

江苏省南京师范大学附属中学高三上学期 10 月段考数学试卷

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$, $B = \{x | \log_2 x < 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()
A. $\emptyset$ B. $(1, 2)$ C. $(0, 2)$ D. $(-1, 2)$
2. 若复数 z 满足 $z \cdot (1+i) = i+3$ (i 是虚数单位), 则 $\bar{z}$ 的模长等于 ()
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$
3. 已知公差大于 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 6 项和为 -24 , $a_2 a_5 = 7$, 则 $a_7 =$ ()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
4. 设 $a = 2 \log_3 2$, $b = \log_2 3$, $c = \frac{4}{3}$, 则 a, b, c 的大小顺序为 ()
A. $a > b > c$ B. $c > b > a$ C. $a > c > b$ D. $b > c > a$
5. 已知 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}$, 则 $\frac{\sin 2\alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \cos 2\alpha}$ 的值为 ()
A. $-\frac{3}{2}$ B. -1 C. 1 D. $\frac{3}{2}$
6. 2024 年 5 月 26 日, 安徽省滁河污染事件引发社会广泛关注. 为了贯彻落实《中共中央国务院关于深入打好污染防治攻坚战的意见》, 某造纸企业的污染治理科研小组积极探索改良工艺, 使排放的污水中含有的污染物数量逐渐减少. 已知改良工艺前所排放废水中含有的污染物数量为 2.25g/m^3 , 首次改良工艺后排放的废水中含有的污染物数量为 2.21g/m^3 , 第 n 次改良工艺后排放的废水中含有的污染物数量 r_n 满足函数模型 $r_n = r_0 + (r_1 - r_0) \cdot 3^{0.25n+t}$ ($t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$), 其中 r_0 为改良工艺前所排放的废水中含有的污染物数量, r_1 为首次改良工艺后所排放的废水中含有的污染物数量, n 为改良工艺的次数, 假设废水中含有的污染物数量不超过 0.25g/m^3 时符合废水排放标准, 若该企业排放的废水符合排放标准, 则改良工艺的次数最少要 () (参考数据: $\lg 2 \approx 0.30$, $\lg 3 \approx 0.48$)
A. 14 次 B. 15 次 C. 16 次 D. 17 次
7. 两个相交平面构成四个二面角, 我们称其中小于或等于 90°

的二面角称为这两个相交平面的夹角.现在正方体任取四个顶点,若这四个顶点共面,则称该平面为该正方体的一个“表截面”则在正方体中,两个不重合的“表截面”的夹角大小不可能为()

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

8. 已知 A, B 是圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上两点, 且 $|AB| = 2$, 直线 $x = my + 4$ 上存在点 P 使得

$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OP}$, 则 m 的取值范围为()

- A. $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ B. $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$
C. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ D. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

二、多选题

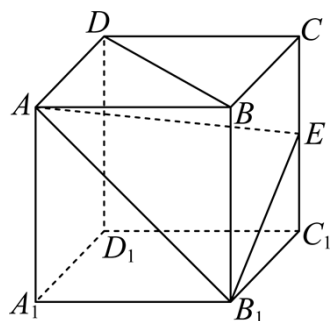
9. 设 a, b 为正实数, 且 $a > b$, 则下列不等式一定成立的是()

- A. $\ln(a-b) > 0$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$ C. $a - \frac{1}{a} > b - \frac{1}{b}$ D. $a - \frac{1}{b} > b - \frac{1}{a}$

10. 已知 x_1, x_2 是函数 $f(x) = \tan(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\pi < \varphi < \pi$) 的两个零点, 且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$, 若将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后得到的图象关于原点对称, 则 φ 的可能值为()

- A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $-\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{8}$

11. 若正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, E 是 CC_1 中点, 则下列说法正确的是()



