

专题 4.2 实数及实数运算



【教学目标】

- 1、实数的概念和实数的分类；
- 2、实数与数轴上点的关系。
- 3、掌握实数的运算性质和运算律。
- 4、了解近似数及估算。



【教学重难点】

- 1、实数的分类；
- 2、实数与数轴上点的关系。
- 3、掌握实数的运算性质和运算律。

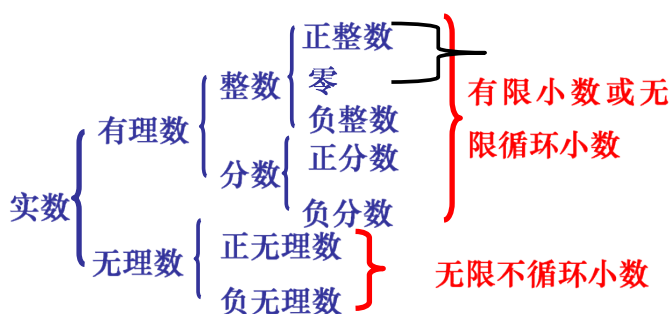
【知识亮解】

知识点一：实数（1）有理数的定义：任何有限小数或无限循环小数也都是有理数。

（2）无理数的定义：无限不循环小数叫无理数。

（3）实数的定义：有理数和无理数统称为实数。

1. 实数的分类



（4）实数与数轴上点的关系：实数与数轴上的点就是一一对应的，即每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点都是表示一个实数。对于数轴上的任意两个点，右边的点所表示的实数总比左边的点表示的实数大。

2. 无理数的概念

无限不循环小数称为无理数。

人们已经证明 $\sqrt{2}$ 是一个无限不循环小数，它的值为 1.414 213 562 373 095 048 801 688 724 209 7...

$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, 0.1010010001....., -2.31456728..... 等都是无理数。

亮题一：实数的分类

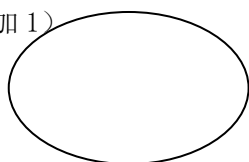
【例 1】★在 3.14、 $\frac{22}{7}$ 、 2π 、0.2020020002 这六个数中，无理数有（ ）

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

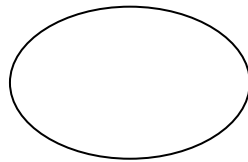
【例 2】★把下列各数分别填入相应的集合内：

$\sqrt[3]{2}$, $\frac{1}{4}$, $\sqrt{7}$, π , $-\frac{5}{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{20}{3}}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt[3]{8}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$, 0, 0.3737737773..... (相邻两个 3

之间 7 的个数逐次增加 1)



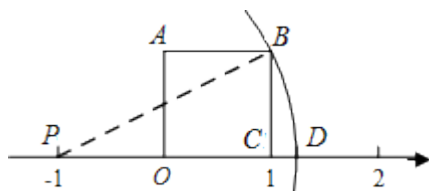
有理数集



无理数集

亮题二：实数与数轴

【例 3】★如图，正方形 OABC 的边 OC 落在数轴上，点 C 表示的数为 1，点 P 表示的数为 -1，以 P 点为圆心，PB 长为半径作圆弧与数轴交于点 D，则点 D 表示的数为（ ）



- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{2}-1$ D. $\sqrt{5}-1$

【例 4】★★如图 1，纸上有五个边长为 1 的小正方形组成的图形纸，我们可以把它剪开拼成一个正方形。

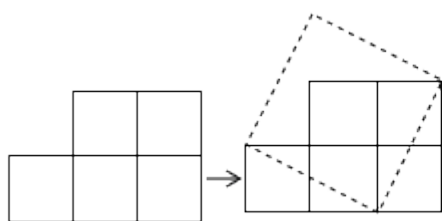


图1

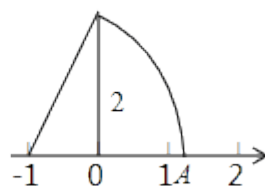


图2

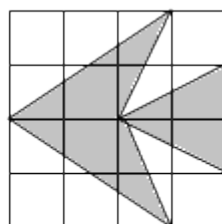


图3

(1) 拼成的正方形的边长为_____.

(2) 如图 2, 以数轴的单位长度的线段为边作一个直角三角形, 以数轴上表示的 -1 点为圆心, 直角三角形的最大边为半径画弧, 交数轴正半轴于点 A, 那么点 A 表示的数是_____.

(3) 如图 3, 网格中每个小正方形的边长为 1, 若能把阴影部分剪拼成一个新的正方形, 求新的正方形的面积和边长.

【例 5】★★在数学活动中, 我们发现了一些有趣的现象, 可以用图形来解决一些数的问题现象一: 如图

(1) 所示, 5×5 的正方形网格中, 每个小正方形的边长均为 1.

(1) 请求出图中阴影部分正方形的面积和边长, 并用直尺和圆规把边长表示的数在数轴上表示出来.

