专题16 垂径定理和与圆有关的角

知识清单

垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧。

推论1：1）平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧；

2）弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧；

3）平分弦所对的一条弧的直径垂直平分弦，并且平分弦所对的另一条弧。

推论2：圆的两条平行弦所夹的弧相等。

常见辅助线做法（考点）：1）过圆心，作垂线，连半径，造Rt△，用勾股，求长度；

2）有弧中点，连中点和圆心，得垂直平分。

圆心角概念：顶点在圆心的角叫做**圆心角**。

弧、弦、弦心距、圆心角之间的关系定理：在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等。

推论：在**同圆或等圆**中，如果**两个圆心角、两条弧、两条弦或两条弦的弦心距**中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量分别相等。

圆周角概念：顶点在圆上，并且两边都和圆相交的角叫做**圆周角**。

圆周角定理：一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半。（即：圆周角=$\frac{1}{2}$圆心角）

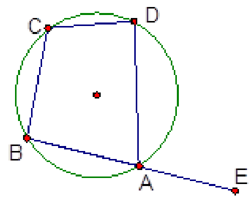
推论1：同弧或等弧所对的圆周角相等。

在同圆或等圆中，如果两个圆周角相等，它们所对的弧一定相等。

推论2：半圆（或直径）所对的圆周角是直角，90°的圆周角所对的弦是直径。

推论3：如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形。

圆内接四边形概念：如果一个多边形的所有顶点都在同一个圆上，这个多边形叫做圆内接多边形。这个圆叫做这个多边形的外接圆。



性质：圆内接四边形的对角互补，一个外角等于其内对角。

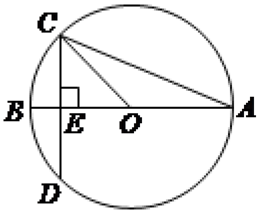
例：∠BCD+∠DAB=180°，∠BCD=∠DAE

题型剖析

考查题型一 利用垂径定理求值

典例1．（2020·莆田市九年级期中）如图⊙O的直径AB垂直于弦CD，垂足是E，$\angle A=22.5°$，$OC=4$，CD的

长为（ ）



A． $2\sqrt{2}$　　　　　B．4　　　　　C． $4\sqrt{2}$　　　　　D．8

【答案】C

【详解】

∵直径 AB 垂直于弦 CD，

∴CE=DE=$\frac{1}{2}$CD，

∵∠A=22.5°，

∴∠BOC=45°，

∴OE=CE，

设 OE=CE=x，

∵OC=4，

∴$x^2+x^2=16$，

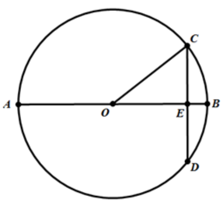
解得：x=$2\sqrt{2}$，

即：CE=$2\sqrt{2}$，

∴CD=$4\sqrt{2}$，

故选 C．

变式 1-1．（2020·浙江镇海区九年级期中）如图,AB是$\odot O$的直径,弦$CD\perp AB$于点E,$OC=5cm$,$CD=8cm$,则$AE=$（　　）



A．$8cm$　　　　　B．$5cm$　　　　　C．$3cm$　　　　　D．$2cm$

【答案】A

【提示】

根据垂径定理可得出 CE 的长度，在 Rt△OCE 中，利用勾股定理可得出 OE 的长度，再利用 AE=AO+OE 即可得出 AE 的长度．

【详解】

∵弦 CD⊥AB 于点 E，CD=8cm，

∴CE=$\frac{1}{2}$CD=4cm．

在 Rt△OCE 中，OC=5cm，CE=4cm，

∴OE=$\sqrt{OC^2-CE^2}$=3cm，

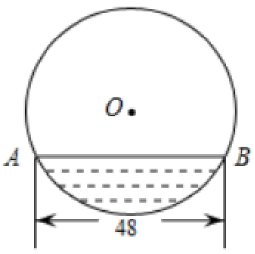
∴AE=AO+OE=5+3=8cm．

故选 A．

【名师点拨】

本题考查了垂径定理以及勾股定理，利用垂径定理结合勾股定理求出 OE 的长度是解题的关键．

变式 1-2．（2020·河北九年级期中）往直径为$52cm$的圆柱形容器内装入一些水以后，截面如图所示，若水面宽$AB=48cm$，则水的最大深度为（　）



A．$8cm$　　B．$10cm$　　C．$16cm$　　D．$20cm$

【答案】C

【提示】

过点 O 作 $OD\perp AB$ 于 D，交⊙O 于 E，连接 OA，根据垂径定理即可求得 AD 的长，又由⊙O 的直径为$52cm$，求得 OA 的长，然后根据勾股定理，即可求得 OD 的长，进而求得油的最大深度DE的长．

