概率统计与其他知识交汇的综合问题

以能力立意是数学命题的指导思想,在知识网络交汇处设计试题是今后高考的一大特点和方向,与概率交汇的试题正是在这种背景下“闪亮登场”,频频出现在各类试题中.除了上一节讲解的概率统计的常见综合问题外,概率统计与数列,概率统计与导数、函数的交汇应用也比较常见.

角度一　概率统计与数列的交汇应用

例1(2023·新高考Ⅰ,21)甲、乙两人投篮,每次由其中一人投篮,规则如下:若命中则此人继续投篮,若未命中则换为对方投篮.无论之前投篮情况如何,甲每次投篮的命中率均为0.6,乙每次投篮的命中率均为0.8,由抽签确定第1次投篮的人选,第1次投篮的人是甲、乙的概率各为0.5.

(1)求第2次投篮的人是乙的概率;

(2)求第i次投篮的人是甲的概率;

(3)已知:若随机变量X_i服从两点分布,且$P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=q_i$,$i=1,2,\dots,n$,则$E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n} q_i$.记前$n$次(即从第1次到第$n$次投篮)中甲投篮的次数为$Y$,求$E(Y)$.

解 (1)设事件A:“第2次投篮的人是乙”,

则$P(A)=P(甲乙)+P(乙乙)=0.5\times0.4+0.5\times0.8=0.6$.

(2)设第 i 次是甲投的概率为 p_i,则第 i 次是乙投的概率为 $1-p_i$,由题意可知

$p_1=\frac{1}{2}$,$p_{i+1}=p_i\times0.6+(1-p_i)\times0.2=0.2+0.4p_i$.则 $p_{i+1}-\frac{1}{3}=\frac{2}{5}p_i+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=\frac{2}{5}(p_i-\frac{1}{3})$,故数

列$\{p_i-\frac{1}{3}\}$为公比为$\frac{2}{5}$的等比数列.故 $p_i-\frac{1}{3}=(p_1-\frac{1}{3})\times{\frac{2}{5}}^{i-1}=\frac{1}{6}\times{\frac{2}{5}}^{i-1}$,得到

$p_i=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times{\frac{2}{5}}^{i-1}$,$i\in\mathbf{N}^*$.

角度一 角度二

(3)由(2)知,设随机变量X_i可取0,1,i=1,2,…,n,$P(X_i=1)=p_i$,$P(X_i=0)=1-p_i$,则X_i服从两点分布.

由题可知,当 $n\geq1$ 时,$E(Y)=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=\frac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{n}{\frac{2}{5}}^{i-1}+\frac{n}{3}=\frac{5}{18}[1-{\frac{2}{5}}^{n}]+\frac{n}{3}$,$n\in\mathbf{N}^*$.

综上所述,可知 $E(Y)=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=\frac{5}{18}[1-{\frac{2}{5}}^{n}]+\frac{n}{3}$,$n\in\mathbf{N}^*$.