现象二: 为求 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n}$ 的值, 设计了如图 (2) 所示的几何图形.

(2) 请你利用这个几何图形求 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n}$ 的值为_____. (结果保留 n)

请你利用图 (2) 再设计一个能求 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n}$ 的值的几何图形.

知识点二: 实数的大小比较

1、实数的倒数、相反数和绝对值

(1) 相反数

实数与它的相反数是一对数（只有符号不同绝对值相同的两个数叫做互为相反数，零的相反数是零），从数轴上看，互为相反数的两个数所对应的点关于原点对称，如果 a 与 b 互为相反数，则有 $a+b=0$ ， $a=-b$ ，反之亦成立。

（2）绝对值

一个数的绝对值就是表示这个数的点与原点的距离， $|a| \geq 0$ 。正数的绝对值等于它本身；负数的绝对值等于它的相反数；零的绝对值既可以看成是它本身，也可看成它的相反数。正数大于零，负数小于零，正数大于一切负数，两个负数，绝对值大的反而小。

（3）倒数

如果 $ab=1$ ，则 a 与 b 互为倒数，反之亦成立。倒数等于本身的数是 1 和 -1。零没有倒数。

2、数轴和实数大小比较

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴（画数轴时，要注意上述规定的三要素缺一不可）。

比较大小时要真正掌握数形结合的思想，理解实数与数轴的点是一一对应的，并能灵活运用。

（1）**数轴比较**：在数轴上表示的两个数，右边的数总比左边的数大。

（2）**求差比较**：设 a 、 b 是实数，

$$a-b > 0 \Leftrightarrow a > b, \quad a-b = 0 \Leftrightarrow a = b, \quad a-b < 0 \Leftrightarrow a < b$$

（3）**求商比较法**：设 a 、 b 是两正实数 $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b$; $\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$; $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b$;

（4）**绝对值比较法**：设 a 、 b 是两负实数，则 $|a| > |b| \Leftrightarrow a < b$ 。

（5）**平方法**：设 a 、 b 是两负实数，则 $a^2 > b^2 \Leftrightarrow a < b$ 。

亮题三：实数比较大小

【方法点拨】实数大小比较常见方法有：倒数法、作差法、作商法、放缩法、两边平方法等等。

题模一：作差法

【例 6】★比较 $1-\sqrt{2}$ 与 $1-\sqrt{3}$ 的大小。

题模二：作商法

【例 7】★比较 $\frac{\sqrt{3}}{56}$ 与 $\frac{3}{64}$ 的大小。

题模三：倒数法

【例 8】★比较 $\frac{4567}{4587}$ 与 $\frac{9876}{9896}$ 的大小.

题模四：平方法

【例 9】★比较 $5\sqrt{3}$ 与 $3\sqrt{5}$ 的大小.

题模五：特殊值法

【例 10】★若 $0 < x < 1$, 则 x, x^2, x^3 的大小关系是_____

A. $x < x^2 < x^3$

B. $x < x^3 < x^2$

C. $x^3 < x^2 < x$

D. $x^2 < x^3 < x$

知识点三：实数的运算

1、加法交换律

$$a + b = b + a$$

2、加法结合律

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

3、乘法交换律

$$ab = ba$$

4、乘法结合律

$$(ab)c = a(bc)$$

5、乘法对加法的分配律 $a(b + c) = ab + ac$

6、实数混合运算时，对于运算顺序有什么规定？

实数混合运算时，将运算分为三级，**加减为一级运算，乘除为二级运算，乘方为三级运算**。同级运算时，**从左到右依次进行**；**不是同级的混合运算，先算乘方，再算乘除，而后才算加减**；运算中如有**括号**时，**先做括号内的运算，按小括号、中括号、大括号的顺序进行**。

7、有理数除法运算法则就什么？

有理数除法运算法则可用两种方式表述：第一，除以一个不等于零的数，等于乘以这个数的倒数；第二，两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除。零除以任何一个不为零的数，商都是零。

8、什么叫有理数的乘方？幂？底数？指数？

相同因数相乘的积的运算叫乘方，乘方结果叫幂，相同因数的个数叫指数，这个因数叫底数。记作： a^n

9、有理数乘方运算的法则是什麼？

负数的奇次幂是负数，负数的偶次幂是正数。正数的任何次幂都是正数。零的任何正整数幂都是零。

10、加括号和去括号时各项的符号的变化规律是什麼？

去（加）括号时如果括号外的因数是正数，去（加）括号后式子各项的符号与原括号内的式子相应各项的符号相同；括号外的因数是负数去（加）括号后式子各项的符号与原括号内式子相应各项的符号相反。

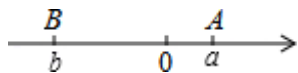
亮题四：实数的运算化简

【例 11】★计算：.

【例 12】★ a, b 互为相反数， c, d 互为倒数， x 的绝对值为 $\sqrt{5}$ ，求代数式 $\sqrt{a+b} - x^2 + cd x - \sqrt[3]{cd}$ 的值.