A. $BD \perp$ 平面 A_1AE

B. B 到平面 AB_1E 的距离为 $\frac{5}{3}$

C. 平面 AB_1E 和底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角的余弦值为 $\frac{2}{3}$

D. 若此正方体每条棱所在直线与平面 α 所成的角都相等，则 α 截此正方体所得截面只能是三角形和六边形

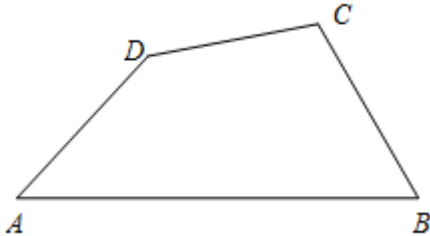
12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$ ，若函数 $y = f(1+2x)$ ， $y = \frac{1}{2}x - f(x+2)$ 都为偶函数，令 $g(x) = f'(x)$ ，则下列结论正确的有（ ）

- A. $f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称
 B. $g(x)$ 的图象关于点 $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ 对称
 C. $g(1)=1$
 D. $\sum_{k=1}^{100} g(k) = 2475$

三、填空题

13. 设 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 为单位向量，且 $|\vec{a} + \vec{b}| = 1$ ，则 $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 如图，在平面四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle D = 150^\circ$ ， $AB = 2BC = 2$ ，则四边形 $ABCD$ 的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



15. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右支与焦点 F 的抛物线 $x^2 = y$ 交于 A ， B 两点，若 $|AF| + |BF| = 4|OF|$ ，则双曲线的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知实数 x ， y 满足 $\ln x = ye^x + \ln y$ ，则 $y - e^{-x}$ 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ ， S_n 为其前 n 项和， $a_5 = 10$ ， $S_7 = 56$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

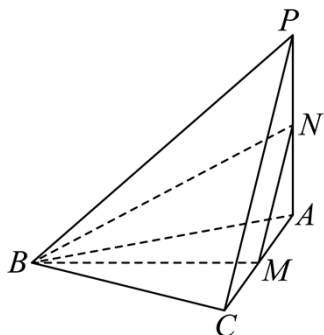
(2) 若 $b_n = a_n + 3^{n-1}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

18. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $2c + b = 2a \cos B$.

(1) 求角 A ；

(2) 若角 A 的平分线与 BC 交于点 M ， $BM = 4\sqrt{7}$ ， $CM = 2\sqrt{7}$ ，求线段 AM 的长.

19. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ， $AB = BC$ ， M, N 分别为棱 AC, PA 的中点.



(1)证明: $BM \perp PC$;

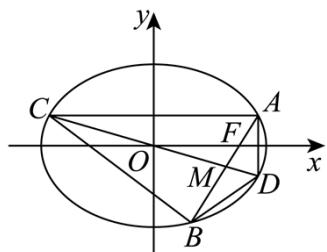
(2)若 $AB = \sqrt{5}$, $AC = 2$, 二面角 $A-BN-M$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{2}}{5}$, 求三棱锥 $P-ABC$ 的体积.

20. 为了丰富孩子们的校园生活, 某校团委牵头, 发起体育运动和文化项目比赛, 经过角逐, 甲、乙两人进入最后的决赛. 决赛先进行两天, 每天实行三局两胜制, 即先赢两局的人获得该天胜利, 此时该天比赛结束. 若甲、乙两人中的一方能连续两天胜利, 则其为最终冠军; 若前两天甲、乙两人各赢一天, 则第三天只进行一局附加赛, 该附加赛的获胜方为最终冠军. 设每局比赛甲获胜的概率为 $\frac{1}{3}$, 每局比赛的结果没有平局且结果互相独立.

(1)记第一天需要进行的比赛局数为 X , 求 X 的分布列及 $E(X)$;

(2)记一共进行的比赛局数为 Y , 求 $P(Y \leq 5)$.

21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 过其右焦点 F 且与 x 轴垂直的直线交椭圆 C 于 P, Q 两点, 且满足 $|PQ| = 3$.



(1)求椭圆 C 的方程;

(2)已知过点 F 的直线 l 与坐标轴不垂直, 且与椭圆交于点 A, B , 弦 AB 的中点为 M , 直线 OM 与椭圆交于点 C, D , 求四边形 $ACBD$ 面积 S 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x) = \frac{3x}{x+3} - \sin x$.

(1)求证: $f'(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上存在惟一的极小值点;

(2)判断函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上零点的个数, 并说明理由.

参考答案:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	D	C	D	B	C	A	A	BC	ABC
题号	11	12								
答案	ACD	ABD								

1. C

【分析】解不等式化简集合 A, B ，再利用交集的定义求解作答.