【详解】

解：过点 O 作 $OD\perp AB$ 于 D，交⊙O 于 E，连接 OA，

由垂径定理得：$AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 48=24cm$，

∵⊙O 的直径为$52cm$，

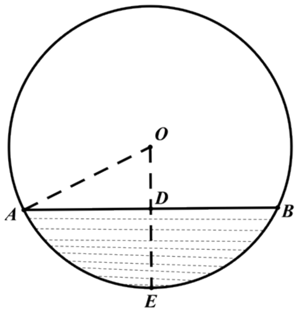
∴$OA=OE=26cm$，

在$Rt\Delta AOD$中，由勾股定理得：$OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=\sqrt{26^2-24^2}=10cm$，

$\therefore DE = OE - OD = 26 - 10 = 16cm$，

∴油的最大深度为$16cm$，

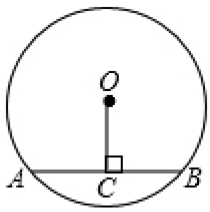
故选：C.



【名师点拨】

本题主要考查了垂径定理的知识．此题难度不大，解题的关键是注意辅助线的作法，构造直角三角形，利用勾股定理解决．

变式 1-3．（2020·南通市九年级期中）如图，在半径为 5cm 的⊙O 中，弦 AB=6cm，OC⊥AB 于点 C，则 OC 等于（　　）



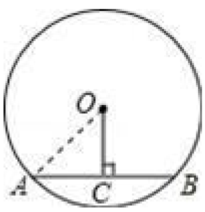
A．3 cm　　　　B．4cm　　　　C．5cm　　　　D．6cm

【答案】B

【详解】

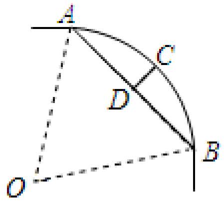
试题提示: 连接 OA，根据垂径定理求出 AC 的长，根据勾股定理求出答案．连接 OA，∵OC⊥AB，∴AC=$\frac{1}{2}$AB=3cm，∴OC=$\sqrt{OA^2-AC^2}$=4.

故选 B．



考点：垂径定理；勾股定理．

变式 1-4．（2020·河北石家庄市·九年级期中）如图，一条公路的转弯处是一段圆弧，点O是这段弧所在圆的圆心，$AB=40m$，点C是$\widehat{AB}$的中点,D 是 AB 的中点，且$CD=10m$，则这段弯路所在圆的半径为（　　）



A．$25m$　　B．$24m$　　C．$30m$　　D．$60m$

【答案】A

【提示】

根据题意，可以推出 $AD=BD=20$，若设半径为 r，则 $OD=r-10$，$OB=r$，结合勾股定理可推出半径 r 的值．

【详解】

解：$\because OC\perp AB$，

$\therefore AD=DB=20m$，

在$Rt\Delta AOD$中，$OA^2=OD^2+AD^2$，

设半径为r得：$r^2=(r-10)^2+20^2$，

解得：$r=25m$，

$\therefore$这段弯路的半径为$25m$

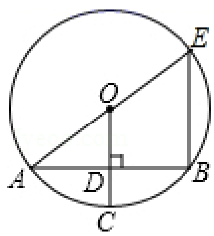
故选 A．

【名师点拨】

本题主要考查垂径定理的应用、勾股定理的应用，关键在于设出半径为 r 后，用 r 表示出 OD、OB 的长度．

考查题型二　利用垂径定理求平行弦半径

典例 2．（2020·广东九年级期末）如图，在⊙O 中，AE 是直径，半径 OC 垂直于弦 AB 于 D，连接 BE，若 AB=$2\sqrt{7}$，CD=1，则 BE 的长是(　　)



A．5　　B．6　　C．7　　D．8

【答案】B

【提示】

根据垂径定理求出 AD,根据勾股定理列式求出半径 ，根据三角形中位线定理计算即可.

【详解】

解：∵半径 OC 垂直于弦 AB，

∴$AD=DB=\frac{1}{2}AB=\sqrt{7}$

在 Rt△AOD 中，$OA^2=(OC-CD)^2+AD^2$,即 $OA^2=(OA-1)^2+(\sqrt{7})^2$，

解得，OA=4

∴OD=OC-CD=3，

∵AO=OE,AD=DB,

∴BE=2OD=6

故选 B

【名师点拨】

本题考查的是垂径定理、勾股定理，掌握垂直于弦的直径平分这条弦是解题的关键

变式 2-1．（2021·宁夏吴忠市·九年级期末）⊙O 的半径是 13，弦 $AB\parallel CD$，AB＝24，CD＝10，则 AB 与 CD 的距离是（　　）

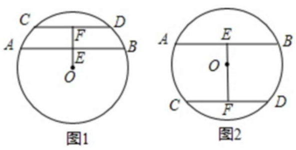
A．7　　B．17　　C．7 或 17　　D．34

【答案】C

【提示】

先作出图象根据勾股定理分别求出弦 AB,CD 的弦心距 OE,OF,再根据两弦在圆心同侧和在圆心异侧两种情况讨论.

