256, 则该展开式中含字母  $x$  且  $x$  的次数为 1 的项的系数为 \_\_\_\_\_.

例 46. (2023·全国·高三专题练习) 设  $(1-ax)^{2020} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2020}x^{2020}$ , 若

$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 2020a_{2020} = 2020a$  则非零实数  $a$  的值为 ( )

- A. 2                      B. 0                      C. 1                      D. -1

例 47. (2023·全国·高三专题练习) 已知  $(1+x)^{2021} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{2021}x^{2021}$ , 则

$a_{2020} + 2a_{2019} + 3a_{2018} + 4a_{2017} + \dots + 2020a_1 + 2021a_0 =$  ( )

- A.  $2021 \times 2^{2021}$                       B.  $2021 \times 2^{2020}$   
C.  $2020 \times 2^{2021}$                       D.  $2020 \times 2^{2020}$

例 48. (多选题) (2023·全国·高三专题练习) 若  $(1+x) + (1+x)^2 + \dots + (1+x)^{2022} = a_0 + a_1x + \dots + a_{2022}x^{2022}$ , 则

( )

- A.  $a_0 = 2022$                       B.  $a_2 = C_{2023}^3$   
C.  $\sum_{i=1}^{2022} (-1)^i a_i = -1$                       D.  $\sum_{i=1}^{2022} (-1)^{i-1} i a_i = 1$

例 49. (2023·全国·高三专题练习) 设  $(2x-1)^{200} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{200}x^{200}$ , 求

(1) 展开式中各二项式系数的和;

(2)  $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{200}|$  的值.

**例 50.** (2023·全国·高三专题练习) 在①只有第 5 项的二项式系数最大; ②第 4 项与第 6 项的二项式系数相等; ③奇数项的二项式系数的和为 128; 这三个条件中任选一个, 补充在下面(横线处)问题中, 解决下面两个问题.

已知  $(2x-1)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), \_\_\_\_\_

(1) 求  $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n}$  的值;

(2) 求  $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n$  的值.

**例 51.** (2023·全国·高三专题练习)  $(1-2x)^{2022} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2022}x^{2022}$  ( $x \in \mathbf{R}$ ). 求:

(1)  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}$ ;

(2)  $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021}$ ;

(3)  $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{2022}|$ ;

(4) 展开式中二项式系数和以及偶数项的二项式系数和;

(5) 求展开式二项式系数最大的项是第几项?

(6)  $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 2022a_{2022}$ .

**例 52.** (2023·全国·高三专题练习) 已知  $(1-3x)^8 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_8x^8$

(1) 求  $a_1 + a_2 + \dots + a_8$ ;

(2) 求  $a_2 + a_4 + a_6 + a_8$ .

### 【方法技巧与总结】

二项展开式二项式系数和:  $2^n$ ; 奇数项与偶数项二项式系数和相等:  $2^{n-1}$ .

系数和：赋值法，二项展开式的系数表示式： $(ax+b)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  ( $a_0, a_1, \dots, a_n$  是系数)，令  $x=1$  得系数和： $a_0 + a_1 + \dots + a_n = (a+b)^n$ 。

**题型十：求奇数项或偶数项系数和**

**例 53.** (2023·浙江·模拟预测) 已知多项式  $(x^2 - 3x + 2)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_8x^8$ ，则  $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 =$  \_\_\_\_\_， $a_1 =$  \_\_\_\_\_。

**例 54.** (2023·全国·模拟预测) 若  $(1+x)^9 - ax(1+x)^9$  的展开式中，所有  $x$  的偶数次幂项的系数和为 64，则正实数  $a$  的值为\_\_\_\_\_。

**例 55.** (2023·内蒙古·海拉尔第二中学模拟预测 (理)) 已知  $(2+x)^{2n} = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \dots + a_{2n}(1+x)^{2n}$ ，若  $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n-2} + a_{2n} = 2^{15} - 1$ ，则  $n =$  \_\_\_\_\_。

**例 56.** (2023·湖北武汉·模拟预测) 在  $(a+x)(1+x)^5$  展开式中， $x$  的所有奇数次幂项的系数之和为 20，则  $a =$  \_\_\_\_\_。

**例 57.** (2023·全国·高三专题练习) 若  $(x+2+m)^9 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \dots + a_9(x+1)^9$ ，且  $(a_0 + a_2 + \dots + a_8)^2 - (a_1 + a_3 + \dots + a_9)^2 = 3^9$ ，则实数  $m$  的值可以为 ( )

- A. 1 或 -3                  B. -1                          C. -1 或 3                  D. -3

**例 58.** (2023·江苏南通·高三开学考试) 在  $(1 - \frac{2}{\sqrt{x}})^6$  的二项展开式中，奇数项的系数之和为 ( )

- A. -365                          B. -364                          C. 364                          D. 365

**例 59.** (2023·全国·高三专题练习) 若  $(2x-1)^4 = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ，则  $a_0 + a_2 + a_4 =$  ( )

- A. 40                              B. 41                              C. -40                              D. -41

**【方法技巧与总结】**

$(ax+b)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ，令  $x=1$  得系数和： $a_0 + a_1 + \dots + a_n = (a+b)^n$  ①；

令  $x=-1$  得奇数项系数和减去偶数项系数和： $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \dots a_n = (a-b)^n = (a_0 + a_2 + \dots) - (a_1 + a_3 + \dots)$

②，联立①②可求得奇数项系数和与偶数项系数和。

**题型十一：整数和余数问题**

**例 60.** (2023·全国·高三专题练习) 已知  $S = 2^{30} + 2^{29}C_{30}^{29} + 2^{28}C_{30}^{28} + \dots + 2C_{30}^1$ ，则  $S$  除以 10 所得的余数是 ( )

