数值分析复习题

一、选择题

1. 3.142 和 3.141 分别作为π 的近似数具有（ ）和（ ）位有效数字.

A．4 和 3　　B．3 和 2　　C．3 和 4　　D．4 和 4

2. 已知求积公式 $\int_1^2 f(x)dx \approx \frac{1}{6}f(1)+Af(\frac{2}{3})+\frac{1}{6}f(2)$，则 A =（ ）

A． $\frac{1}{6}$　B． $\frac{1}{3}$　C． $\frac{1}{2}$　D． $\frac{2}{3}$

3. 通过点 $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$ 的拉格朗日插值基函数 $l_0(x),l_1(x)$ 满足（　）

A． $l_0(x_0)=0,\ l_1(x_1)=0$　　B． $l_0(x_0)=0,\ l_1(x_1)=1$

C． $l_0(x_0)=1,\ l_1(x_1)=1$　　D． $l_0(x_0)=1,\ l_1(x_1)=1$

4. 设求方程 $f(x)=0$ 的根的牛顿法收敛，则它具有（　）敛速。

A．超线性　B．平方　C．线性　D．三次

5. 用列主元消元法解线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+2x_2+3x_3=3 \\ -x_1-3x_2=2 \end{cases}$ 作第一次消元后得到的第 3 个方程（　）.

A． $-x_2+x_3=2$　B． $-2x_2+1.5x_3=3.5$　C． $-2x_2+x_3=3$　D． $x_2-0.5x_3=-1.5$

二、填空

1. 设 $x^*=2.3149541...$，取 5 位有效数字，则所得的近似值x=____.

2.设一阶差商 $f(x_1,x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{1-4}{2-1}=-3$，$f(x_2,x_3)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=\frac{6-1}{4-2}=\frac{5}{2}$

..

则二阶差商 $f(x_1, x_2, x_3) =$ _____

3. 设 $X = (2,-3,-1)^T$，则 $\|X\|_2 =$ ____，$\|X\|_\infty =$ ____。

4．求方程 $x^2 - x - 1.25 = 0$ 的近似根，用迭代公式 $x = \sqrt{x + 1.25}$，取初始值 $x_0 = 1$，那么 $x_1 =$ _____。

5．解初始值问题 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 近似解的梯形公式是 $y_{k+1} \approx$ _____。

6、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$，则 A 的谱半径 $\rho(A)$ =_____。

7、设 $f(x) = 3x^2 + 5,\ x_k = kh,\ k = 0,1,2,\ldots$，则 $f[x_n, x_{n+1}, x_{n+2}] =$ _____和 $f[x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}] =$ _____。

8、若线性代数方程组 AX=b 的系数矩阵 A 为严格对角占优阵，则雅可比迭代和高斯-塞德尔迭代都_____。

9、解常微分方程初值问题的欧拉（Euler）方法的局部截断误差为_____。

10、为了使计算 $y = 10 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{3}{(x-1)^3}$ 的乘除法运算次数尽量的少,应将表达式改写成 _____。

11. 设 $X = (2,3,-4)^T$，则 $\|X\|_1 =$ ____，$\|X\|_2 =$ ____.

12. 一阶均差 $f(x_0, x_1) =$ _____

13. 已知 $n = 3$ 时，科茨系数 $C_0^{(3)} = \frac{1}{8}, C_1^{(3)} = C_2^{(3)} = \frac{3}{8}$，那么 $C_3^{(3)} =$ _____

14. 因为方程 $f(x) = x - 4 + 2^x = 0$ 在区间 $[1,2]$ 上满足_____，所以 $f(x) = 0$ 在区间内有根。

15. 取步长 $h = 0.1$，用欧拉法解初值问题 $\begin{cases} y' = \frac{y}{x^2} + y \\ y(1) = 1 \end{cases}$ 的计算公式_____.