【例 13】★已知 a, b 互为相反数， c, d 互为倒数， m 的算术平方根等于它本身， p 是平方根等于本身的实数，求 $p^{2019} + cd + \frac{a+b}{\pi} + m^2$ 的值.

【例 14】★实数 a, b 在数轴上对应点 A, B 的位置如图，化简： $|a+b| - \sqrt{a^2}$.



知识点四：近似数

1. 取一个数的近似数有多种方法, 四舍五入 是最常用的一种方法

例如: 圆周率 $\pi = 3.1415926\ldots$

若精确到个位 (或精确到 1), 则 $\pi \approx 3$

若精确到十分位 (或精确到 0.1), 则 $\pi \approx 3.1$

若精确到百分位 (或精确到 0.01), 则 $\pi \approx 3.14$

若精确到千分位 (或精确到 0.001), 则 $\pi \approx 3.142$

π 若精确到十分位, 则 $\pi \approx 3.1$

也可以说成: π 保留 2 个有效数字: 3、1

2. 有效数字定义:

对一个近似数, 从左面第一个不是零的数字起, 到末位数字止, 所有的数字都称为这个近似数的有效数字。

例 如 : 3.14 有 3 个有效数字, 分别是 3、1、4; 0.010320 有 5 个有效数字, 分别是 1、0、3、2、0.

亮题五：近似数及估算

【例 15】★用四舍五入法, 按括号中的要求把下列各数取近似数.

(1) 0.0198 (精确到 0.001);

(2) 0.34082 (精确到千分位);

(3) 64.49 (精确到个位);

(4) $\frac{5}{3}$ (精确到 0.01);

【例 16】★测得某同学的身高约是 1.66 米, 那么意味着他身高的精确值 x 所在范围是

_____.

【例 17】★已知 $2a-1$ 的算术平方根是 3, $3a+b-1$ 的算术平方根是 4, c 是 的整数部分, 求 $a+2b-c$ 的平方根.

【例 18】★★★阅读材料：

学习了无理数后，某数学兴趣小组开展了一次探究活动：估算 $\sqrt{13}$ 的近似值.

小明的方法：

$$\because \sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16}, \text{ 设 } \sqrt{13} = 3 + k \quad (0 < k < 1) \therefore (\sqrt{13})^2 = (3 + k)^2.$$

$$\therefore 13 = 9 + 6k + k^2 \therefore 13 \approx 9 + 6k \text{ 解得 } k \approx \frac{4}{6} \therefore \sqrt{13} \approx 3 + \frac{4}{6} \approx 3.67.$$

问题：（1）请你依照小明的方法，估算 $\sqrt{41}$ 的近似值；

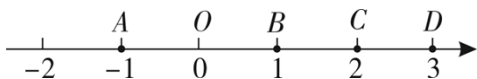
（2）请结合上述具体实例，概括出估算 $\sqrt{m}$ 的公式：已知非负整数 a 、 b 、 m ，若 $a < \sqrt{m} < a+1$ ，且

$m = a^2 + b$ ，则 $\sqrt{m} \approx$ _____ (用含 a 、 b 的代数式表示)；

（3）请用（2）中的结论估算 $\sqrt{37}$ 的近似值.

【亮点训练】

1. 如图，若数轴上的点 A 、 B 、 C 、 D 表示数 -1 、 1 、 2 、 3 ，则表示数 $4 - \sqrt{11}$ 的点应在（ ）



A. A 、 O 之间 B. B 、 C 之间 C. C 、 D 之间 D. O 、 B 之间

2. 如图是小刚同学完成的作业，每题 20 分，他的得分是（ ）

判断. (正确的画“√”, 错误的画“×”)

- ① $(-5)^2$ 的平方根是 5; (√) ② 算术平方根等于它本身的有 0, 1, -1; (×)
③ 64 的立方根是 ± 4 ; (×) ④ 估计 $\sqrt{13}-1$ 的值在 2 到 3 之间. (√)

- A. 20 分 B. 40 分 C. 60 分 D. 80 分

3. 满足 $-\sqrt{5} < x < \sqrt{13}$ 的整数 x 的个数是 ()

- A. 4 个 B. 5 个 C. 6 个 D. 7 个

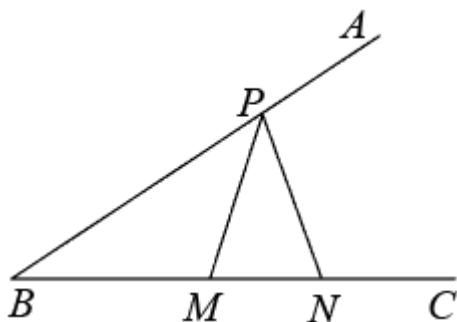
4. 已知 a, b 分别是 $6+\sqrt{13}$ 的整数部分和小数部分, 则 $a+3b =$ ()

- A. 12 B. 13 C. $\sqrt{13}$ D. $3\sqrt{13}$

5. 已知 $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, $3^6=729$, $3^7=2187$, ..., 请你推测 3^{2018} 的个位数字是 ()

- A. 3 B. 9 C. 7 D. 1

6. 如图, $\angle ABC = 30^\circ$, 点 P 在边 BA 上, $BP = 2\sqrt{3}$, 点 M, N 在边 BC 上, $PM = PN$, 若 $MN = 1$, 则 $BM =$ ()



- A. 3.5 B. 3 C. 2.5 D. 2

7. 比较大小: ① $\sqrt{3}$ _____ $\sqrt[3]{5}$; ② $-\sqrt{40}$ _____ -6.3 .