- A. 2                                  B. 3                                  C. 6                                  D. 8

例 61. (2023·河南·南阳中学高三阶段练习(理)) 已知  $74^{2022} + a$  能够被 15 整除, 则  $a$  的一个可能取值是 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 0                      D. -1

例 62. (2023·陕西·西安中学一模(理)) 设  $a \in \mathbb{Z}$ , 且  $0 \leq a < 13$ , 若  $51^{2022} + a$  能被 13 整除, 则  $a =$  ( )

- A. 0                      B. 1                      C. 11                      D. 12

例 63. (2023·全国·高三专题练习)  $1 - 80C_{10}^1 + 80^2C_{10}^2 - 80^3C_{10}^3 + \dots + (-1)^k 80^k C_{10}^k + \dots + 80^{10}C_{10}^{10}$  除以 78 的余数是 ( )

- A. -1                      B. 1                      C. -87                      D. 87

例 64. (2023·全国·高三专题练习(文)) 中国南北朝时期的著作《孙子算经》中, 对同余除法有较深的研究. 设  $a, b, m (m > 0)$  为整数, 若  $a$  和  $b$  被  $m$  除得的余数相同, 则称  $a$  和  $b$  对模  $m$  同余, 记为

$a \equiv b \pmod{m}$ . 若  $a = C_{20}^0 + C_{20}^1 \cdot 2 + C_{20}^2 \cdot 2^2 + \dots + C_{20}^{20} \cdot 2^{20}$ ,  $a \equiv b \pmod{10}$ , 则  $b$  的值可以是 ( )

- A. 2022                      B. 2021                      C. 2020                      D. 2019

### 题型十二: 近似计算问题

例 65. (2023·山西·应县一中高三开学考试(理))  $(1.05)^6$  的计算结果精确到 0.01 的近似值是\_\_\_\_\_.

例 66. (2023·山东·高三阶段练习) 某同学在一个物理问题计算过程中遇到了对数据  $0.98^{10}$  的处理, 经过思考, 他决定采用精确到 0.01 的近似值, 则这个近似值是\_\_\_\_\_.

例 67. (2023·全国·高三专题练习)  $1.95^7$  的计算结果精确到个位的近似值为

- A. 106                      B. 107                      C. 108                      D. 109

### 题型十三: 证明组合恒等式

例 68. (2023·江苏·高三专题练习) (1) 阅读以下案例, 利用此案例的想法化简

$$C_3^0 C_4^1 + C_3^1 C_4^2 + C_3^2 C_4^3 + C_3^3 C_4^4.$$

案例: 考查恒等式  $(1+x)^5 = (1+x)^2(x+1)^3$  左右两边  $x^2$  的系数.

因为右边  $(1+x)^2(x+1)^3 = (C_2^0 + C_2^1x + C_2^2x^2)(C_3^0x^3 + C_3^1x^2 + C_3^2x + C_3^3)$ ,

所以, 右边  $x^2$  的系数为  $C_2^0 C_3^1 + C_2^1 C_3^2 + C_2^2 C_3^3$ ,

而左边  $x^2$  的系数为  $C_5^2$ ,

所以  $C_2^0 C_3^1 + C_2^1 C_3^2 + C_2^2 C_3^3 = C_5^2$ .

(2) 求证:  $\sum_{r=0}^n (r+1)^2 (C_n^r)^2 - n^2 C_{2n-2}^{n-1} = (n+1)C_{2n}^n$ .

**例 69. (多选题)** (2023·江苏·海安市曲塘中学高三期末) 下列关系式成立的是 ( )

- A.  $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 2^3 C_n^3 + \dots + 2n C_n^n = 3n$
- B.  $2C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + 2C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + 2C_{2n}^{2n} = 3 \cdot 2^{2n-1}$
- C.  $C_n^1 \cdot 1^2 + C_n^2 \cdot 2^2 + C_n^3 \cdot 3^2 + \dots + C_n^n n^2 = n \cdot 2n^{n-1}$
- D.  $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

**例 70. (多选题)** (2023·全国·高三专题练习) 设  $n \in \mathbf{N}^*$ , 下列恒等式正确的为 ( )

- A.  $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^{n-1}$
- B.  $1C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$
- C.  $1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + n^2 C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$
- D.  $1^3 C_n^1 + 2^3 C_n^2 + \dots + n^3 C_n^n = (4n-3)2^{n-1}$

#### 题型十四: 二项式定理与数列求和

**例 71.** (2023·全国·高三专题练习(理)) 伟大的数学家欧拉 28 岁时解决了困扰数学界近一世纪的“巴塞尔级数”难题. 当  $n \in \mathbf{N}^*$  时,  $\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \dots$ , 又根据泰勒展开式可以得到

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$ , 根据以上两式可求得  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots =$  ( )

- A.  $\frac{\pi^2}{6}$
- B.  $\frac{\pi^2}{3}$
- C.  $\frac{\pi^2}{8}$
- D.  $\frac{\pi^2}{4}$

**例 72.** (2023·全国·高三专题练习) 已知数列  $\{a_n\}$  是等比数列,  $a_1 = 1$ , 公比  $q$  是  $\left(x + \frac{1}{4x^2}\right)^4$  的展开式的第二项 (按  $x$  的降幂排列).

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项  $a_n$  与前  $n$  项和  $S_n$ ;

(2) 若  $A_n = C_n^1 S_1 + C_n^2 S_2 + \dots + C_n^n S_n$ , 求  $A_n$ .

**例 73.** (2023·全国·高三专题练习) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = a$ ,  $a_{n+1} = \frac{(4n+6)a_n + 4n+10}{2n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(1) 试判断数列  $\{\frac{a_n+2}{2n+1}\}$  是否为等比数列? 若不是, 请说明理由; 若是, 试求出通项  $a_n$ .