16.设 $x^* = 2.40315$ 是真值 $x = 2.40194$ 的近似值，则 x^* 有_____位有效数字。

17. 对$f(x) = x^3 + x + 1$，差商$f[0,1,2,3] =$（　　）。

18. 设$X = (2,-3,7)^T$，则$\| X \|_\infty =$ ____。

19.牛顿–柯特斯求积公式的系数和$\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} =$ _____。

20. 若 a=2.42315 是 2.42247 的近似值，则 a 有(　　)位有效数字.

21. $l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$是以$0,1,\cdots,n$为插值节点的 Lagrange 插值基函数，则$\sum_{i=0}^{n} il_i(x) =$ (　　).

22. 设$f(x)$可微，则求方程$x = f(x)$的牛顿迭代格式是(　　).

23. 迭代公式$X^{(k+1)} = BX^{(k)} + f$收敛的充要条件是_____。

24. 解线性方程组$Ax=b$ (其中A 非奇异，b 不为 0) 的迭代格式$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$中的 B 称为(　　). 给定方程组$\begin{cases} 9x_1 - x_2 = 8 \\ x_1 - 5x_2 = -4 \end{cases}$，解此方程组的雅可比迭代格式为(　　)。

25、数值计算中主要研究的误差有_____ 和_____ 。

26、设$l_j(x)(j = 0,1,2\cdots n)$是 n 次拉格朗日插值多项式的插值基函数，则$l_j(x_i) =$ _____$(i, j = 0,1,2\cdots n)$；

$\sum_{j=0}^{n} l_j(x) =$ _____。

27、设$l_j(x)(j = 0,1,2\cdots n)$是区间$[a,b]$上的一组 n 次插值基函数。则插值型求积公式的代数精度为_____；插值型求积公式中求积系数$A_j =$ _____；且$\sum_{j=0}^{n} A_j =$ _____。

28、辛普生求积公式具有__次代数精度，其余项表达式为_____。

29、$f(x) = x^2 + 1$，则$f[1,2,3] =$ _____，$f[1,2,3,4] =$ _____ 。

30.设$x^* = 1.234$ 是真值$x = 1.23445$ 的近似值，则x^*有_____位有效数字。

31. 设 $f(x) = x^3 + x - 1$，则差商(均差)$f[0,1,2,3] =$ _____，$f[0,1,2,3,4] =$ _____。

32.求方程 $x = f(x)$ 根的牛顿迭代格式是_____。

33.已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，则 $\|A\|_\infty =$ _____，$\|A\|_1 =$ _____。

34. 方程求根的二分法的局限性是_____。

三、计算题

1. 设 $f(x) = x^3, x_0 = \frac{1}{4}, x_1 = 1, x_2 = \frac{9}{4}$

（1）试求 $f(x)$ 在 $L\left[\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right]$ 上的三次 Hermite 插值多项式 $H(x)$ 使满足 $H(x_j) = f(x_j), j = 0,1,2,\ldots \quad H'(x_1) = f'(x_1)$，$H(x)$ 以升幂形式给出。

（2）写出余项 $R(x) = f(x) - H(x)$ 的表达式

2. 已知 $r=p(z)$ 的 $p'(z)$ 满足 $|\varphi'(x) - 3| < 1$，试问如何利用 $\varphi(x)$ 构造一个收敛的简单迭代函数 $\psi(x)$，使 $x_{k+1} = \psi(x_k), k =$ 0，1…收敛？

3. 推导常微分方程的初值问题 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 的数值解公式：$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(y'_{n+1} + 4y'_n + y'_{n-1})$

（提示： 利用 Simpson 求积公式。）

4. 利用矩阵的 LU 分解法解方程 组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 18 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \end{cases}$

5. 已知函数 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 的一组数据：

x_i	0	1	2
y_i	1	0.5	0.2

求分段线性插值函数，并计算 $f(1.5)$ 的近似值.

6. 已知线性方程组 $\begin{cases} 10x_1 - x_2 - 2x_3 = 7.2 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 8.3 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = 4.2 \end{cases}$ （1）写出雅可比迭代公式、高斯－塞德尔迭代公式；（ 2）于初始值 $X^{(0)} = (0,0,0)$，应用雅可比迭代公式、高斯－塞德尔迭代公式分别计算$X^{(1)}$（保留小数点后五位数字）.