8. 若 a 和 b 为两个连续整数, 且 $a < -\sqrt{41} < b$, 则 $a-b$ 值是 _____.

9. 已知 $2+\sqrt{3}$ 的小数部分为 m , $2-\sqrt{3}$ 的小数部分为 n , 则 $(m+n)^2 =$ _____.

10. 如果 x 为 $\sqrt{3}$ 的小数部分, 那么代数式 $x^2 + 2x + 2020$ 的值为 _____.

11. 在实数范围内定义运算“♥”: $a♥b = a+b-3$, 例如: $2♥5 = 2+5-3 = 4$. 若 $x♥y = 1$, 且 $3x♥2y = 6$, 则 $2x+y$

的值是_____.

12. 对于正整数 k 定义一种运算: $f(k) = \left[\frac{k+1}{4} \right] - \left[\frac{k}{4} \right]$ 例: $f(2) = \left[\frac{2+1}{4} \right] - \left[\frac{2}{4} \right] = 0$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,
例: $[3.7] = 3$, $[-1.5] = -2$. ① $f(2) = 0$; ② $f(k) = 0$ 或 1 ; ③ $f(k+1) \geq f(k)$; ④ $f(k+4) = f(k)$, 则正
确的结论有_____ (请填写序号).

13. (1) 计算: $(-\sqrt{4})^2 - \sqrt[3]{64} + \sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt[3]{0.125}$

(2) 已知 $2a-1$ 的算术平方根是 1 , $b-1$ 的平方根是 ± 2 , c 是 $\sqrt{13}$ 的整数部分, 求 $a-2b+c^2$ 的平方根.

14. 已知 $2a-1$ 的算术平方根是 3 , $3a+b-9$ 的立方根是 2 , c 是 $\sqrt{13}$ 的整数部分, 求 $7a-2b-2c$ 的平方根.

15. 【概念学习】规定: 求若干个相同的有理数 (均不等 0) 的除法运算叫做除方, 如 $2 \div 2 \div 2$,
 $(-3) \div (-3) \div (-3) \div (-3)$ 等, 类比有理数的乘方, 我们把 $2 \div 2 \div 2$ 记作 $2^{\textcircled{3}}$ 读作“ 2 的圈 3 次方”,
 $(-3) \div (-3) \div (-3) \div (-3)$ 记作 $(-3)^{\textcircled{4}}$ 读作“ -3 的圈 4 次方”, 一般地, 把 $a \div a \div a \div \dots \div a (a \neq 0)$ 记作 $a^{\textcircled{n}}$, 读作“ a
的圈 n 次方”.

【初步探究】

(1)直接写出计算结果： $2^{\textcircled{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $(-\frac{1}{2})^{\textcircled{4}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2)关于除方，下列说法错误的是（ ）

A. 任何非零数的圈2次方都等于1

B. 对于任何正整数 n ， $1^{\textcircled{n}} = 1$

C. $3^{\textcircled{3}} = 4^{\textcircled{3}}$

D. 负数的圈奇数次方结果是负数，负数的圈偶数次方结果是正数

【深入思考】我们知道，有理数的减法运算可以转化为加法运算，除法运算可以转化为乘法运算，有理数的除方运算如何转化为乘方运算呢？ $2^{\textcircled{4}} = 2 \div 2 \div 2 \div 2 = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^2$ 。

(3)试一试：仿照上面的算式，将下列运算结果直接写成幂的形式 $(-3)^{\textcircled{4}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(4)想一想：将一个非零有理数 a 的圈 n 次方写成幂的形式= $\underline{\hspace{2cm}}$

(5)算一算： $24 \div 2^3 + (-8) \times 2^{\textcircled{5}}$ ；

【培优检测】

1. 估计 $\sqrt{3} + 2$ 的值应在（ ）

A. 3 和 4 之间

B. 4 和 5 之间

C. 5 和 6 之间

D. 6 和 7 之间

2. 有下列说法 ①实数和数轴上的点一一对应 ②不含根号的数一定是有理数 ③负数没有平方根 ④ $-\sqrt{17}$

是 17 的平方根。其中正确的有（ ）

- A. 3 个 B. 2 个 C. 1 个 D. 0 个

3. 有一列数按如下规律排列： $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{5}}{16}, -\frac{\sqrt{6}}{32}, \frac{\sqrt{7}}{64} \dots$ 则第 10 个数是 ()