规律总结

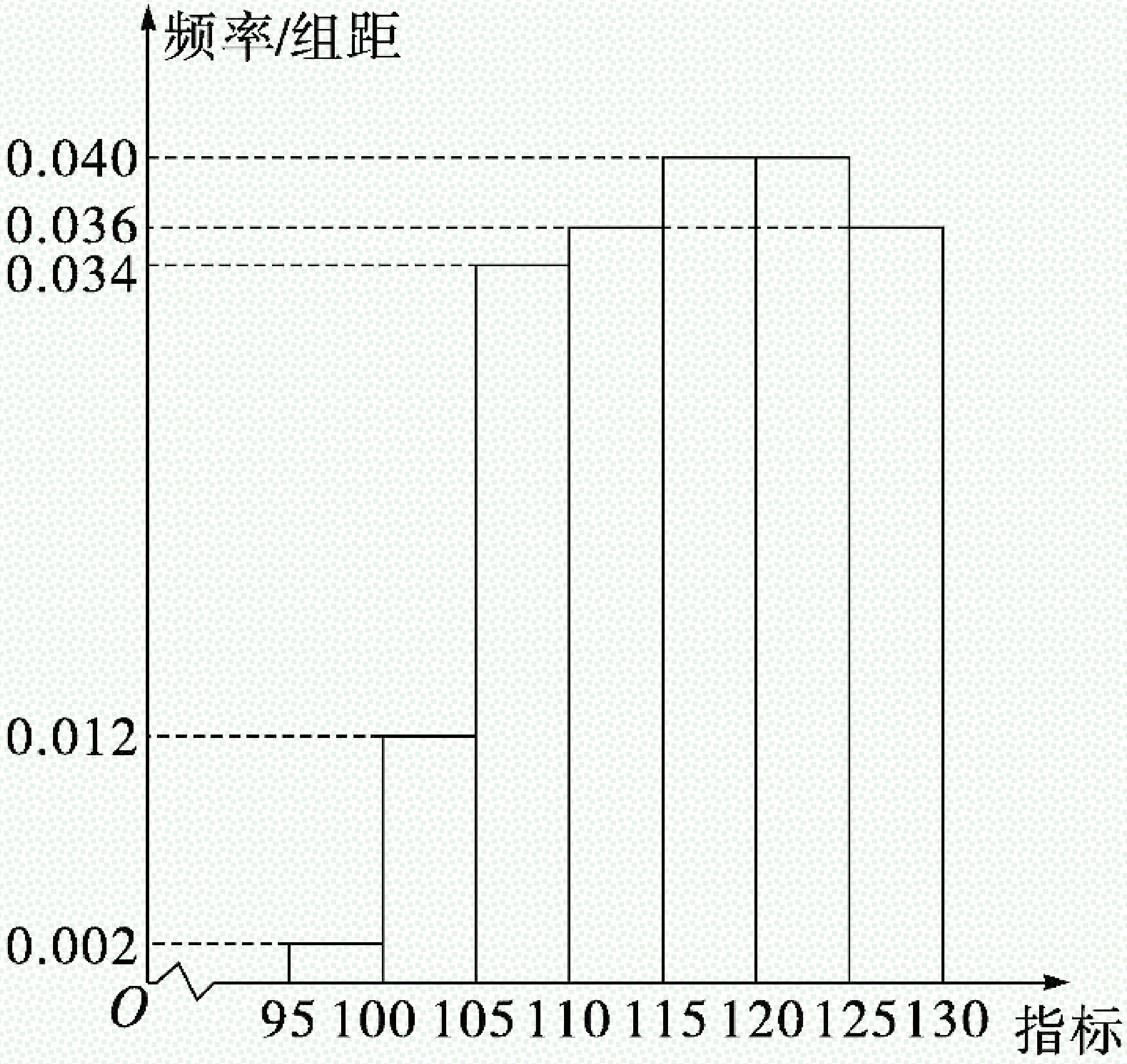
解决数列与概率的综合问题，需要综合运用数列和概率中的主干知识，特别是常在概率中探索 P_{n+1} 与 P_n 的关系，由数列的递推公式求数列的通项公式．常见与离散型随机变量的分布列和数学期望交汇的数列模型有：数列的递推公式、数列的通项公式、等比或等差数列的证明、数列的求和等．