7. 用牛顿法求方程$x^3 - 3x - 1 = 0$ 在$[1,2]$之间的近似根

（1）请指出为什么初值应取 2？（2）请用牛顿法求出近似根，精确到 0.0001.

8. 写出梯形公式和辛 卜生公式，并用来分别计算积分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.

9．用二次拉格朗日插值多项式$L_2(x)$计算$\sin 0.34$的值。

插值节点和相应的函数值是（0，0），（0.30，0.2955），（0.40，0.3894）。

10.用二分法求方程$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$在 $[1.0,1.5]$区间内的一个根，误差限$\varepsilon = 10^{-2}$ 。

11.用高斯-塞德尔方法解方程组 $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases}$，取 $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ ，迭代三次(要求按五位有效数字计算).。

12.求系数 A_1，A_2 和A_3，使求积公式

$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_1 f(-1) + A_2 f(-\frac{1}{3}) + A_3 f(\frac{1}{3})$对于次数 ≤ 2的一切多项式都精确成立

13. 对方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 15 \\ 10x_1 - 4x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 8 \end{cases}$ 试建立一种收敛的 Seidel 迭代公式，说明理由

14. 确定求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx Af(-0.5) + Bf(x_1) + Cf(0.5)$ 的待定参数，使其代数精度尽量高，并确定其代数精度.

15. 设初值问题 $\begin{cases} y' = 3x + 2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $0 < x < 1$. (1) 写出用 Euler 方法、步长h=0.1 解上述初值问题数值解的公式；

..

(2)写出用改进的 Euler 法（梯形法）、步长 h=0.2 解上述初值问题数值解的公式，并求解y_1，y_2，保留两位小数。

16. 取节点$x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$，求函数$y = e^{-x}$在区间[0,1]上的二次插值多项式$P_2(x)$，并估计误差。

17、已知函数$y = f(x)$的相关数据

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
$y_i = f(x_i)$	1	3	9	27

由牛顿插值公式求三次插值多项式$P_3(x)$，并计算$\sqrt{3} = P(\frac{1}{2})$的近似值。

18、利用尤拉公式求解初值问题，其中步长$h = 0.1$，$\begin{cases} y' = -y + x + 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$ $x \in (0,0.6)$。

19．确定求积公式$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_0 f(-h) + A_1 f(0) + A_2 f(h)$。

中待定参数A_i的值$(i = 0,1,2)$，使求积公式的代数精度尽量高；并指出此时求积公式的代数精度

20、已知一组试验数据如下：

x_i	1	2	3	4	5
f_i	4	4.5	6	8	8.5

求它的拟合曲线（直线）。用列主元消去法解线性方程组$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 + 30x_3 = 32. \end{cases}$ 22. 已知

x_i	-1	2	4	5
$f(x_i)$	-2	4	5	7

(1)用拉格朗日插法求$f(x)$的三次插值多项式；(2)求x， 使$f(x) = 0$。

确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精确度尽量高，并指明求积公式所具有的代数精确度

$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx Af(-h) + Bf(x_1)$

..

..

24、用 Gauss 消去法求解下列方程组 $\begin{cases} \frac{1}{4}x_1+\frac{1}{5}x_2+\frac{1}{6}x_3=9 \\ \frac{1}{3}x_1+\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{5}x_3=8 \\ \frac{1}{2}x_1+x_2+2x_3=8 \end{cases}$

. 试求 x_1, x_2 使求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x) \approx \frac{1}{3}[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]$ 的代数精度尽量高，并求其代数精度。 . 取步长 h=0.2, 用梯形法解常微分方程初值问题 $\begin{cases} y'=2x-5y \\ y(1)=1 \end{cases} (1\le x\le 2)$

. 用列主元消去法求解方程组 $\begin{cases} 12x_1-3x_2+3x_3=15 \\ -18x_1+3x_2+3x_3=-15 \\ x_1+x_2+x_3=6 \end{cases}$ 并求出系数矩阵 A 的行列式 detA 的值.