- A. $-\frac{\sqrt{10}}{2^9}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{2^9}$ C. $-\frac{\sqrt{11}}{2^{10}}$ D. $\frac{\sqrt{11}}{2^{10}}$

4. 求 $1+2+2^2+2^3+\dots+2^{2016}$ 的值, 可令 $S=1+2+2^2+2^3+\dots+2^{2016}$, 则 $2S=1+2+2^2+2^3+\dots+2^{2017}$, 因此 $2S-S=2^{2017}-1$, $S=2^{2017}-1$. 参照以上推理, 计算 $S=4+4^2+4^3+\dots+4^{2018}+4^{2019}$ 的值为 ()

- A. $4^{2020}-1$ B. $4^{2020}-4$ C. $\frac{4^{2020}-4}{3}$ D. $\frac{4^{2020}-1}{3}$

5. 若若干个数, 第一个数记为 a_1 , 规定运算: $a_2=1-\frac{1}{a_1}, a_3=1-\frac{1}{a_2}, a_4=1-\frac{1}{a_3}, a_5=1-\frac{1}{a_4}, \dots,$

$a_n=1-\frac{1}{a_{n-1}}$. 按上述方法计算: 当 $a_1=\frac{2}{3}$ 时, a_{2022} 的值等于 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 2 D. 3

6. 计算 $\sqrt{16}-|2-\sqrt{5}|+\sqrt[3]{27}=\underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设 $\sqrt{2}$ 的整数部分为 a , 小数部分为 b , 求 $8ab-8\sqrt{2}$ 的立方根为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

8. 对 x, y 定义一种新运算“ $\otimes$ ”, 规定: $x \otimes y = mx + ny$ (其中 m, n 均为非零常数), 若 $1 \otimes 1 = 4$, $1 \otimes 2 = 3$. 则 $2 \otimes 1$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

9. 取整函数就是 $f(x)=[x]$, 也被称为高斯函数, 记号 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 例如: $[2.3]=2$,

$[-4.7]=-5$, 若 $S=1+\frac{1}{2 \times 3}+\frac{1}{3 \times 4}+\dots+\frac{1}{2021 \times 2022}$, 则 $[S]=\underline{\hspace{2cm}}$.

10. 定义新运算“ Δ ”: 对于任意实数 a, b 都有 $a \Delta b = ab - a - b + 2$.

(1) 若 $3 \Delta x$ 的值不大于 3, 则 x 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 若 $(-2m) \Delta 5$ 的值大于 3 且小于 9, 则 m 的整数值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. 计算:

(1) $-1^{2020} + \sqrt{81} - |2 - \sqrt{3}| + \sqrt[3]{8} + \sqrt{(-2)^2}$;

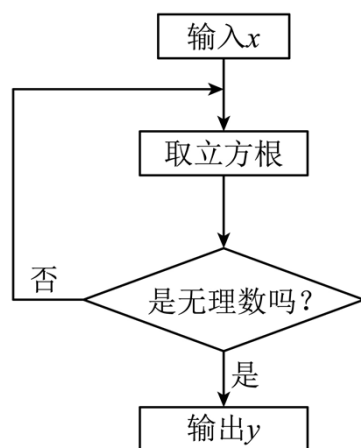
(2) $(x - x^2) \cdot 3x - (3x^4 - 2x^3) \div (-x)$.

12. 对于任意有理数 a, b , 定义一种新的运算“ $*$ ”: $a*b=2ab-3$, 如 $2*3=2\times 2\times 3-3=9$.

(1)求 $(-2)*3$ 的值

(2)求 $(-3)*(2*4)$ 的值

13. 如图所示的是一个无理数筛选器的工作流程图, 根据下面叙述回答相关问题.



(1)当 x 为 8 时, y 的值为_____.

(2)当输出的 y 值是 $\sqrt[3]{3}$ 时, 输入的 x 值唯一吗? 若不唯一, 请写出其中两个输入的 x 值.

(3)是否存在输入某个 x 值后, 却始终输不出 y 值? 如果存在, 写出所有满足要求的 x 值; 如果不存在, 请说明理由.

14. 阅读材料: 小明对不等式的有关知识进行了自主学习, 他发现, 对于任意两个实数 a 和 b 比较大小, 有如下规律: 若 $a-b>0$, 则 $a>b$; 若 $a-b=0$, 则 $a=b$; 若 $a-b<0$, 则 $a<b$, 上面的规律, 反过来也成立. 课上, 通过老师和其他同学的交流, 验证了上面的规律是正确的. 参考小明发现的规律, 解决问题:

(1)比较大小: $3.3 + \sqrt{5}$ _____ $\sqrt{10} + \sqrt{5}$; (填“ $<$ ”, “ $=$ ”或“ $>$ ”)

(2)已知 $x+2y-2=0$, 且 $x \geq 0$, 若 $A=y-5xy+1$, $B=-5xy+2y$, 试比较 A 和 B 的大小.