(2) 如果  $a=1$  时, 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ . 试求出  $S_n$ , 并证明  $\frac{1}{S_3} + \frac{1}{S_4} + \dots + \frac{1}{S_n} < \frac{1}{10} (n \geq 3)$ .

### 题型十五: 杨辉三角

**例 74.** (2023·山东·高三开学考试) 杨辉三角是二项式系数在三角形中的一种几何排列. 某校数学兴趣小组模仿杨辉三角制作了如下数表.

```

1  2  3  4  5  6  ...
3  5  7  9  11 13  ...
8  12 16 20 24 28  ...
... ..

```

该数表的第一行是数列  $\{n\}$ , 从第二行起每一个数都等于它肩上的两个数之和, 则这个数表中第 4 行的第 5 个数为\_\_\_\_\_, 各行的第一个数依次构成数列 1, 3, 8, ..., 则该数列的前  $n$  项和  $S_n =$ \_\_\_\_\_.

**例 75.** (2023·浙江省杭州学军中学模拟预测) “杨辉三角”是我国数学史上的一个伟大成就, 是二项式系数在三角形中的一种几何排列. 如图所示, 第  $n (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$  行的数字之和为\_\_\_\_\_, 去除所有 1 的项, 依次构成数列 2, 3, 3, 4, 6, 4, 5, 10, 10, 5, ..., 则此数列的前 28 项和为\_\_\_\_\_.

**例 76.** (2023·安徽·合肥市第五中学模拟预测(理)) 杨辉是我国南宋末年的一位杰出的数学家. 他在《详解九章算法》一书中, 画了一个由二项式  $(a+b)^n (n=1, 2, 3, \dots)$  展开式的系数构成的三角形数阵, 称作“开方法本源”, 这就是著名的“杨辉三角”. 在“杨辉三角”中, 从第 2 行开始, 除 1 以外, 其他每一个数值都是它上面的两个数值之和, 每一行第  $k (k \leq n, k \in \mathbf{N}^*)$  个数组成的数列称为第  $k$  斜列. 该三角形数阵前 5 行如图所示, 则该三角形数阵前 2022 行第  $k$  斜列与第  $k+1$  斜列各项之和最大时,  $k$  的值为 ( )

第1行	1 1
第2行	1 2 1
第3行	1 3 3 1
第4行	1 4 6 4 1
第5行	1 5 10 10 5 1
.....	

- A. 1009                      B. 1010                      C. 1011                      D. 1012

**例 77. (多选题)** (2023·全国·高三专题练习) 在 1261 年, 我国南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法》中提出了如图所示的三角形数表, 这就是著名的“杨辉三角”, 它是二项式系数在三角形中的一种几何排列. 从第 1 行开始, 第  $n$  行从左至右的数字之和记为  $a_n$ , 如:  $a_1=1+1=2, a_2=1+2+1=4, \dots, \{a_n\}$  的前  $n$  项和记为  $S_n$ , 依次去掉每一行中所有的 1 构成的新数列 2, 3, 3, 4, 6, 4, 5, 10, 10, 5, ..., 记为  $b_n$ ,  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和记为  $T_n$ , 则下列说法正确的有 ( )

第1行	1 1
第2行	1 2 1
第3行	1 3 3 1
第4行	1 4 6 4 1
第5行	1 5 10 10 5 1
⋮	⋮

- A.  $S_9 = 1022$                       B.  $\left\{ \frac{4a_n}{S_n \cdot S_{n+1}} \right\}$  的前  $n$  项和为  $1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$                       C.  $b_{56} = 66$                       D.  $T_{56} = 4084$

**【过关测试】**

**一、单选题**

1. (2023·江苏·金陵中学高三阶段练习)  $(x-y)(x+y)^8$  的展开式中  $x^3y^6$  的系数为 ( )  
 A. 28                      B. -28                      C. 56                      D. -56
2. (2023·福建师大附中高三阶段练习) 在  $(2+x-x^2)^5$  的展开式中, 含  $x^4$  的项的系数为 ( )  
 A. -120                      B. -40                      C. -30                      D. 200
3. (2023·福建泉州·模拟预测)  $\left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)^{10}$  的展开式中,  $x^2$  的系数等于 ( )  
 A. -45                      B. -10                      C. 10                      D. 45
4. (2023·湖南益阳·模拟预测) 若  $(1+2x)(1-2x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_6x^6$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 则  $a_2$  的值为 ( )  
 A. -20                      B. 20                      C. 40                      D. 60

5. (2023·湖南·高三开学考试) 已知  $(x^2+a)\left(x-\frac{2}{x}\right)^5$  的展开式中各项系数的和为 -3, 则该展开式中  $x$  的系数为 ( )

- A. 0                      B. -120                      C. 120                      D. -160

6. (2023·北京房山·高三开学考试) 若  $(2x-1)^4 = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ , 则  $a_2 =$  ( )

- A. 6                      B. 24                      C. -6                      D. -24

7. (2023·江苏省泰兴中学高三阶段练习) 设  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $x^n = a_0 + a_1(x-1) + \dots + a_n(x-1)^n = b_0 + b_1(x-2) + \dots + b_n(x-2)^n$ , 则 ( )

- A.  $b_0 - a_0 + b_1 - a_1 + \dots + b_n - a_n = 3^n - 2^n$   
 B.  $\frac{b_0}{a_0} + \frac{b_1}{a_1} + \dots + \frac{b_n}{a_n} = 2(a_0 + a_1 + \dots + a_n)$   
 C.  $a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \dots + \frac{1}{n+1}a_n = \frac{1}{n+1}(a_0 + a_1 + \dots + a_n)$   
 D.  $b_1 + 4b_2 + \dots + n^2b_n = \frac{n(n+1)}{4}(a_0 + a_1 + \dots + a_n)$