用牛顿(切线)法求 $\sqrt{3}$ 的近似值。取 x_0=1.7, 计算三次，保留五位小数。29、已知数据如下：

x_i	1	1.4	1.8	2.2	2.6
y_i	0.931	0.473	0.297	0.224	0.168

求形如 $y=\frac{1}{a+bx}$ 拟合函数。

30、用二次拉格朗日插值多项式 $L_2(x)$ 计算 sin0.34 。插值节点和相应的函数值如下表。

x_i	0.0	0.30	0.40
$y_i=f(x_i)$	0.0	0.2955	0.3894

31、利用改进的尤拉方法求解初值问题，其中步长 h = 0.2

$\begin{cases} y'=y+x, \\ y(0)=1. \end{cases}$ $x\in(0,0.8)$

32、讨论用 Jacobi 和Gauss-Seidel 迭代法求解方程组**Ax=b** 的收敛性，如果收敛，比较哪种方法收敛快。其中

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

简述题：叙述在数值运算中，误差分析的方法与原则是什么？

..

数值分析复习题答案

一、选择题 1.A　2.D　3.D　4.C　5.B

二、填空 1、2.3150　2、$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)}{x_3-x_1}=\frac{\frac{5}{2}-(-3)}{4-1}=\frac{11}{6}$　3、6 和 $\sqrt{14}$　4、1.5

5、$y_k+\frac{h}{2}[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1})]$　6、$\rho(A)=\sqrt{6}$　7、$f[x_n,x_{n+1},x_{n+2}]=3, f[x_n,x_{n+1},x_{n+2},x_{n+3}]=0$；8、收敛　9、$O(h)$　10、$y=10+\frac{1}{x-1}\left(1+\frac{1}{(x-1)}\left(2-\frac{3}{(x-1)}\right)\right)$　11. 9 和 $\sqrt{29}$；12 $\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$　13. $\frac{1}{8}$

14. $f(1)f(2)<0$　15. $\begin{cases} y_{k+1}=y_k\left(1.1+\frac{0.1}{(1+0.1k)^2}\right), k=0,1,2\cdots \\ y_0=1 \end{cases}$；16、3；17、1；18、7；19、1；20. 3；

21. x；22. $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-f(x_n)}{1-f'(x_n)}$；23. $\rho(B)<1$；24、.迭代矩阵，$\begin{cases} x_1^{k+1}=\frac{1}{9}(8+x_2^{(k)}) \\ x_2^{k+1}=\frac{1}{5}(4+x_1^{(k)}) \end{cases}$；25.相对误差　绝对误差

26. $\begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j \end{cases}$　1；27. 至少是 n　$\int_a^b l_k(x)dx$，b-a；28. 3　$-\frac{b-a}{180}(\frac{b-a}{2})^4 f^{(4)}(\zeta), \zeta\in(a,b)$；29. 1 0；30、4；31、1，0；32、$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-f(x_n)}{1-f'(x_n)}$；33、 7, 6；34、收敛速度慢，不能求偶重根。

三、计算题

1．解：（1）$H(x)=-\frac{14}{225}x^3+\frac{263}{450}x^2+\frac{233}{450}x-\frac{1}{25}$

（2）$R(x)=\frac{1}{4!}\frac{9}{16}\xi^{-\frac{5}{2}}(x-\frac{1}{4})(x-1)^2(x-\frac{9}{4}), \xi=\xi(x)\in(\frac{1}{4},\frac{9}{4})$

2．解：由 $x=\varphi(x)$，可得 $x-3x=\varphi(x)-3x$，$x=-\frac{1}{2}(\varphi(x)-3x)=\psi(x)$

因 $\psi'(x)=-\frac{1}{2}(\varphi'(x)-3)$，故 $|\psi'(x)|=\frac{1}{2}|\varphi'(x)-3|<\frac{1}{2}<1$

故 $x_{k+1}=\psi(x_k)=-\frac{1}{2}[\varphi(x_k)-3x_k]$，k=0,1,.... 收敛。

..