15. 我们已经学过完全平方公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ ，知道所有的非负数都可以看作是一个数的平方，如

$2 = (\sqrt{2})^2, 3 = (\sqrt{3})^2, 7 = (\sqrt{7})^2, 0 = 0^2$ ，我们可以利用这种思想方法和完全平方公式计算下面的题.

例如：求 $3 - 2\sqrt{2}$ 的算术平方根.

解： $3 - 2\sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} - 1)^2$

$\therefore 3 - 2\sqrt{2}$ 的算术平方根是 $\sqrt{2} - 1$

回答下面的问题：

(1) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.

(2) $\sqrt{10 + 8\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}$

(3) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{12}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{20}} + \sqrt{11 - 2\sqrt{30}}$

专题 4.2 实数及实数运算



【教学目标】

- 1、实数的概念和实数的分类；
- 2、实数与数轴上点的关系。
- 3、掌握实数的运算性质和运算律。
- 4、了解近似数及估算。



【教学重难点】

- 1、实数的分类；
- 2、实数与数轴上点的关系。
- 3、掌握实数的运算性质和运算律。

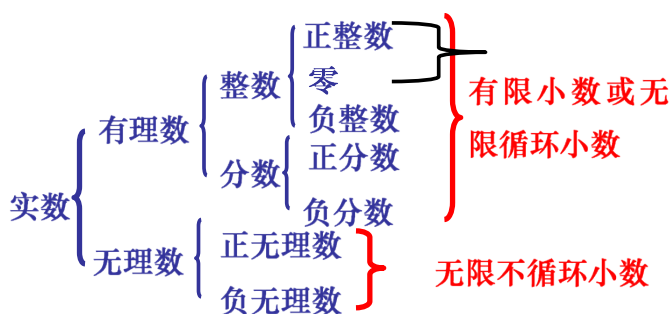
【知识亮解】

知识点一：实数（1）有理数的定义：任何有限小数或无限循环小数也都是有理数。

（2）无理数的定义：无限不循环小数叫无理数。

（3）实数的定义：有理数和无理数统称为实数。

1. 实数的分类



（4）实数与数轴上点的关系：实数与数轴上的点就是一一对应的，即每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点都是表示一个实数。对于数轴上的任意两个点，右边的点所表示的实数总比左边的点表示的实数大。

2. 无理数的概念

无限不循环小数称为无理数。

人们已经证明 $\sqrt{2}$ 是一个无限不循环小数，它的值为 1.414 213 562 373 095 048 801 688 724 209 7...

$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, 0.1010010001....., -2.31456728..... 等都是无理数。

亮题一：实数的分类

【例 1】★在 3.14 、 $\frac{22}{7}$ 、 2π 、 0.2020020002 这六个数中，无理数有（ ）

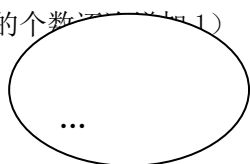
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【解析】 $\frac{22}{7}$ 、 2π 是无理数，无理数的个数是 3，故选：C.

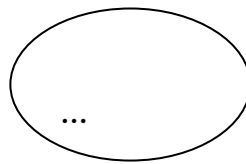
【例 2】★把下列各数分别填入相应的集合内：

$\sqrt[3]{2}$, $\frac{1}{4}$, $\sqrt{7}$, π , $-\frac{5}{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{20}{3}}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt[3]{8}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$, 0 , $0.3737737773\cdots$

(相邻两个 3 之间 7 的个数逐次加 1)



有理数集



无理数集

【解析】有理数有： $\frac{1}{4}$, $-\frac{5}{2}$, $-\sqrt[3]{8}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$, 0 ,

无理数有： $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{7}$, π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{20}{3}}$, $-\sqrt{5}$, $0.3737737773\cdots$

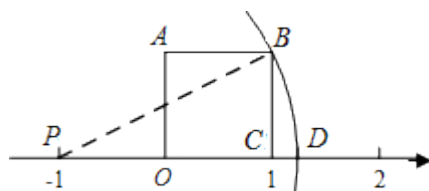
【总结升华】有限小数和无限循环小数都称为有理数. 无限不循环小数又叫无理数.

常见的无理数有三种形式：①含 π 类. ②看似循环而实质不循环的数，如 $0.3737737773\cdots$

③带有根号的数，但根号下的数字开方开不尽，如 $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{20}{3}}$, $-\sqrt{5}$.

亮题二：实数与数轴

【例 3】★如图，正方形 OABC 的边 OC 落在数轴上，点 C 表示的数为 1，点 P 表示的数为 -1，以 P 点为圆心，PB 长为半径作圆弧与数轴交于点 D，则点 D 表示的数为（ ）



- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{2}-1$ D. $\sqrt{5}-1$

【分析】直接利用勾股定理得出 PC 的长，进而得出答案.