8. (2023·河北·高三阶段练习) 关于二项式  $(1+ax+x^2)(1-x)^8$ , 若展开式中含  $x^2$  的项的系数为 21, 则  $a =$  ( )

- A. 3                      B. 2                      C. 1                      D. -1

9. (2023·黑龙江·大庆实验中学模拟预测 (理)) 已知  $(2x-3)^7 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_7(x-1)^7$ , 则  $a_3 =$  ( )

- A. 280                      B. 35                      C. -35                      D. -280

## 二、多选题

10. (2023·湖北·黄冈中学高三阶段练习) 已知  $(x+2)^6 = \sum_{i=0}^6 a_i x^i$ , 则 ( )

- A.  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 666$   
 B.  $a_3 = 20$   
 C.  $a_1 + a_3 + a_5 > a_2 + a_4 + a_6$   
 D.  $a_1 + 2a_0 = a_3 + 2a_4 + 3a_5 + 4a_6$

11. (2023·浙江·高三开学考试) 在二项式  $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$  的展开式中, 正确的说法是 ( )

- A. 常数项是第 3 项                      B. 各项的系数和是 1  
 C. 偶数项的二项式系数和为 32                      D. 第 4 项的二项式系数最大

12. (2023·江苏镇江·高三开学考试) 已知函数

$$f(x) = (1-2x)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_6x^6 \quad (a_i \in \mathbf{R}, i = 0, 1, 2, 3, \dots, 6)$$

的定义域为  $\mathbf{R}$ . ( )

A.  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_6 = -1$

B.  $a_1 + a_3 + a_5 = -364$

C.  $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 6a_6 = 12$

D.  $f(5)$  被 8 整除余数为 7

13. (2023·湖南师大附中高三阶段练习) 已知  $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , 下列结论正确的是 ( )

A.  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 3^n$

B. 当  $n=5, x=\sqrt{3}$  时, 设  $(1+2x)^n = a + b\sqrt{3}$ , ( $a, b \in \mathbf{N}^*$ ), 则  $a=b$

C. 当  $n=12$  时,  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  中最大的是  $a_7$

D. 当  $n=12$  时,  $\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} - \frac{a_4}{2^4} + \dots + \frac{a_{11}}{2^{11}} - \frac{a_{12}}{2^{12}} = 1$

14. (2023·全国·高三阶段练习) 已知  $\left(ax + \frac{1}{x}\right)^6$  ( $a > 0$ ) 的展开式中含  $x^{-2}$  的系数为 60, 则下列说法正确的是 ( )

A.  $\left(ax + \frac{1}{x}\right)^6$  的展开式的各项系数之和为 1

B.  $\left(ax + \frac{1}{x}\right)^6$  的展开式中系数最大的项为  $240x^2$

C.  $\left(ax - \frac{1}{x}\right)^6$  的展开式中的常数项为 -160

D.  $\left(ax - \frac{1}{x}\right)^6$  的展开式中所有二项式的系数和为 32

### 三、填空题

15. (2023·浙江省苍南中学高三阶段练习)  $(x-2y)^3(y-2z)^5(z-2x)^7$  的展开式中不含  $z$  的各项系数之和

\_\_\_\_\_.

16. (2023·广东广东·高三阶段练习)  $(x+2y+3z)^6$  的展开式中,  $xy^3z^2$  的系数为\_\_\_\_\_.

17. (2023·河北邯郸·高三开学考试) 已知  $(x+1)(x-1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6$ , 则  $a_0 + a_3$  的值为\_\_\_\_\_.

18. (2023·浙江省淳安中学高三开学考试) 已知  $\left(x - \frac{m}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^5$  的展开式中常数项为 20, 则  $m =$ \_\_\_\_\_.

19. (2023·浙江·高三开学考试) 多项式  $x^2 + x^8 = a_0 + a_1(x+1) + \dots + a_7(x+1)^7 + a_8(x+1)^8$ , 则  $a_3 =$

\_\_\_\_\_.

20. (2023·江苏·南京市中华中学高三阶段练习) 将  $(1+x)^n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 的展开式中  $x^2$  的系数记为  $a_n$ , 则

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2022}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$



## 专题 44 二项式定理

### 【题型归纳目录】

题型一：求二项展开式中的参数

题型二：求二项展开式中的常数项

题型三：求二项展开式中的有理项

题型四：求二项展开式中的特定项系数

题型五：求三项展开式中的指定项

题型六：求几个二（多）项式的和（积）的展开式中条件项系数

题型七：求二项式系数最值

题型八：求项的系数最值

题型九：求二项展开式中的二项式系数和、各项系数和

题型十：求奇数项或偶数项系数和

题型十一：整数和余数问题

题型十二：近似计算问题

题型十三：证明组合恒等式

题型十四：二项式定理与数列求和

题型十五：杨辉三角

### 【考点预测】

知识点 1、二项式展开式的特定项、特定项的系数问题

#### (1) 二项式定理

一般地，对于任意正整数  $n$ ，都有：

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^r a^{n-r} b^r + \dots + C_n^n b^n (n \in N^*),$$

这个公式所表示的定理叫做二项式定理，等号右边的多项式叫做  $(a+b)^n$  的二项展开式。

式中的  $C_n^r a^{n-r} b^r$  做二项展开式的通项，用  $T_{r+1}$  表示，即通项为展开式的第  $r+1$  项：

$$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r,$$

其中的系数  $C_n^r$  ( $r=0, 1, 2, \dots, n$ ) 叫做二项式系数，

#### (2) 二项式 $(a+b)^n$ 的展开式的特点：

①项数：共有  $n+1$  项，比二项式的次数大 1；

②二项式系数：第  $r+1$  项的二项式系数为  $C_n^r$ ，最大二项式系数项居中；

③次数：各项的次数都等于二项式的幂指数  $n$ 。字母  $a$  降幂排列，次数由  $n$  到 0；字母  $b$  升幂排列，次

数从 0 到  $n$ ，每一项中， $a$ ， $b$  次数和均为  $n$ ；

④项的系数：二项式系数依次是  $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^r, \dots, C_n^n$ ，项的系数是  $a$  与  $b$  的系数（包括二项式系数）。