【详解】解不等式 $x^2 - x - 2 < 0$ ，得 $-1 < x < 2$ ，则 $A = (-1, 2)$ ，

解不等式 $\log_2 x < 1$ ，得 $0 < x < 2$ ，则 $B = (0, 2)$ ，

所以 $A \cap B = (0, 2)$.

故选：C

2. D

【分析】先化简已知条件求出 z ，再求 $\bar{z}$ 模长

【详解】 $z \cdot (1+i) = i+3 \Rightarrow z = \frac{3+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i+i-i^2}{1-i^2} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$

所以 $\bar{z} = 2+i$ ，所以 $|\bar{z}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

故选：D

3. C

【分析】由题意建方程组求解基本量，得到通项公式再求项.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d > 0)$ ，

则 $a_2 = a_1 + d$ ， $a_5 = a_1 + 4d$ ，前 6 项和 $S_6 = 6a_1 + \frac{6 \times 5}{2}d = 6a_1 + 15d$ ，

由题意得 $\begin{cases} 6a_1 + 15d = -24 \\ (a_1 + d)(a_1 + 4d) = 7 \end{cases}$ ，又 $d > 0$ ，解得 $\begin{cases} a_1 = -9 \\ d = 2 \end{cases}$.

$\therefore a_n = -9 + 2(n-1) = 2n - 11$ ，

$\therefore a_7 = 2 \times 7 - 11 = 3$.

故选：C.

4. D

【分析】将各数都同乘以 3，将 $3c$ 作为中间量，再通过对数运算与对数函数单调性比较大小即可.

【详解】 $Q\ 3a = 6\log_3 2 = \log_3 64 < \log_3 81 = 4$,

$3b = 3\log_2 3 = \log_2 27 > \log_2 16 = 4$, 又 $3c = 4$,

$\therefore 3a < 3c < 3b$, 即 $b > c > a$.

故选: D.

5. B

【分析】根据给定条件, 结合和角的正切公式求出 $\tan \alpha$, 再利用二倍角的正余弦公式, 结合齐次式法计算即得.

【详解】由 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}$, 得 $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1}{3}$, 解得 $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$,

所以 $\frac{\sin 2\alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{2\cos^2 \alpha} = \tan \alpha - \frac{1}{2} = -1$.

故选: B

6. C

【分析】依题运用特殊值 $n=1$ 求得函数模型中 t 的值, 然后运用函数模型得到关于 n 的不等式, 通过指、对运算求得 n 的取值范围, 即可得解.

【详解】依题意, $r_0 = 2.25$, $r_1 = 2.21$, 当 $n=1$ 时, $r_1 = r_0 + (r_1 - r_0) \times 3^{0.25+t}$, 即 $3^{0.25+t} = 1$, 可得 $t = -0.25$,

于是 $r_n = 2.25 - 0.04 \times 3^{0.25(n-1)}$, 由 $r_n \leq 0.25$, 得 $3^{0.25(n-1)} \geq 50$, 即 $0.25(n-1) \geq \frac{\lg 50}{\lg 3}$,

则 $n \geq \frac{4(2 - \lg 2)}{\lg 3} + 1 \approx 15.17$, 又 $n \in \mathbb{N}^*$, 因此 $n \geq 16$,

所以若该企业排放的废水符合排放标准, 则改良工艺的次数最少要 16 次,

故选: C.

7. A

【分析】根据两个平面的夹角的知识, 结合空间向量法求得正确答案.

【详解】平面 $ABCD$ 和平面 ADD_1D_1 的夹角为 90° , D 选项错误.

平面 BDD_1B_1 和平面 ACC_1A_1 的夹角为 45° , B 选项错误.