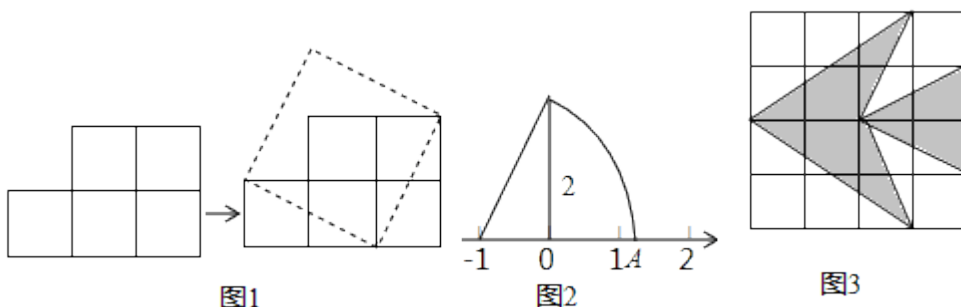
【答案】由题意可得：PC=2，BC=1，则在 Rt△PCB 中， $PC^2+BC^2=PB^2$ ，故 $PB=\sqrt{5}$ ，则 PD=

$\sqrt{5}$.

故点 D 表示的数为: $\sqrt{5} - 1$. 故选: D.

【点睛】此题主要考查了勾股定理, 正确得出 PC 的长是解题关键.

【例 4】★★如图 1, 纸上有五个边长为 1 的小正方形组成的图形纸, 我们可以把它剪开拼成一个正方形.



(1) 拼成的正方形的边长为_____.

(2) 如图 2, 以数轴的单位长度的线段为边作一个直角三角形, 以数轴上表示的 -1 点为圆心, 直角三角形的最大边为半径画弧, 交数轴正半轴于点 A, 那么点 A 表示的数是_____.

(3) 如图 3, 网格中每个小正方形的边长为 1, 若能把阴影部分剪拼成一个新的正方形, 求新的正方形的面积和边长.

【分析】(1) 设拼成的正方形的边长为 a , 根据总面积列方程可解答;

(2) 根据勾股定理计算, 并根据圆中半径相等, 结合数轴上点的特点可解答;

(3) 根据图形求出阴影部分的面积, 即为新正方形的面积, 开方即可求出边长.

【解析】(1) 设拼成的正方形的边长为 a , 则 $a^2 = 5$, $a = \sqrt{5}$, 即拼成的正方形的边长为 $\sqrt{5}$, 故答案为: $\sqrt{5}$;

(2) 由勾股定理得: $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $\therefore$ 点 A 表示的数为 $\sqrt{5} - 1$, 故答案为: $\sqrt{5} - 1$;

(3) 根据图形得: $S_{\text{阴影}} = 2 \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 4 + 2 = 6$, 即新的正方形的面积为 6,

新正方形的边长为 $\sqrt{6}$.

【点睛】此题考查了实数、数轴、几何图形及算术平方根, 熟练掌握算术平方根的定义是解本题的关键.

【例 5】★★在数学活动中, 我们发现了一些有趣的现象, 可以用图形来解决一些数的问题
现象一: 如图 (1) 所示, 5×5 的正方形网格中, 每个小正方形的边长均为 1.

(1) 请求出图中阴影部分正方形的面积和边长, 并用直尺和圆规把边长表示的数在数轴上表示出来.

现象二：为求 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n}$ 的值，设计了如图（2）所示的几何图形。

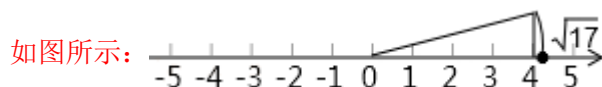
（2）请你利用这个几何图形求 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n}$ 的值为_____。（结果保留 n）

请你利用图（2）再设计一个能求 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n}$ 的值的几何图形。

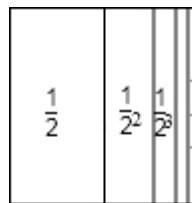
【分析】（1）根据阴影部分的面积等于正方形的面积减去四周四个小直角三角形的面积列式计算即可得解；再利用算术平方根的定义求出边长；利用勾股定理作出边长表示的无理数即可。

（2）设正方形的面积为 1，每次划分都是将原图形化成两个面积相等的图象，当化到第 n 个时，所剩的最小图形的面积是 $\frac{1}{2^n}$ ，所以 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n}$ 表示的面积等于 $1 - \frac{1}{2^n}$ 。在划分图形时每次划分都是上一级图形面积的一半。

【解析】（1）阴影部分面积 $= 5 \times 5 - 4 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 25 - 8 = 17$ ，阴影部分正方形的边长 = ；



（2） $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ ，如图所示：



故答案为： $1 - \frac{1}{2^n}$ 。

$\frac{1}{2^n}$ 。

【点睛】本题考查了图形的变化类问题，解答关键是利用图形的面积表示所求表达式的值，在图形划分时每一次划分都是上一级图形面积的一半。

知识点二：实数的大小比较

1、实数的倒数、相反数和绝对值

（1）相反数

实数与它的相反数是一对数（只有符号不同绝对值相同的两个数叫做互为相反数，零的相反数是零），从数轴上看，互为相反数的两个数所对应的点关于原点对称，如果 a 与 b 互为相反数，则有 $a+b=0$ ， $a=-b$ ，反之亦成立。