### (3) 两个常用的二项展开式：

$$\textcircled{1} (a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \dots + (-1)^r \cdot C_n^r a^{n-r} b^r + \dots + (-1)^n \cdot C_n^n b^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\textcircled{2} (1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^r x^r + \dots + x^n$$

### (4) 二项展开式的通项公式

$$\text{二项展开式的通项： } T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r \quad (r = 0, 1, 2, 3, \dots, n)$$

公式特点：①它表示二项展开式的第  $r+1$  项，该项的二项式系数是  $C_n^r$ ；

②字母  $b$  的次数和组合数的上标相同；

③  $a$  与  $b$  的次数之和为  $n$ 。

**注意：**①二项式  $(a+b)^n$  的二项展开式的第  $r+1$  项  $C_n^r a^{n-r} b^r$  和  $(b+a)^n$  的二项展开式的第  $r+1$  项  $C_n^r b^{n-r} a^r$  是有区别的，应用二项式定理时，其中的  $a$  和  $b$  是不能随便交换位置的。

②通项是针对在  $(a+b)^n$  这个标准形式下而言的，如  $(a-b)^n$  的二项展开式的通项是  $T_{r+1} = (-1)^r C_n^r a^{n-r} b^r$ （只需把  $-b$  看成  $b$  代入二项式定理）。

## 2、二项式展开式中的最值问题

### (1) 二项式系数的性质

①每一行两端都是1，即  $C_n^0 = C_n^n$ ；其余每个数都等于它“肩上”两个数的和，即  $C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m$ 。

②对称性每一行中，与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等，即  $C_n^m = C_n^{n-m}$ 。

③二项式系数和令  $a=b=1$ ，则二项式系数的和为  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^r + \dots + C_n^n = 2^n$ ，变形式  $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^r + \dots + C_n^n = 2^n - 1$ 。

④奇数项的二项式系数和等于偶数项的二项式系数和在二项式定理中，令  $a=1, b=-1$ ，

$$\text{则 } C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0,$$

$$\text{从而得到： } C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^{2r} + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^{2r+1} + \dots = \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}.$$

⑤最大值：

如果二项式的幂指数  $n$  是偶数，则中间一项  $T_{\frac{n}{2}+1}$  的二项式系数  $C_n^{\frac{n}{2}}$  最大；

如果二项式的幂指数  $n$  是奇数，则中间两项  $T_{\frac{n+1}{2}}$ ， $T_{\frac{n+1}{2}+1}$  的二项式系数  $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ ， $C_n^{\frac{n+1}{2}}$

相等且最大.

## (2) 系数的最大项

求  $(a+bx)^n$  展开式中最大的项, 一般采用待定系数法. 设展开式中各项系数分别为

$A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ , 设第  $r+1$  项系数最大, 应有  $\begin{cases} A_{r+1} \geq A_r \\ A_{r+1} \geq A_{r+2} \end{cases}$ , 从而解出  $r$  来.

### 知识点 3、二项式展开式中系数和有关问题

#### 常用赋值举例:

(1) 设  $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^r a^{n-r} b^r + \dots + C_n^n b^n$ ,

二项式定理是一个恒等式, 即对  $a, b$  的一切值都成立, 我们可以根据具体问题的需要灵活选取  $a, b$  的值.

① 令  $a=b=1$ , 可得:  $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$

② 令  $a=1, b=-1$ , 可得:  $0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n$ , 即:

$C_n^0 + C_n^2 + \dots + C_n^n = C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1}$  (假设  $n$  为偶数), 再结合①可得:

$C_n^0 + C_n^2 + \dots + C_n^n = C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} = 2^{n-1}$ .

(2) 若  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ , 则

① 常数项: 令  $x=0$ , 得  $a_0 = f(0)$ .

② 各项系数和: 令  $x=1$ , 得  $f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ .

③ 奇数项的系数和与偶数项的系数和

(i) 当  $n$  为偶数时, 奇数项的系数和为  $a_0 + a_2 + a_4 + \dots = \frac{f(1) + f(-1)}{2}$ ;

偶数项的系数和为  $a_1 + a_3 + a_5 + \dots = \frac{f(1) - f(-1)}{2}$ .

(可简记为:  $n$  为偶数, 奇数项的系数和用“中点公式”, 奇偶交错搭配)

(ii) 当  $n$  为奇数时, 奇数项的系数和为  $a_0 + a_2 + a_4 + \dots = \frac{f(1) - f(-1)}{2}$ ;

偶数项的系数和为  $a_1 + a_3 + a_5 + \dots = \frac{f(1) + f(-1)}{2}$ .

(可简记为:  $n$  为奇数, 偶数项的系数和用“中点公式”, 奇偶交错搭配)

若  $f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ , 同理可得.

**注意:** 常见的赋值为令  $x=0$ ,  $x=1$  或  $x=-1$ , 然后通过加减运算即可得到相应的结果.

#### 【典例例题】

**题型一: 求二项展开式中的参数**

例 1. (2023·湖南·模拟预测) 已知  $\left(x + \frac{a}{x}\right)^6$  的展开式中的常数项为 -160, 则实数  $a =$  ( )

- A. 2                      B. -2                      C. 8                      D. -8

答案: B

【解析】 $\left(x + \frac{a}{x}\right)^6$  展开式的通项为:  $T_{r+1} = C_6^r \cdot x^{6-r} \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^r = C_6^r \cdot x^{6-2r} \cdot a^r$ ,

取  $r=3$  得到常数项为  $C_6^3 \cdot a^3 = 20a^3 = -160$ , 解得  $a = -2$ .