设正方体的棱长为 1, 建立空间直角坐标系,

则 $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $D_1(0, 0, 1)$, $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{BD_1} = (-1, -1, 1)$,

设平面 ABC_1D_1 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AB} = y_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{BD_1} = -x_1 - y_1 + z_1 = 0 \end{cases}, \text{故可设 } \vec{m} = (1, 0, 1).$$

$\vec{CB} = (1, 0, 0)$, 设平面 A_1BCD_1 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{CB} = x_2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BD_1} = -x_2 - y_2 + z_2 = 0 \end{cases}, \text{故可设 } \vec{n} = (0, 1, 1),$$

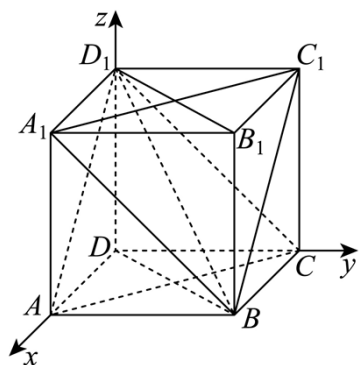
设平面 ABC_1D_1 与平面 A_1BCD_1 的夹角为 θ ,

$$\text{则} \cos \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

由于 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, 所以 $\theta = 60^\circ$, 所以 C 选项错误.

所以夹角大小不可能为 30° .

故选: A.



8. A

【分析】根据题意分析可知: 点 P 的轨迹是以原点 O 为圆心, 半径为 $2\sqrt{3}$ 的圆, 且直线

$x = my + 4$ 与圆 $x^2 + y^2 = 12$ 有交点, 结合直线与圆的位置关系列式求解即可.

【详解】由题意可知: 圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 的圆心为 $O(0, 0)$, 半径 $r = 2$,

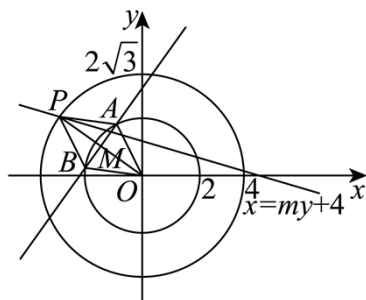
设 AB 中点为 M , 则 $\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OM}$,

且 $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OP}$, 可得 $\vec{OP} = 2\vec{OM}$,

又因为 $|AB| = 2$, 可知 $\triangle OAB$ 为边长为 2 的等边三角形,

则 $|OM| = \sqrt{3}$, 可得 $|OP| = 2|OM| = 2\sqrt{3}$,

可知点 P 的轨迹是以原点 O 为圆心, 半径为 $2\sqrt{3}$ 的圆,



因为直线 $x = my + 4$ 上存在点 P 使得 $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OP}$,

即直线 $x = my + 4$ 与圆 $x^2 + y^2 = 12$ 有交点,

可知圆心到直线的距离 $d = \frac{|-4|}{\sqrt{m^2 + 1}} \leq 2\sqrt{3}$, 解得: $m \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

故选: A.

【点睛】方法点睛: 求圆的方程有两类方法:

(1) 几何法, 通过研究圆的性质、直线和圆、圆与圆的位置关系, 进而求得圆的半径和圆心, 得出圆的方程;

(2) 代数法, 求圆的方程必须具备三个独立条件, 利用“待定系数法”求出圆心和半径.

9. BC

【分析】举反例判断 A 选项, 根据函数单调性判断 B,C,D 选项即可.

【详解】对于 A: 举反例 $a = 2$, $b = 1$, $\ln(a - b) = 0$, A 错误;

对于 B: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为减函数, $\forall a > b$, $\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$, B 正确;

对于 C: $y = x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 为增函数, $\forall a > b$, $\therefore a - \frac{1}{a} > b - \frac{1}{b}$, C 正确;

对于 D: $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 有增有减, D 错误;

故选: BC.

10. ABC

【分析】由已知得函数 $f(x)$ 的周期, 求出 ω , 再利用图像的平移变换规律写出函数 $f(x)$ 平移后的解析式, 再利用函数关于原点对称, 列出等式即可得到结果.

【详解】由题意知函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{\pi}{3}$,

则 $\frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{3}$, 得 $\omega = 3$, 所以 $f(x) = \tan(3x + \varphi)$.