【详解】

解：如图，

设 E、F 为 AB、CD 的中点，

$AE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 24=12$,

$CF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times 10=5$,

$OE=\sqrt{AO^2-AB^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$,

$OF=\sqrt{OC^2-CF^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$,

①当两弦在圆心同侧时，距离=OF-OE=12-5=7;

②当两弦在圆心异侧时,距离=OE+OF=12+5=17.

所以距离为 7 或 17.

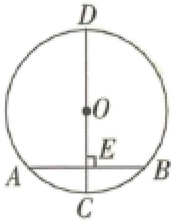
故选 C.

【名师点拨】

本题主要考查勾股定理及垂径定理的应用.

考查题型三 利用垂径定理解决实际问题

典例 3.（2020·湖北武汉市·九年级期中）《九章算术》总共收集了 246 个数学问题，这些算法要比欧洲同类算法早 1500 多年，对中国及世界数学发展产生过重要影响. 在《九章算术》中有很多名题，下面就是其中的一道. 原文："今有圆材，埋在壁中，不知大小，以锯锯之，深一寸，锯道长一尺，问径几何？"翻译：如图，CD为$\odot O$的直径，弦$AB \perp CD$于点E. CE=1寸，$AB=10$寸，则可得直径CD的长为（　　）

A．13 寸　　　　B．26 寸

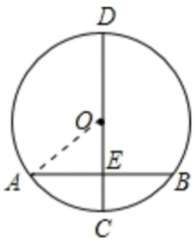
C．18 寸　　　　D．24 寸

【答案】B

【提示】

根据垂径定理可知 AE 的长．在 Rt△AOE 中，运用勾股定理可求出圆的半径，进而可求出直径 CD 的长．

【详解】



连接 OA，$AB \perp CD$

由垂径定理可知，点 E 是弦 AB 的中点，

AE=$\frac{1}{2}$AB=5

OE=OC－CE=OA－CE

设半径为 r，由勾股定理得，

$OA^2=AE^2+OE^2=OA^2+(OA-CE)^2$

即$r^2=5^2+(r-1)^2$

解得：r=13

所以 CD=2r=26，

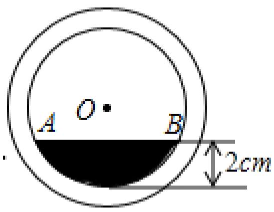
即圆的直径为 26，

故选 B．

【名师点拨】

本题主要考查了垂径定理和勾股定理的性质和求法，熟练掌握相关性质是解题的关键.

变式 3-1．(2020·安徽合肥市·九年级期末）将一盛有不足半杯水的圆柱形玻璃水杯拧紧杯盖后放倒，水平放置在桌面上，水杯的底面如图所示，已知水杯内径（图中小圆的直径）是 8cm，水的最大深度是 2cm，则杯底有水面 AB 的宽度是（　　）cm.



A．6　　B．$4\sqrt{2}$　　C．$4\sqrt{3}$　　D．$4\sqrt{5}$

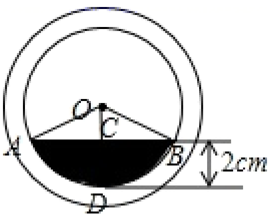
【答案】C

【提示】

作 OD⊥AB 于 C，交小圆于 D，可得 CD=2，AC=BC，由 AO、BO 为半径，则 OA=OD=4；然后运用勾股定理即可求得 AC 的长，即可求得 AB 的长.

【详解】

解：作 OD⊥AB 于 C，交小圆于 D，则 CD=2，AC=BC，



∵OA=OD=4，CD=2，

∴OC=2，

∴AC=$\sqrt{OA^2-OC^2}=2\sqrt{3}$，

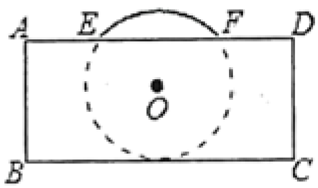
∴AB=2AC=$4\sqrt{3}$.

故答案为 C.

【名师点拨】

本题考查的是垂径定理的应用及勾股定理，作出辅助线、构造出直角三角形是解答本题的关键.

变式 3-2．（2020·浙江宁波市·九年级期末）把球放在长方体纸盒内，球的一部分露出盒外，其截面如图所示，已知$EF=CD=4$，则球的半径长是（　　）



A．2　　　　　　B．2.5　　　　　　C．3　　　　　　D．4

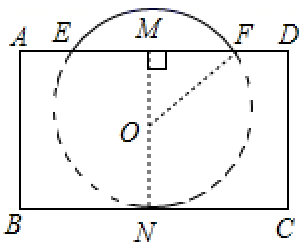
【答案】B

【提示】

取 EF 的中点 M，作 MN⊥AD 于点 M，取 MN 上的球心 O，连接 OF，设 OF=x，则 OM=4-x，MF=2，然后在 Rt△MOF 中利用勾股定理求得 OF 的长即可.

