第七节　　无穷小的比较

一、无穷小的比较

二、关于等价无穷小的两个重要结论

一、无穷小的比较

例如，当$x \to 0$时，$x, x^2, \sin x, x^2 \sin \frac{1}{x}$都是无穷小

观察各极限

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{3x} = 0$，　　x^2比$3x$要快得多；

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$，　　$\sin x$与x大致相同；

$(\frac{0}{0}$型$)$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$不存在．　不可比.

极限不同，反映了趋向于零的“快慢”程度不同.

定义: 设α,β是同一过程中的两个无穷小,且$\alpha \neq 0$.

(1) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，就说 β 是比 α 高阶的无穷小,

记作 $\beta = o(\alpha)$;

(2) 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$，就说 β 是比 α 低阶的无穷小.

(3) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$,就说 β 与 α 是同阶的无穷小;

特殊地, 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$,则称 β 与 α 是等价的无穷小;

记作 $\alpha \sim \beta$;

(4) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, k > 0$,就说 β 是 α 的 k 阶的无穷小.

例如，

Q $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0$， 即 $x^2=o(3x)\ (x\to 0)$.

$\therefore$ 当 $x\to 0$ 时，x^2 是比 $3x$ 高阶的无穷小;

Q $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$， 即 $\sin x\sim x\ (x\to 0)$.

$\therefore$ 当 $x\to 0$ 时, $\sin x$ 与 x 是等价无穷小.

说明：

1）等价无穷小具有传递性：即 $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$

2)高阶无穷小不具有等价代换性。

$$x^2 = o(x), x^2 = o(\sqrt{x})\text{ 但 } o(x) \neq o(\sqrt{x})$$

3)未必任意两个无穷小量都可进行比较，例如：当

$x \to 0$时，x^2 与 $x \sin \frac{1}{x}$ 都是无穷小

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin \frac{1}{x}}{x^2}$不存在；既非同阶，又无高低阶可比较

4)对于无穷大量也可作类似的比较、分类；

例1： 当 $x \to 1$ 时，将下列各量与无穷小量 $x-1$ 进行比较.

（1）$x^3 - 3x + 2$;　（2）$\ln x$;　（3）$(x-1)\sin\frac{1}{x-1}$.

解：（1）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)} = 0$

（2）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\left[1+(x-1)\right]}{(x-1)} = \ln[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}} = 1$

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot\sin\frac{1}{x-1}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{1}{x-1}$ 不存在.

$(x-1)\sin\frac{1}{x-1}$ 与 $x-1$ 不能比较.

例2 证明：当$x \to 0$时，$\tan x - \sin x$为x的三阶无穷小

解

$$\text{Q} \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

$$\boxed{1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2},$$

$\therefore \tan x - \sin x$为$x$的三阶无穷小

例3 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

解 令 $e^x - 1 = u$，即 $x = \ln(1+u)$,

则当 $x \to 0$ 时,有 $u \to 0$,

$$\text{Q} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \lim_{u \to 0} \frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{u \to 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

即，当 $x \to 0$ 时，$x \sim \ln(1+x)$，$x \sim e^x - 1$.

二、关于等价无穷小的两个重要结论：

定理1 β 与 α 是等价无穷小的的充分必要条件为

$\beta=\alpha+o(\alpha)$.称 α 是 β 的主要部分.

证明：（必要性）设 $\alpha\sim\beta$，

$$\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\frac{\beta}{\alpha}-1=0,$$

$\therefore\quad \beta-\alpha=o(\alpha)$，即 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

（充分性）设 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\alpha+o(\alpha)}{\alpha}=\lim\left(1+\frac{o(\alpha)}{\alpha}\right)=1,$$

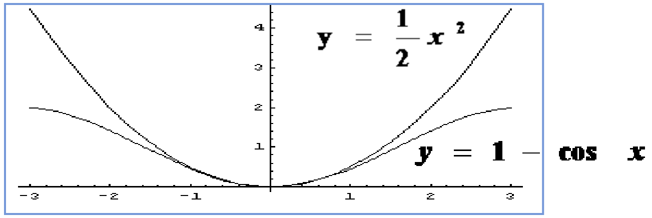
$\therefore\quad \alpha\sim\beta$.

意义：用等价无穷小可给出函数的近似表达式.

例如，当$x \to 0$时，$\sin x \sim x$，　$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$.

$$\sin x = x + o(x),$$

$$1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$



常用等价无穷小：当$x \to 0$时，

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x)$$

$$x \sim e^x - 1,\quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,\quad (1+x)^a - 1 \sim ax\ (a \neq 0)$$