将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到 $y = \tan\left[3\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \varphi\right] = \tan\left(3x + \frac{\pi}{4} + \varphi\right)$ 的

图象,

要使该图象关于原点对称, 则 $\frac{\pi}{4} + \varphi = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,

所以 $\varphi = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, 又 $-\pi < \varphi < \pi$,

所以当 $k = 0$ 时, φ 为 $-\frac{\pi}{4}$;

当 $k = 1$ 时, φ 为 $\frac{\pi}{4}$;

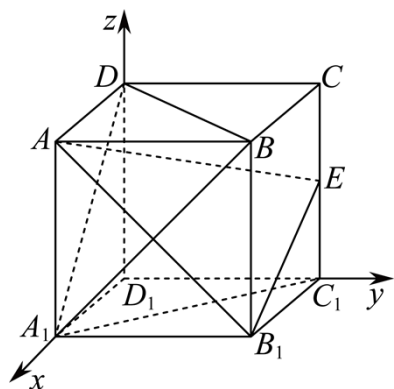
当 $k = 2$ 时, φ 为 $\frac{3\pi}{4}$;

故选: ABC

11. ACD

【分析】以点 D_1 为坐标原点, D_1A_1 、 D_1C_1 、 D_1D 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建立空间直角坐标系, 利用空间向量法可判断 ABC 选项; 分析可知平面 α 可与平面 A_1BD 平行或重合, 作出截面图形, 可判断 D 选项.

【详解】以点 D_1 为坐标原点, D_1A_1 、 D_1C_1 、 D_1D 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系,



则 $A_1(2,0,0)$ 、 $B_1(2,2,0)$ 、 $C_1(0,2,0)$ 、 $D_1(0,0,0)$ 、 $A(2,0,2)$ 、 $B(2,2,2)$ 、

$C(0,2,2)$ 、 $D(0,0,2)$ 、 $E(0,2,1)$,

对于 A 选项, $\vec{DB} = (2,2,0)$, $\vec{A_1A} = (0,0,2)$, $\vec{AE} = (-2,2,-1)$,

所以, $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{A_1A} = 0$, $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AE} = -4 + 4 + 0 = 0$,

所以, $BD \perp AA_1$, $BD \perp AE$,

又因为 $AA_1 \cap AE = A$, AA_1 、 $AE \subset$ 平面 A_1AE , 因此, $BD \perp$ 平面 A_1AE , A 对;

对于 B 选项, 设平面 AB_1E 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\overrightarrow{B_1A} = (0, -2, 2), \quad \overrightarrow{B_1E} = (-2, 0, 1), \quad \text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{B_1A} = -2y_1 + 2z_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{B_1E} = -2x_1 + z_1 = 0 \end{cases},$$

取 $x_1 = 1$, 可得 $\vec{m} = (1, 2, 2)$,

又因为 $\overrightarrow{B_1B} = (0, 0, 2)$, 则点 B 到平面 AB_1E 的距离为 $d = \frac{|\overrightarrow{B_1B} \cdot \vec{m}|}{|\vec{m}|} = \frac{4}{3}$, B 错;

对于 C 选项, 易知平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的一个法向量为 $\vec{n} = (0, 0, 1)$,

$$\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{2}{3 \times 1} = \frac{2}{3},$$

所以, 平面 AB_1E 和底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角的余弦值为 $\frac{2}{3}$, C 对;

对于 D 选项, 取三棱锥 $A-A_1BD$, 则 $AB = AD = AA_1$, 且 AB 、 AD 、 AA_1 两两垂直,

易知点 A 在平面 A_1BD 内的射影为等边 $\triangle A_1BD$ 的中心,

设 AB 、 AD 、 AA_1 与平面 A_1BD 所成的角分别为 γ 、 β 、 θ , 设点 A 到平面 A_1BD 的距离为 m ,

则 $\sin \gamma = \frac{m}{AB}$, $\sin \beta = \frac{m}{AD}$, $\sin \theta = \frac{m}{AA_1}$, 所以, $\sin \gamma = \sin \beta = \sin \theta$,

又因为 γ 、 β 、 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 故 $\gamma = \beta = \theta$,

即 AB 、 AD 、 AA_1 与平面 A_1BD 所成角相等,

因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 每条棱所在直线与平面 α 所成的角都相等,

若平面 α 与平面 A_1BD 平行或重合时,

平面 α 截此正方体所得截面的图形如下面两幅图所示,

截面分别为三角形 PQR 、六边形 $MNGHST$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/145303100223011320>