3．.解：数值积分方法构造该数值解公式：对方程 y’ = f(x)在区间 $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ 上积分，

$$y(x_{n+1}) = y(x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx$$

得 $\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx$，记步长为 h，对积分 用 Simpson 求积公式得

$$\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx \approx \frac{2h}{6}[f(x_{n-1}) + 4f(x_n) + f(x_{n+1})] \approx \frac{h}{3}(y'_{n+1} + 4y'_n + y'_{n-1})$$

所以得数值解公式：
$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(y'_{n+1} + 4y'_n + y'_{n-1})$$

4．解

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & -4 \\ & & -24 \end{bmatrix}$$

令 Ly = b 得 y = (14,-10,-72)ᵀ，Ux = y 得 x = (1,2,3)ᵀ．

5. 解 $x \in [0,1]$ $\tilde{L}(x) = \frac{x-1}{0-1} \times 1 + \frac{x-0}{1-0} \times 0.5 = 1 - 0.5x$

$x \in [1,2]$ $\tilde{L}(x) = \frac{x-2}{1-2} \times 0.5 + \frac{x-1}{2-1} \times 0.2 = -0.3x + 0.8$

所以分段线性插值函数为

$$\tilde{L}(x) = \begin{cases} 1 - 0.5x & x \in [0,1] \\ 0.8 - 0.3x & x \in [1,2] \end{cases}$$

$L(1.5) = 0.8 - 0.3 \times 1.5 = 0.35$

6. 解：原方程组同解变形为

$$\begin{cases} x_1 = 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.72 \\ x_2 = 0.1x_1 - 0.2x_3 + 0.83 \\ x_3 = 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.84 \end{cases}$$

雅可比迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(m+1)} = 0.1x_2^{(m)} + 0.2x_3^{(m)} + 0.72 \\ x_2^{(m+1)} = 0.1x_1^{(m)} - 0.2x_3^{(m)} + 0.83 \\ x_3^{(m+1)} = 0.2x_1^{(m)} + 0.2x_2^{(m)} + 0.84 \end{cases} (m = 0,1\ldots)$$

高斯－塞德尔迭代法公式

$$\begin{cases} x_1^{(m+1)} = 0.1x_2^{(m)} + 0.2x_3^{(m)} + 0.72 \\ x_2^{(m+1)} = 0.1x_1^{(m+1)} - 0.2x_3^{(m)} + 0.83 \\ x_3^{(m+1)} = 0.2x_1^{(m+1)} + 0.2x_2^{(m+1)} + 0.84 \end{cases} (m = 0,1\ldots)$$

..

用雅可比迭代公式得 $X^{(1)}=(0.720\ 00,0.830\ 00,0.840\ 00)$

用高斯－塞德尔迭代公式得 $X^{(1)}=(0.720\ 00,0.902\ 00,1.164\ 40)$

7. 解： $f(x)=x^3-3x-1$ $f(1)=-3<0$ $f(2)=1>0$

$f'(x)=3x^2-3$， $f''(x)=12x$， $f(2)=24>0$，故取$x=2$作初始值

迭代公式为

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}=x_{n-1}-\frac{x_{n-1}^3-3x_{n-1}-1}{3x_{n-1}^2-3}\ (或\frac{2x_{n-1}^3+1}{3(x_{n-1}^2-1)}),\quad n=1,2,\ldots$$

$x_0=2$，$x_1=\frac{2\times 3^3+1}{3\times(2^2-1)}=1.88889$，$x_2=\frac{2\times 1.88889^3+1}{3\times(1.88889^2-1)}=1.87945$，

$|x_2-x_1|=0.00944>0.0001$

$x_3=\frac{2\times 1.87945^3+1}{3\times(1.87945^2-1)}=1.87939$，$|x_3-x_2|=0.00006<0.0001$