角度一 角度二

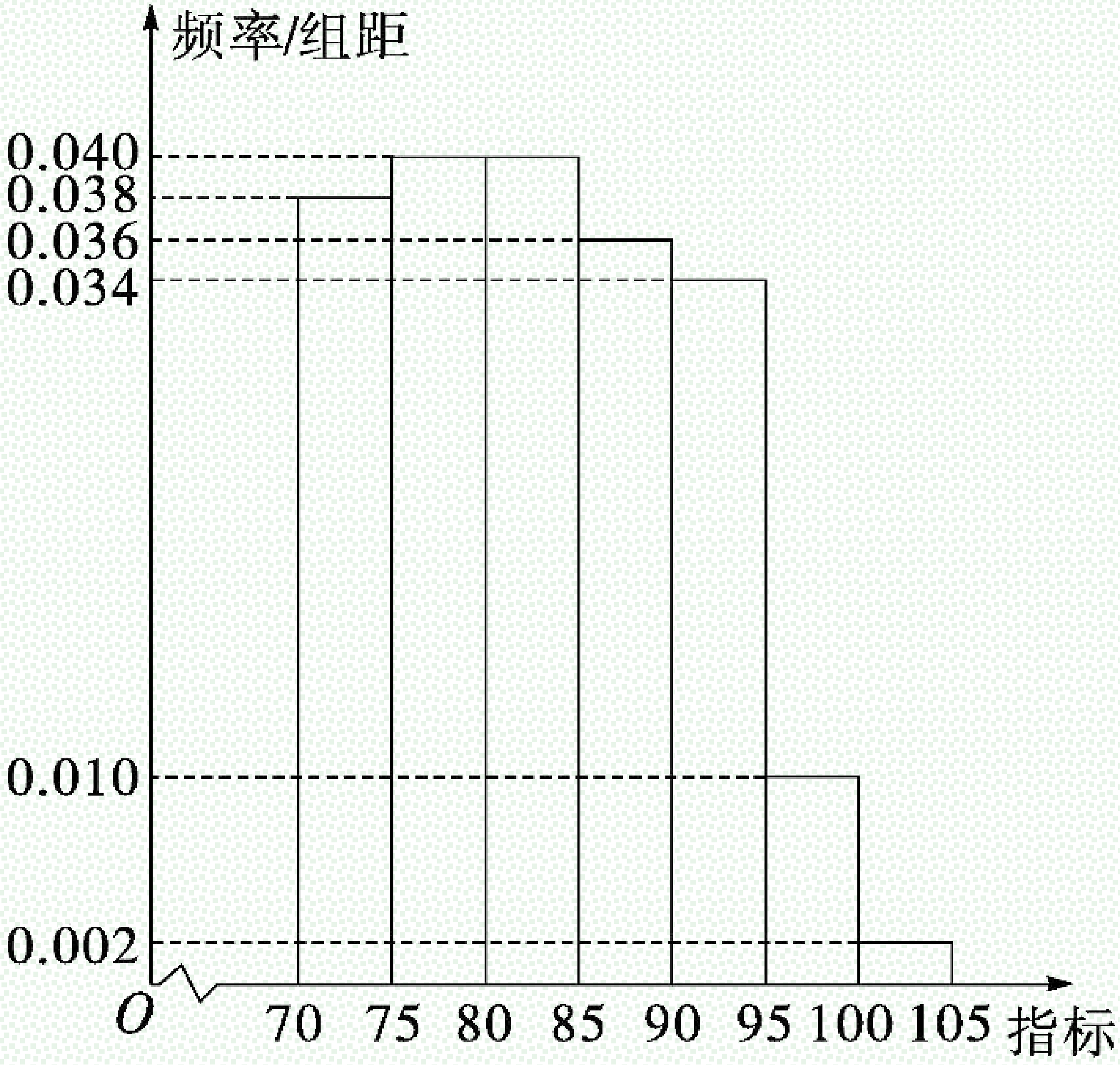
角度二　概率统计与导数、函数的交汇应用

1.概率统计与函数的综合

例2(2023·新高考Ⅱ,19)某研究小组经过研究发现某种疾病的患病者与未患病者的某项医学指标有明显差异,经过大量调查,得到如下的患病者和未患病者该指标的频率分布直方图:



患病者



未患病者

角度一 角度二

利用该指标制定一个检测标准,需要确定临界值c,将该指标大于c的人判定为阳性,小于或等于c的人判定为阴性.此检测标准的漏诊率是将患病者判定为阴性的概率,记为$p(c)$;误诊率是将未患病者判定为阳性的概率,记为$q(c)$.假设数据在组内均匀分布.以事件发生的频率作为相应事件发生的概率.