【详解】

如图：



EF 的中点 M，作 MN⊥AD 于点 M，取 MN 上的球心 O，连接 OF，

∵四边形 ABCD 是矩形，

∴∠C=∠D=90°，

∴四边形 CDMN 是矩形，

∴MN=CD=4，

设 OF=x，则 ON=OF，

∴OM=MN-ON=4-x，MF=2，

在直角三角形 OMF 中，$OM^2+MF^2=OF^2$，

即：$(4-x)^2+2^2=x^2$，

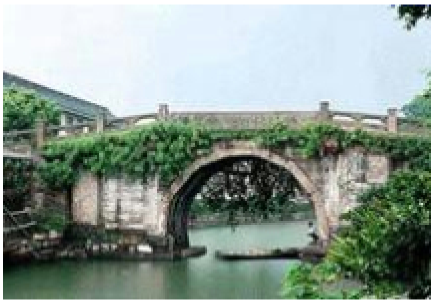
解得：x=2.5，

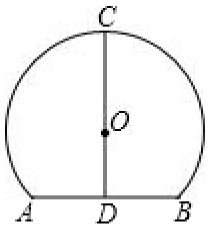
故选 B．

【名师点拨】

本题主考查垂径定理及勾股定理的知识，正确作出辅助线构造直角三角形是解题的关键．

变式 3-3．（2020·南通市九年级期中）绍兴市著名的桥乡，如图，石拱桥的桥顶到水面的距离 CD 为 8m，桥拱半径 OC 为 5m，则水面宽 AB 为（ ）





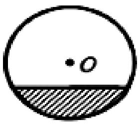
A．4m　　B．5m　　C．6m　　D．8m

【答案】D

【详解】

试题提示：连接 OA，根据垂径定理可得 AB=2AD，根据题意可得：OA=5m，OD=CD－OC=8－5=3m，根据勾股定理可得：AD=4m，则 AB=2AD=2×4=8m.

变式 3-4．（2020·河北九年级期末）一根水平放置的圆柱形输水管道横截面如图所示，其中有水部分水面宽 0．8 米，最深处水深 0．2 米，则此输水管道的直径是（　　）

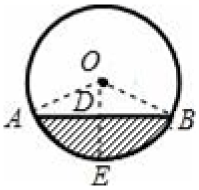


A．0．5　　B．1　　C．2　　D．4

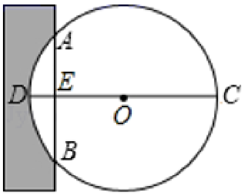
【答案】B

【详解】

试题提示：设半径为 r，过 O 作 OE⊥AB 交 AB 于点 D，连接 OA、OB，则 AD=$\frac{1}{2}$AB=$\frac{1}{2}$×0.8=0.4 米，设 OA=r，则 OD=r－DE=r－0.2，在 Rt△OAD 中，$OA^2=AD^2+OD^2$，即 $r^2=0.4^2+(r-0.2)^2$，解得 r=0.5 米，故此输水管道的直径=2r=2×0.5=1 米．故选 B．



变式 3-5.（2020·沭阳县九年级月考）《九章算术》是我国古代著名数学著作，书中记载：今有圆材，埋在壁中，不知大小以锯锯之，深一寸，锯道长一尺，问径几何？用数学语言可表述为：如图，CD 为⊙O 的直径，弦 AB⊥DC 于 E，ED＝1 寸，AB＝6 寸，求直径 CD 的长．则 CD 的长是（　）



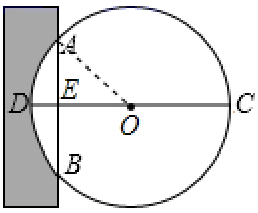
A．5 寸　　　B．8 寸　　　C．10 寸　　　D．12 寸

【答案】C

【分析】

连接 OA 构成直角三角形，先根据垂径定理，由 DE 垂直 AB 得到点 E 为 AB 的中点，由 $AB=10$ 可求出 AE 的长，再设出圆的半径 OA 为 x，表示出 OE，根据勾股定理建立关于 x 的方程，求出方程的解即可得到 x 的值，即为圆的半径，把求出的半径代入即可得到答案．

【详解】



解：连接 OA，$\because AB\perp CD$ ，且 $AB=6$ ，

$\therefore AE=BE=3$ ，

设圆 O 的半径 OA 的长为 x，则 $OC=OD=x$ ，

$\because DE=1$ ，

$\therefore OE=x-1$ ，

在 $RT\triangle AOE$ 中，根据勾股定理得：

$x^2-(x-1)^2=3^2$，

解得：$x=5$；

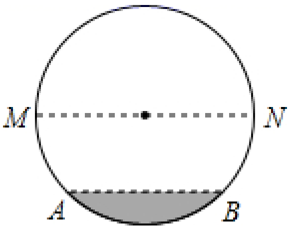
$\therefore CD=5\times2=10$（寸）．

故选 C．

【名师点拨】

此题考查了垂径定理的应用，注意利用圆的半径，弦的一半及弦心距所构成的直角三角形来解决实际问题，做此类题时要多观察，多分析，才能发现线段之间的联系．

变式 3-6．（2020·阜宁县九年级月考）在圆柱形油槽内装有一些油．截面如图，油面宽 AB 为 6 分米，如果再注入一些油后，油面 AB 上升 1 分米，油面宽变为 8 分米，圆柱形油槽直径 MN 为（　　）