故选: B

例 2. (2023·全国·高三专题练习)  $\left(ax - \frac{2}{x}\right)^6$  展开式中的常数项为 -160, 则  $a =$  ( )

- A. -1                      B. 1                      C.  $\pm 1$                       D. 2

答案: B

【解析】 $\left(ax - \frac{2}{x}\right)^6$  的展开式通项为  $T_{r+1} = C_6^r (ax)^{6-r} \left(-\frac{2}{x}\right)^r = (-2)^r a^{6-r} C_6^r x^{6-2r} (0 \leq r \leq 6, r \in N)$ ,

$\therefore$  令  $6-2r=0$ , 解得  $r=3$ ,

$\therefore \left(ax - \frac{2}{x}\right)^6$  的展开式的常数项为  $T_4 = (-2)^3 a^{6-3} C_6^3 x^{6-6} = -160a^3 = -160$ ,

$\therefore a^3 = 1$

$\therefore a = 1$

故选: B

例 3. (2023·全国·高三专题练习) 已知二项式  $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^5$  的展开式中,  $x^4$  项的系数为 40, 则

$a =$  ( )

- A. 2                      B. -2                      C. 2 或 -2                      D. 4

答案: C

【解析】由  $T_{r+1} = C_5^r x^{2(5-r)} \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^r = C_5^r a^r x^{10-3r}$ , 令  $10-3r=4$ , 解得  $r=2$ , 所以  $x^4$  项的系数为

$C_5^2 a^2 = 10a^2 = 40$ , 解得  $a = \pm 2$ .

故选: C

例 4. (2023·湖北·高三阶段练习) 若  $(2x+1)^n$  的展开式中  $x^3$  项的系数为 160, 则正整数  $n$  的值为 ( )

- A. 4                      B. 5                      C. 6                      D. 7

答案: C

【解析】由二项式定理知：含  $x^3$  项为  $C_n^3(2x)^3 \mathbf{g}^{n-3} = 8 \times \frac{n \mathbf{g}(n-1) \mathbf{g}(n-2)}{3 \times 2 \times 1} \mathbf{g}^3$ ，

由题意  $\frac{4}{3} \times n(n-1)(n-2) = 160$ ， $n(n-1)(n-2) = 120$ ，

解得  $n = 6$ ；

故选：C.

例 5. (2023·四川·乐山市教育科学研究所三模(理))  $(m-x)^5$  展开式中  $x^3$  的系数为  $-20$ ，则  $m^2 =$  ( )

A. 2                                  B. 1                                  C. 3                                  D.  $\sqrt{2}$

答案：A

【解析】 $(m-x)^5$  的展开式通项公式为  $T_{k+1} = (-1)^k C_5^k m^{5-k} x^k$ ，故  $(-1)^3 C_5^3 m^2 = -20$ ，记得  $m^2 = 2$ ，

故选：A

### 【方法技巧与总结】

在形如  $(ax^m + bx^n)^N$  的展开式中求  $x^t$  的系数，关键是利用通项求  $r$ ，则  $r = \frac{Nm-t}{m-n}$ .

### 题型二：求二项展开式中的常数项

例 6. (2023·全国·高三阶段练习(理))  $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^6$  展开式中的常数项为 ( )

A. 160                                  B. 120                                  C. 90                                  D. 60

答案：A

【解析】 $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^6$  展开式通项为  $T_{r+1} = C_6^r \cdot (2x)^{6-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = C_6^r \cdot 2^{6-r} \cdot x^{6-2r}$ ，令  $6-2r=0$ ，解得  $r=3$ ，

因此，展开式中常数项为  $C_6^3 \cdot 2^3 = 160$ .

故选：A.

例 7. (2023·浙江·慈溪中学高三开学考试)  $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$  的展开式中的常数项为 ( )

A. -60                                  B. 60                                  C. 64                                  D. 120

答案：B

【解析】 $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$  展开式的通项为  $T_{r+1} = C_6^r (2x)^{6-r} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = C_6^r \times 2^{6-r} \times (-1)^r \times x^{6-\frac{3}{2}r}$ ，令  $6-\frac{3}{2}r=0$  解得  $r=4$ ，所以常数项  $C_6^4 \times 2^2 \times (-1)^4 = 60$ .

故选：B.

**例 8.** (2023·全国·高三专题练习 (理)) 二项式  $\left(x^5 - \frac{2\sqrt{x}}{x^3}\right)^n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 的展开式中含有常数项,

则  $n$  的最小值等于 ( )

- A. 2                                      B. 3                                      C. 4                                      D. 5

**答案: B**

**【解析】** 二项式  $\left(x^5 - \frac{2\sqrt{x}}{x^3}\right)^n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 的展开式为

$$T_{r+1} = C_n^r (x^5)^{n-r} \left(-\frac{2\sqrt{x}}{x^3}\right)^r = (-2)^r C_n^r x^{5n - \frac{15}{2}r},$$

令  $5n - \frac{15}{2}r = 0, r = 0, 1, 2, \dots, n, n \in \mathbf{N}^*$ ,

则  $n = \frac{3}{2}r$ ,

因为  $n \in \mathbf{N}^*$

所以当  $r = 2$  时,  $n$  取得最小值 3,

故选: B

**例 9.** (2023·全国·模拟预测) 二项式  $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$  的展开式中的常数项为 ( )

- A. 210                                      B. -210                                      C. 252                                      D. -252

**答案: A**

**【解析】** 二项式  $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$  的展开式的通项为

$$T_{k+1} = C_{10}^k (\sqrt{x})^{10-k} \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k = (-1)^k C_{10}^k x^{\frac{30-5k}{6}}, (k = 0, 1, 2, \dots, 10),$$

令  $\frac{30-5k}{6} = 0$  可得  $k = 6$ , 所以常数项为  $T_7 = (-1)^6 C_{10}^6 = 210$ ,

故选: A

**【方法技巧与总结】**

写出通项, 令指数为零, 确定  $r$ , 代入.