(2) 绝对值

一个数的绝对值就是表示这个数的点与原点的距离, $|a| \geq 0$ 。正数的绝对值等于它本身; 负数的绝对值等于它的相反数; 零的绝对值既可以看成是它本身, 也可看成它的相反数。正数大于零, 负数小于零, 正数大于一切负数, 两个负数, 绝对值大的反而小。

(3) 倒数

如果 $ab=1$, 则 a 与 b 互为倒数, 反之亦成立。倒数等于本身的数是 1 和 -1。零没有倒数。

2、数轴和实数大小比较

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴(画数轴时, 要注意上述规定的三要素缺一不可)。

比较大小时要真正掌握数形结合的思想, 理解实数与数轴的点是一一对应的, 并能灵活运用。

(1) **数轴比较:** 在数轴上表示的两个数, 右边的数总比左边的数大。

(2) **求差比较:** 设 a 、 b 是实数,

$$a-b>0 \Leftrightarrow a>b, \quad a-b=0 \Leftrightarrow a=b, \quad a-b<0 \Leftrightarrow a<b$$

(3) **求商比较法:** 设 a 、 b 是两正实数 $\frac{a}{b}>1 \Leftrightarrow a>b; \frac{a}{b}=1 \Leftrightarrow a=b; \frac{a}{b}<1 \Leftrightarrow a<b;$

(4) **绝对值比较法:** 设 a 、 b 是两负实数, 则 $|a|>|b| \Leftrightarrow a<b$ 。

(5) **平方法:** 设 a 、 b 是两负实数, 则 $a^2>b^2 \Leftrightarrow a<b$ 。

亮题三: 实数比较大小

【方法点拨】实数大小比较常见方法有: 倒数法、作差法、作商法、放缩法、两边平方法等等。

题模一: 作差法

【例 6】★比较 $1-\sqrt{2}$ 与 $1-\sqrt{3}$ 的大小。

【答案】 $1-\sqrt{2}>1-\sqrt{3}$

【解析】 $1-\sqrt{2}-(1-\sqrt{3})=1-\sqrt{2}-1+\sqrt{3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$ 。

题模二: 作商法

【例 7】★比较 $\frac{\sqrt{3}}{56}$ 与 $\frac{3}{64}$ 的大小。

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{56}<\frac{3}{64}$

【解析】 $\frac{\sqrt{3}}{56} \div \frac{3}{64} = \frac{\sqrt{3}}{56} \times \frac{64}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{21} < 1$

题模三：倒数法

【例 8】★比较 $\frac{4567}{4587}$ 与 $\frac{9876}{9896}$ 的大小.

【答案】 $\frac{4567}{4587} < \frac{9876}{9896}$

【解析】分别取倒数可得 $1 - \frac{20}{4567} > 1 - \frac{20}{9876}$, 故 $\frac{4567}{4587} < \frac{9876}{9896}$.

题模四：平方法

【例 9】★比较 $5\sqrt{3}$ 与 $3\sqrt{5}$ 的大小.

【答案】 $5\sqrt{3} > 3\sqrt{5}$

【解析】 $(5\sqrt{3})^2 = 75$, $(3\sqrt{5})^2 = 45$, $75 > 45$, $\therefore 5\sqrt{3} > 3\sqrt{5}$.

题模五：特殊值法

【例 10】★若 $0 < x < 1$, 则 x , x^2 , x^3 的大小关系是_____

A. $x < x^2 < x^3$

B. $x < x^3 < x^2$

C. $x^3 < x^2 < x$

D. $x^2 < x^3 < x$

【答案】 C

【解析】首先根据条件给出符合条件的具体数值, 然后根据负数小于一切正数, 两个负数比较大小时, 两个负数绝对值大的反而小即可解答.

$\because 0 < x < 1$, $\therefore$ 假设 $x = \frac{1}{2}$, 则 $x = \frac{1}{2}$, $x^2 = \frac{1}{4}$, $x^3 = \frac{1}{8}$, $\therefore \frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, $\therefore x^3 < x^2 < x$. 故选 C.

知识点三：实数的运算

1、加法交换律

$$a + b = b + a$$

2、加法结合律

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

3、乘法交换律

$$ab = ba$$

4、乘法结合律

$$(ab)c = a(bc)$$

5、乘法对加法的分配律

$$a(b + c) = ab + ac$$

6、实数混合运算时, 对于运算顺序有什么规定?

实数混合运算时, 将运算分为三级, 加减为一级运算, 乘除为二级运算, 乘方为三级运算。同级运算时, 从左到右依次进行; 不是同级的混合运算, 先算乘方, 再算乘除, 而后才算加减; 运算中如有括号时, 先做括号内的运算, 按小括号、中括号、大括号的顺序进行。

7、有理数除法运算法则就什么?

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/145133123114011331>