A．6 分米　　　　B．8 分米

C．10 分米　　　　D．12 分米

【答案】C

【详解】

解：如图，依题意得 AB=6，CD=8，过 O 点作 AB 的垂线，垂足为 E，交 CD 于 F 点，连接 OA，OC，由垂径定理，得 AE=$\frac{1}{2}$AB=3，CF=$\frac{1}{2}$CD=4，

设 OE=x，则 OF=x﹣1，

在 Rt△OAE 中，$OA^2=AE^2+OE^2$，

在 Rt△OCF 中，$OC^2=CF^2+OF^2$，

∵OA=OC，

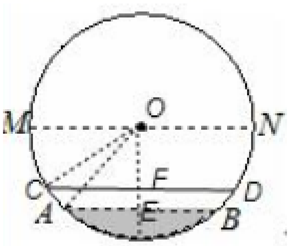
∴$3^2+x^2=4^2+(x-1)^2$，

解得 x=4，

∴半径 OA=$\sqrt{3^2+4^2}$ =5，

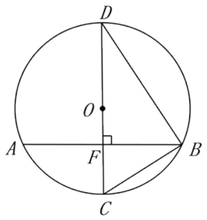
∴直径 MN=2OA=10 分米．

故选 C．



考查题型四 垂径定理的推论

典例4．（2020·黑龙江齐齐哈尔市·九年级期末）如图，DC是⊙O的直径，弦$AB\perp CD$于点F，连接BC，BD，则错误结论为（　　）



A．$OF=CF$　　　　B．$AF=BF$　　　　C．$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$　　　　D．$\angle DBC=90°$

【答案】A

【提示】

分别根据垂径定理及圆周角定理对各选项进行提示即可．

【详解】

解：∵DC是⊙O直径，弦AB⊥CD于点F，

∴AF=BF，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，∠DBC=90°，

∴B、C、D正确；

∵点F不一定是OC的中点，

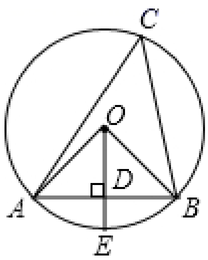
∴A错误．

故选：A．

【名师点拨】

本题考查的是垂径定理，熟知平分弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧是解答此题的关键．

变式4-1．（2020·河北保定市·九年级期末）如图，AB是⊙O的弦，OD⊥AB于D交⊙O于E，则下列说法错误的是(　　)



A．AD=BD　　　　B．∠ACB=∠AOE　　　　C．弧AE=弧BE　　　　D．OD=DE

【答案】D

【提示】

由垂径定理和圆周角定理可证，$AD=BD$，$AD=BD$，$AE=BE$，而点D不一定是OE的中点，故D错误．

【详解】

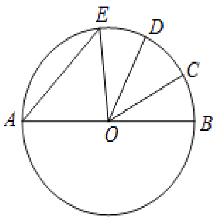
∵$OD\perp AB$，∴由垂径定理知,点 D 是 AB 的中点,有 $AD＝BD$,$\overset{\frown}{AE}＝\overset{\frown}{BE}$，∴△$AOB$ 是等腰三角形，OD 是∠AOB 的平分线，有∠AOE＝12∠AOB，由圆周角定理知,∠C＝12∠AOB，∴∠ACB＝∠AOE，故 A、 B、C 正确，而点 D 不一定是 OE 的中点，故错误.故选 D.

【名师点拨】

本题主要考查圆周角定理和垂径定理，熟练掌握这两个定理是解答此题的关键.

考查题型五 利用弧、弦、圆心角求解

典例 5．（2020·哈尔滨市九年级期末）如图，AB 是⊙O 的直径，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$，∠COD=34°，则∠AEO 的度数是（　　）

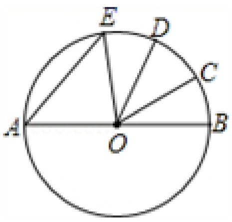


A．51°　　　　B．56°　　　　C．68°　　　　D．78°

【答案】A

【详解】

如图，在⊙ O 中，



∵$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$,

∴∠BOC=∠COE=∠DOE=34°，

∵AB 是⊙ O 的直径，

∴∠BOC+∠COE+∠DOE+∠AOE=180°，

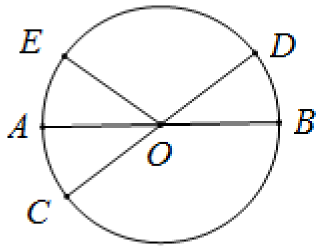
∴∠AOE=180°-34°-34°-34°=78°，

∵OA=OE，

∴∠AEO=∠A=$\frac{180°-\ \angle AOE}{2}=\frac{180°-78°}{2}=51°$.

故选 A.