(1)当漏诊率$p(c)=0.5\%$时,求临界值c和误诊率$q(c)$;

(2)设函数$f(c)=p(c)+q(c)$.当$c\in[95,105]$时,求$f(c)$的解析式,并求$f(c)$在区间$[95,105]$的最小值.

角度一 角度二

解 (1)当$p(c)=0.5\%$时,由患病者频率分布直方图可得第一个小矩形面积为$0.002\times5=0.01$,

$\therefore c=\frac{95+100}{2}=97.5$.

由未患病者频率分布直方图可得$q(c)=0.01\times(100-97.5)+0.002\times5=0.035$.

(2)当$c\in[95,100)$时,$p(c)=(c-95)\times0.002$,$q(c)=(100-c)\times0.01+0.01$,

$\therefore f(c)=-0.008c+0.82>0.02$;

当$c\in[100,105]$时,$p(c)=5\times0.002+(c-100)\times0.012$,$q(c)=(105-c)\times0.002$,

$\therefore f(c)=0.01c-0.98\geqslant0.02$.

$$\therefore f(c)=\begin{cases}-0.008c+0.82, & c\in[95,100),\\ 0.01c-0.98, & c\in[100,105].\end{cases}$$

故当$c=100$时,$f(c)$取最小值,最小值为$f(100)=0.02$.

角度一 角度二

2.概率统计与导数的综合

例3(2024·河南三门峡模拟)2024年7月26日至8月11日在法国巴黎举行夏季奥运会.为了普及奥运知识,某大学举办了一次奥运知识竞赛,竞赛分为初赛与决赛,初赛通过后才能参加决赛.

(1)初赛从6道题中任选2题作答,若2题均答对则进入决赛.已知这6道题中小王能答对其中的4道,记小王在初赛中答对的题目个数为X,求X的数学期望以及小王在已经答对一题的前提下,仍未进入决赛的概率;

(2)该大学为鼓励学生踊跃参赛并取得佳绩,对进入决赛的学生给予一定的奖励.奖励规则如下:进入决赛的学生可连续抽奖3次,中奖1次奖励120元,中奖2次奖励180元,中奖3次奖励360元,若3次均未中奖,则奖励60元.假定每次抽奖中奖的概率均为$p(0<p<\frac{3}{4})$,且每次是否中奖相互独立.记一名进入决赛的学生恰好中奖1次的概率为$f(p)$,求$f(p)$的极大值.

角度一 角度二

解 (1)由题意知,X服从超几何分布,且$N=6,M=4,n=2$.

则 $P(X=0)=\frac{C_4^0C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$,

$P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$,

$P(X=2)=\frac{C_4^2C_2^0}{C_6^2}=\frac{2}{5}$,

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$

则 $E(X)=n\cdot\frac{M}{N}=2\times\frac{4}{6}=\frac{4}{3}$.

记事件 A:小王已经答对一题,事件 B:小王未进入决赛,

则小王在已经答对一题的前提下,仍未进入决赛的概率为

$P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{C_4^1C_2^1}{C_4^1C_2^1+C_4^2}=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$.

角度一 角度二

(2)由题意知,$f(p)=C_3^1p(1-p)^2=3p^3-6p^2+3p\ \ 0<p<\frac{3}{4}$,

则 $f'(p)=3(3p-1)(p-1)$,

令 $f'(p)=0$,

解得 $p=\frac{1}{3}$或 $p=1$(舍),

当 $p\in\ \ 0,\frac{1}{3}$ 时,$f'(p)>0$;

当 $p\in\ \ \frac{1}{3},\frac{3}{4}$ 时,$f'(p)<0$,

所以 $f(p)$在区间 $0,\frac{1}{3}$ 内单调递增,在区间 $\frac{1}{3},\frac{3}{4}$ 内单调递减,

当 $p=\frac{1}{3}$时,$f(p)$有极大值,且 $f(p)$的极大值为 $f\ \frac{1}{3}\ =\frac{4}{9}$.

角度一 角度二