**题型三: 求二项展开式中的有理项**

**例 10.** (2023·全国·高三专题练习) 在二项式  $(\sqrt{2} + x)^{11}$  的展开式中, 系数为有理数的项的个数是\_\_\_\_\_.

**答案: 6**

**【解析】** 二项展开式的通项公式为  $T_{r+1} = C_{11}^r (\sqrt{2})^{11-r} x^r, r = 0, 1, 2, \dots, 11$ ,

第  $r+1$  项的系数为  $C_{11}^r (\sqrt{2})^{11-r}$ ,

当  $11-r=0, 2, 4, 6, 8, 10$  即  $r=1, 3, 5, 7, 9, 11$  时, 系数为有理数,

这样的项的个数为 6,

故答案为: 6

**例 11.** (2023·湖南·长郡中学模拟预测) 已知  $(\sqrt{3}-x)^n$  展开式的二项式系数之和为 64, 则展开式中系数为有理数的项的个数是\_\_\_\_\_.

答案: 4

【解析】依题意, 知  $2^n = 64 = 2^6$ ,  $n = 6$ ,

则展开式的第  $k+1$  项为  $T_{k+1} = C_6^k (\sqrt{3})^{6-k} (-x)^k = (-1)^k C_6^k 3^{\frac{6-k}{2}} x^k$  ( $k=0, 1, \dots, 6$ ),

当  $k=0, 2, 4, 6$  时, 展开式中系数为有理数, 所以展开式中系数为有理数的项的个数为 4.

故答案为: 4.

**例 12.** (2023·湖南长沙·模拟预测) 已知  $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}x)^n$  ( $n \in N^*, 1 \leq n \leq 12$ ) 的展开式中有且仅有两项的系数为有理数, 试写出符合题意的一个  $n$  的值\_\_\_\_\_.

答案:  $n$  取 6, 8, 9, 10, 11 中任意一个值均可.

【解析】 $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}x)^n$  的展开式的通项为  $T_{r+1} = C_n^r \cdot (\sqrt[3]{3})^{n-r} \cdot (\sqrt{2})^r x^r$ ,  $r \leq n$ ,  $r \in N$ .

若系数为有理数, 则  $\frac{r}{2} \in Z$ , 且  $\frac{n-r}{3} \in Z$ . 当  $n=3$  时,  $r=0$ ;

$n=4$  时  $r=4$ ;

$n=5$  时  $r=2$ ;

$n=6$  时  $r=0, 6$ ;

$n=7$  时  $r$  无解;

$n=8$  时  $r=2, 8$ ;

$n=9$  时  $r=0, 6$ ;

$n=10$  时  $r=4, 10$ ;

$n=11$  时  $r=2, 8$ ;

$n=12$  时  $r=0, 6, 12$ .

所以  $n$  可取 6, 8, 9, 10, 11 中的任意一个值.

故答案为:  $n$  取 6, 8, 9, 10, 11 中任意一个值均可.

**例 13.** (2023·全国·高三专题练习)  $(\sqrt{3}x + \sqrt[3]{2})^{100}$  的展开式中系数为有理数项的共有\_\_\_\_\_项.

答案: 17

【解析】 $(\sqrt{3}x + \sqrt[3]{2})^{100}$  的展开式的通项为： $T_{r+1} = C_{100}^r (\sqrt{3}x)^{100-r} (\sqrt[3]{2})^r = C_{100}^r x^{100-r} \times 3^{\frac{100-r}{2}} \times 2^{\frac{r}{3}}$ ，

即  $r$  既是 3 的倍数，又是 2 的倍数，则是 6 的倍数， $r=0, 6, 12, \dots, 96$ ，共 17 项。

故答案为：17.

例 14. (2023·上海·格致中学高三阶段练习) 在  $(\sqrt{2} - \sqrt[3]{3})^{50}$  的展开式中有\_\_项为有理数.

答案：9.

【解析】通项公式： $T_{r+1} = C_{50}^r (\sqrt{2})^{50-r} (-\sqrt[3]{3})^r = (-1)^r C_{50}^r \times 2^{25-\frac{r}{2}} \times 3^{\frac{r}{3}}$ .

当  $\frac{r}{2}$  与  $\frac{r}{3}$  都为整数且  $25 - \frac{r}{2}$  为整数时， $T_{r+1}$  为有理数，则  $r = 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48$ .

∴ 展开式中有 9 项为有理数.

故答案为：9.

### 【方法技巧与总结】

先写出通项，再根据数的整除性确定有理项.

### 题型四：求二项展开式中的特定项系数

例 15. (2023·北京海淀·一模) 在  $(\sqrt{x} - x)^4$  的展开式中， $x^2$  的系数为 ( )

A. -1                      B. 1                      C. -4                      D. 4

答案：B

【解析】 $(\sqrt{x} - x)^4$  的展开式的通项公式为  $T_{r+1} = C_4^r (\sqrt{x})^{4-r} (-x)^r = (-1)^r C_4^r x^{2+\frac{r}{2}}$ ，

令  $2 + \frac{r}{2} = 2$ ，则  $r = 0$ ，故  $x^2$  的系数为  $(-1)^0 C_4^0 = 1$ ，

故选：B.

例 16. (2023·云南·高三阶段练习(理)) 在  $(x^2 - \frac{1}{x})^6$  的二项展开式中，第 4 项的二项式系数

是 ( )

A. 20                      B. -20                      C. 15                      D. -15

答案：A

【解析】第 4 项的二项式系数为  $C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ .

故选：A

例 17. (2023·全国·高三专题练习) 若  $(x-2y)^n$  的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等，则  $n = ( )$ .

A. 9                      B. 10                      C. 11                      D. 12

答案：B

【解析】由题意，二项式 $(x-2y)^n$ 的展开式中第4项与第8项的二项式系数分别为 $C_n^3$ ， $C_n^7$ ，

可得 $C_n^3 = C_n^7$ ，解得 $n = 3 + 7 = 10$ 。

故选：B.

例 18. (2023·甘肃·武威第八中学高三阶段练习) 在 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中， $x$ 的系数为 ( )

A. -10                      B. -5                      C. 5                      D. 10

答案：D

【解析】 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$ 的通项为 $T_{r+1} = C_5^r \cdot x^{5-r} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^r = C_5^r \cdot (-1)^r \cdot x^{5-2r}$ ，

令 $5-2r=1$ ，即 $r=2$ ， $T_3 = C_5^2 \cdot (-1)^2 \cdot x = 10x$ ，

故选：D.

### 【方法技巧与总结】

写出通项，确定 $r$ ，代入.

### 题型五：求三项展开式中的指定项

例 19. (2023·广东·高三阶段练习)  $(3x^2 + 2x + 1)^{10}$ 的展开式中， $x^2$ 项的系数为

\_\_\_\_\_.

答案：210

【解析】因为

$$\begin{aligned} & (3x^2 + 2x + 1)^{10} \\ &= [3x^2 + (2x + 1)]^{10} \\ &= C_{10}^0 (3x^2)^{10} + C_{10}^1 (3x^2)^9 (2x + 1) + C_{10}^2 (3x^2)^8 (2x + 1)^2 + \dots + C_{10}^9 (3x^2)^1 (2x + 1)^9 + C_{10}^{10} (2x + 1)^{10} \end{aligned}$$

所以含有 $x^2$ 项的为 $C_{10}^9 3x^2 \cdot C_9^9 1^9 + C_{10}^{10} C_{10}^8 (2x)^2 1^8 = 210x^2$ 。

所以 $(3x^2 + 2x + 1)^{10}$ 的展开式中，含 $x^2$ 项的系数为210.

故答案为：210.

例 20. (2023·广东·仲元中学高三阶段练习)  $(x^2 + x + y)^5$ 的展开式中， $x^5 y^2$ 的系数为

\_\_\_\_\_.

答案：30

【解析】 $(x^2 + x + y)^5$ 表示5个因式 $x^2 + x + y$ 的乘积，

在这5个因式中，有2个因式选 $y$ ，其余的3个因式中有一个选 $x$ ，剩下的两个因式选 $x^2$ ，

即可得到含 $x^5 y^2$ 的项，

故含  $x^5y^2$  的项系数是  $C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 = 30$

故答案为：30

例 21. (2023·山西大附中高三阶段练习(理))  $\left(x^2 + \frac{1}{x} - 2\right)^5$  的展开式中常数项为

\_\_\_\_\_.

答案：88

【解析】 $\left(x^2 + \frac{1}{x} - 2\right)^5$  中的常数项为  $C_5^1 C_4^2 x^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 (-2)^2 + (-2)^5 = 88$ ,

故答案为:88

例 22. (2023·广东·广州市庆丰实验学校一模)  $\left(2x + \frac{2}{x^2} - 1\right)^6$  的展开式中的常数项为

\_\_\_\_\_。(用数字填写正确答案)

答案：481

【解析】Q  $\left(2x + \frac{2}{x^2} - 1\right)^6$  的通项公式为  $T_{r+1} = C_6^r \cdot \left(2x + \frac{2}{x^2}\right)^{6-r} \cdot (-1)^r$ ,  $0 \leq r \leq 6$ ,

对于  $\left(2x + \frac{2}{x^2}\right)^{6-r}$ , 它的通项公式为  $T_{k+1} = C_{6-r}^k \cdot 2^{6-r} \cdot x^{6-r-3k}$ ,  $0 \leq k \leq 6-r$ ,

令  $6-r-3k=0$ , 可得  $\begin{cases} r=0 \\ k=2 \end{cases}$ , 或  $\begin{cases} r=3 \\ k=1 \end{cases}$ , 或  $\begin{cases} r=6 \\ k=0 \end{cases}$ .

故  $\left(2x + \frac{2}{x^2} - 1\right)^6$  的展开式中的常数项为  $C_6^0 \cdot C_6^2 \cdot 2^6 + C_6^3(-1) \cdot C_3^1 \cdot 2^3 + 1 = 481$ ,

故答案为：481.

例 23. (2023·全国·高三专题练习)  $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^{15}$  的展开式合并前的项数为 ( )

A.  $C_{15}^4$                       B.  $A_5^4$                       C.  $A_5^4 \cdot A_4^4$                       D.  $4^{15}$

答案：D

【解析】从 15 个因式  $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$  中, 每一次都要选一个  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$ 、 $x_4$  相乘,

$\therefore (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^{15}$  展开式中共有  $4^{15}$  项.

故选：D.

例 24. (2023·河北邢台·高三期末(理))  $\left(x + y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^4$  的展开式的常数项为

A. 36                      B. -36                      C. 48                      D. -48

答案：A

【解析】 $\therefore \left(x + y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^4 = \left(x + y - \frac{x+y}{xy}\right)^4 = (x+y)^4 \left(1 - \frac{1}{xy}\right)^4$ ,

$\therefore \left(x + y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^4$  的展开式中的常数项为  $(C_4^2 x^2 y^2) \times (C_4^2 \frac{1}{x^2 y^2}) = 36$ .

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。  
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/145100302121011214>