变式练 5-1．（2020·陕西西安市九年级期末）如图，AB,CD是$\odot O$的直径，$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BD}$，若$\angle AOE=32^{\circ}$，则$\angle COE$的度数是（　　）



A．32°　　　　B．60°　　　　C．68°　　　　D．64°

【答案】D

【提示】

根据已知条件和圆心角、弧、弦的关系，可知$\angle BOD=\angle AOE=32^{\circ}$，然后根据对顶角相等即可求解．

【详解】

$\because \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BD}$，

$\therefore \angle BOD=\angle AOE=32^{\circ}$．

$\because$ $\angle BOD=\angle AOC$，

$\therefore$ $\angle AOC=32°$，

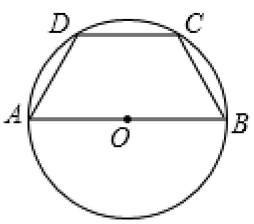
$\therefore \angle COE=32^{\circ}+32^{\circ}=64^{\circ}$，

故选：D．

【名师点拨】

本题主要考查圆心角、弧、弦的关系、对顶角相等，较简单，掌握基本概念是解题关键．

变式练 5-2．（2020·福建泉州五中九年级期中）如图，AB 是圆 O 的直径，BC，CD，DA 是圆 O 的弦，且 BC=CD=DA，则∠BCD 等于 （ ）

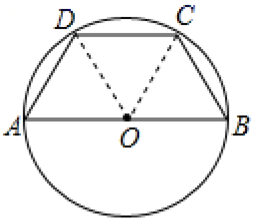


A．100°　　　　B．110°　　　　C．120°　　　　D．135°

【答案】C

【详解】

解：连接 OC、OD，



∵BC=CD=DA，

∴∠COB=∠COD=∠DOA，

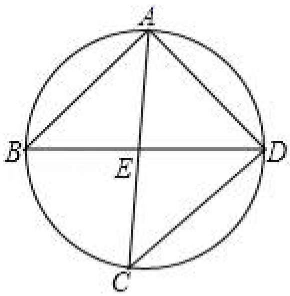
∵∠COB+∠COD+∠DOA=180°，

∴∠COB=∠COD=∠DOA=60°，

∴ $\angle BCD=\frac{1}{2}(360°-120°)=120°$，

故选：C．

变式练 5-3．（2020·福建福州市·九年级期中）如图，已知 *A*，*B*，*C*，*D* 是圆上的点，弧 *AD*＝弧 *BC*，*AC*，*BD* 交于点 *E*，则下列结论正确的是（　　）



A．*AB*＝*AD*　　　　B．*BE*＝*CD*　　　　C．*AC*＝*BD*　　　　D．*BE*＝*AD*

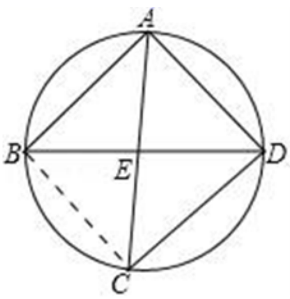
【答案】C

【提示】

连接 BC，根据弧与弦的关系得出$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$，进而判断即可．

【详解】

连接 BC，



$\because \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$，

$\therefore \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AB}$，

$\therefore \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$，

∴AC=BD，

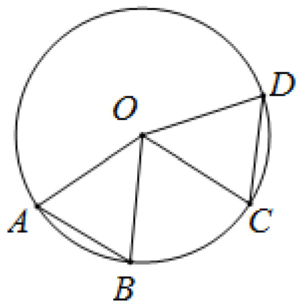
故选 C．

【名师点拨】

本题考查了圆心角、弧、弦的关系，解题的关键是根据弧与弦的关系得出$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

考查题型六 利用弧、弦、圆心角求证

典例 6．（2020·甘州区九年级期末）已知，如图，$\angle AOB = \angle COD$，下列结论不一定成立的是（　　）



A．$AB = CD$　　　　B．$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

C．$\triangle AOB \cong \triangle COD$　D．$\triangle AOB, \triangle COD$都是等边三角形

【答案】D

【提示】

由题意根据圆心角、弧、弦之间的关系，由∠AOB=∠COD，可得弦相等，弧相等以及三角形全等，以此进行提示判断即可.

【详解】

解：$\because \angle AOB = \angle COD,$

$\therefore AB = CD$，$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

$$\because OA = OB = OC = OD,$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD,$$

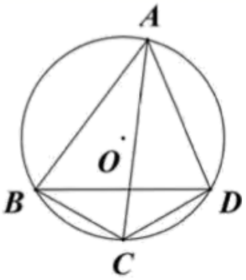
$\therefore A$、B、C成立，D 不成立.

故选：D.

【名师点拨】

本题考查弧，弦，圆心角之间的关系，注意掌握三组量中，只要有一组相等，其余的都对应相等.

变式练 6-1．（2020·长沙市九年级期末）$\odot O$是四边形$ABCD$的外接圆，AC平分$\angle BAD$，则正确结论是(　　)



A．$AB=AD$　　　　B．$BC=CD$

C．$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BD}$　　　　D．$\angle ACB=\angle ACD$

【答案】B

【提示】

根据圆心角、弧、弦的关系对结论进行逐一判断即可．

【详解】

解：$\because \angle ACB$与$\angle ACD$的大小关系不确定，$\therefore AB$与AD不一定相等，故选项 A 错误；

$\because AC$平分$\angle BAD$，$\therefore \angle BAC=\angle DAC$，$\therefore BC=CD$，故选项 B 正确；

$\because \angle ACB$与$\angle ACD$的大小关系不确定，$\therefore$ $\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{AD}$不一定相等，选项 C 错误；

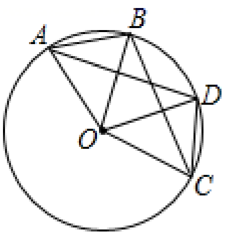
$\because \angle BCA$与$\angle DCA$的大小关系不确定，选项 D 错误；

故选 B．

【名师点拨】

本题考查的是圆心角、弧、弦的关系，在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等．

变式练 6-2．（2020·福建厦门市九年级期中）如图，将命题“在同圆中，相等的弧所对的圆心角相等，所对的弦也相等”改写成“已知…求证…”的形式，下列正确的是（　　）



A．已知：在⊙O 中，弧 AD＝弧 BC．求证：$\angle AOB=\angle COD$，$AD=BC$

B．已知：在⊙O 中，弧 AB＝弧 CD．求证：$\angle AOB=\angle COD$，$AB=CD$

C．已知：在⊙O 中，弧 AD＝弧 BC，$\angle AOB=\angle COD$．求证：$AD=BC$

D．已知：在⊙O 中，弧 AB＝弧 CD，$\angle AOB=\angle COD$．求证：$AB=CD$

【答案】B

【提示】

根据命题的定义、结合图形解答．

【详解】

解：命题“在同圆中，相等的弧所对的圆心角相等，所对的弦也相等”改写成“已知……求证……”的形式，

已知：在⊙O 中，弧 AB＝弧 CD，

求证：$\angle AOB=\angle COD$，$AB=CD$，

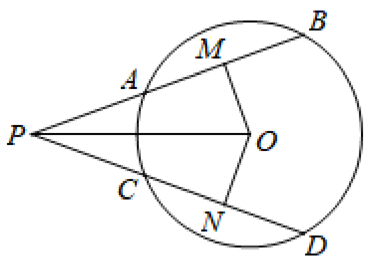
故选：B．

【名师点拨】

本题考查的是命题与定理，命题写成“已知…，求证…”的形式，这时，“已知”后面接的部分是题设，“求证”后面解的部分是结论．

提高练 2-3．（2021·山东潍坊市期末）如图，AB、CD是$\odot O$的两条弦，且$AB=CD$．$OM\perp AB$，$ON\perp CD$，垂足分别为点M、N，BA、DC的延长线交于点P，连接OP．下列结论正确的个数是（　）

①$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$；②$OM=ON$；③$PA=PC$；④$\angle BPO=\angle DPO$



A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

【答案】D

【提示】

如图连接 OB、OD，只要证明 Rt△OMB≌Rt△OND，Rt△OPM≌Rt△OPN 即可解决问题．

【详解】

解：如图连接 OB、OD；

∵AB=CD，

∴$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，故①正确

∵OM⊥AB，ON⊥CD，

∴AM=MB，CN=ND，

∴BM=DN，

∵OB=OD，

∴Rt△OMB≌Rt△OND，

∴OM=ON，故②正确，

∵OP=OP，

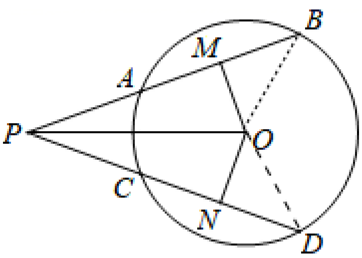
∴Rt△OPM≌Rt△OPN，

∴PM=PN，∠OPB=∠OPD，故④正确，

∵AM=CN，

∴PA=PC，故③正确，

故选：D．

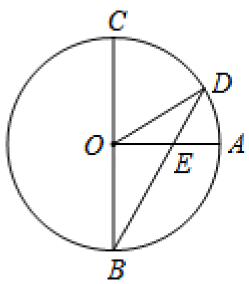


【名师点拨】

本题考查垂径定理、圆心角、弧、弦的关系、全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线构造全等三角形解决问题，属于中考常考题型．

考查题型七 圆周角定理

典例7．（2020·江苏南昌市九年级期中）如图，已知 BC 是⊙O 的直径，半径 $OA\perp BC$，点 D 在劣弧 AC 上（不与点 A，点 C 重合），BD 与 OA 交于点 E．设∠AED＝α，∠AOD＝β，则（　　）



A．3α+β＝180°　　B．2α+β＝180°　　C．3α﹣β＝90°　　D．2α﹣β＝90°

【答案】D

【提示】

根据直角三角形两锐角互余性质，用α表示∠CBD，进而由圆心角与圆周角关系，用α表示∠COD，最后由角的和差关系得结果．

【详解】

解：∵$OA\perp BC$，

∴$\angle AOB=\angle AOC=90°$，

∴$\angle DBC=90°-\angle BEO$

$=90°-\angle AED$

$=90°-\alpha$，

∴$\angle COD=2\angle DBC$

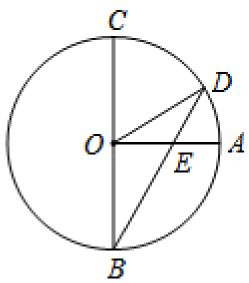
$=180°-2\alpha$，

∵$\angle AOD+\angle COD=90°$，

∴$\beta+180°-2\alpha=90°$，

∴$2\alpha-\beta=90°$，

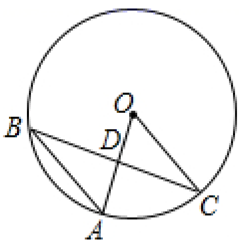
故选：D.



【名师点拨】

本题考查了圆周角定理以及直角三角形的两个锐角互余的关系，熟练掌握圆周角定理是解决本题的关键.

变式练 7-1.（2020·江西九年级期末）如图，⊙O 中，弦 BC 与半径 OA 相交于点 D，连接 AB，OC，若 ∠A=60°，∠ADC=85°，则∠C 的度数是（　　）



A．25°　　　　B．27.5°　　　　C．30°　　　　D．35°

【答案】D

【详解】

提示：直接利用三角形外角的性质以及邻补角的关系得出∠B 以及∠ODC 度数，再利用圆周角定理以及三角形内角和定理得出答案.

详解：∵∠A=60°，∠ADC=85°，

∴∠B=85°-60°=25°，∠CDO=95°，

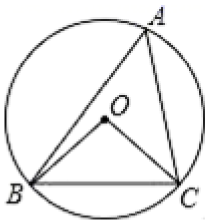
∴∠AOC=2∠B=50°，

∴∠C=180°-95°-50°=35°

故选 D．

名师点拨：此题主要考查了圆周角定理以及三角形内角和定理等知识，正确得出∠AOC 度数是解题关键．

变式练 7-2．(2020·北京市九年级期中）如图，⊙O 是△ABC 的外接圆，∠OCB＝40°，则∠A 的大小为（　　）



A．40°　　　　B．50°　　　　C．80°　　　　D．100°

【答案】B

【详解】

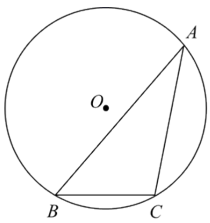
试题提示：∵$OB=OC$，$\angle OCB=40°$，

∴$\angle BOC=180°-2\angle OCB=100°$，

∴由圆周角定理可知：$\angle A=\frac{1}{2}\angle BOC=50°$.

故选 B．

变式练 7-3．（2020·合肥市九年级期末）如图，$\odot O$ 是ΔABC 的外接圆，半径为2cm，若 $BC=2$cm，则$\angle A$ 的度数为（　　）



A．30°　　　　B．25°　　　　C．15°　　　　D．10°

【答案】A

【提示】

连接 OB 和 OC，证明△OBC 为等边三角形，得到∠BOC 的度数，再利用圆周角定理得出∠A．

【详解】

解：连接 OB 和 OC，

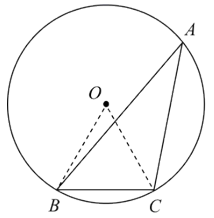
∵圆 O 半径为 2，BC=2，

∴△OBC 为等边三角形，

∴∠BOC=60°，

∴∠A=30°，

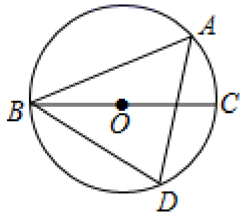
故选 A．



【名师点拨】

本题考查了圆周角定理和等边三角形的判定和性质，解题的关键是正确的作出辅助线．

变式练 7-4．（2020·江苏九年级期末）如图，BC 是 $\odot O$的直径，A，D 是 $\odot O$上的两点，连接 AB，AD，BD，若$\angle ADB=70^{\circ}$，则$\angle ABC$的度数是（　　）



A．20°　　　　B．70°　　　　C．30°　　　　D．90°

【答案】A

【提示】

连接 AC，如图，根据圆周角定理得到$\angle BAC=90^{\circ}$，$\angle ACB=\angle ADB=70^{\circ}$，然后利用互余计算$\angle ABC$的度数．

【详解】

连接 AC，如图，

∵BC 是 $\odot O$的直径，

∴$\angle BAC=90^{\circ}$，

∵$\angle ACB=\angle ADB=70^{\circ}$，

∴$\angle ABC=90^{\circ}-70^{\circ}=20^{\circ}$．

故答案为20°．