方程的根$x^*\approx 1.87939$

8.解 梯形公式 $\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$

应用梯形公式得 $\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\approx\frac{1}{2}[\frac{1}{1+0}+\frac{1}{1+1}]=0.75$

辛 卜生公式为 $\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$

应用辛 卜生公式得 $\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\approx\frac{1-0}{6}[f(0)+4f(\frac{1+0}{2})+f(1)]$

$$=\frac{1}{6}[\frac{1}{1+0}+4\times\frac{1}{1+\frac{1}{2}}+\frac{1}{1+1}]=\frac{25}{36}$$

9．解

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f_2$$

=0.333336

10.用二分法求方程$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$在 $[1.0,1.5]$区间内的一个根，误差限$\varepsilon = 10^{-2}$。

解

N = 6

$x_1 = 1.25$　　$x_2 = 1.375$　　$x_3 = 1.3125$

$x_4 = 1.34375$　$x_5 = 1.328125$　$x_6 = 1.3203125$

11.解 迭代公式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(11-2x_2^{(k)}-x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}(18-x_1^{(k+1)}-2x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}(22-2x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	2.75	3.8125	2.5375
2	0.20938	3.1789	3.6805
3	0.24043	2.5997	3.1839

12.解：

$$A_1+A_2+A_3=2 \quad -A_1-\frac{1}{3}A_2+\frac{1}{3}A_3=0 \quad A_1+\frac{1}{9}A_2+\frac{1}{9}A_3=\frac{2}{3}$$

$$A_1=\frac{1}{2} \qquad A_2=0 \qquad A_3=\frac{3}{2}$$

13. 解：调整方程组的位置，使系数矩阵严格对角占优

$$\begin{cases} 10x_1-4x_2-x_3=5 \\ 2x_1+10x_2-4x_3=8 \\ 3x_1+2x_2+10x_3=15 \end{cases}$$

故对应的高斯-塞德尔迭代法收敛.迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(4x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 5) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-2x_1^{(k+1)} + 4x_3^{(k)} + 8) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-3x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)} + 15) \end{cases}$$

取 $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$,经 7 步迭代可得： $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(7)} = (0.999\,991\,459,\ 0.999\,950\,326,\ 1.000\,010)^T$

14. 4. 解

3. 假设公式对 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ 精确成立则有

$$\begin{cases} A + B + C = 2 \\ -0.5A + Bx_1 + 0.5C = 0 \\ 0.25A + Bx_1^2 + 0.25C = \frac{2}{3} \\ -0.125A + Bx_1^3 + 0.125C = 0 \end{cases}$$

解此方程组得 $A = C = \frac{4}{3}, B = -\frac{2}{3}$

求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}[4f(-0.5) - 2f(0) + 4f(0.5)],\text{当}f(x) = x^4\text{时},$$

左边 $= \frac{2}{5}$ 右边 $= \frac{1}{6}$ 左边 ≠ 右边 ：代数精度为3。

15. 解 (1) $y_{n+1} = y_n + 0.1(3x_n + 2y_n) = 0.3x_n + 1.2y_n$

(2) $y_{n+1} = y_n + \frac{0.2}{2}(3x_n + 2y_n) + 3(x_n + 0.2) + 2y_{n+1}$

$= y_n + 0.1(6x_n + 2y_n + 2y_{n+1} + 0.6)$

$: y_{n+1} = \frac{3}{2}y_n + \frac{3}{4}x_n + \frac{3}{40}$

迭达得 $y_1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{40} = 1.575, y_2 = \frac{3}{2} \times \frac{63}{40} + \frac{3}{4} \times 0.2 + \frac{3}{40} = 2.585$

16.解：

$$p_2(x) = e^0 + \frac{e^{-0.5} - 1}{0.5 - 0}(x - 0) + \frac{\frac{e^{-1} - e^{-0.5}}{1 - 0.5} - \frac{e^{-0.5} - 1}{0.5 - 0}}{1 - 0}(x - 0)(x - 0.5)$$

$1 + 2(e^{-0.5} - 1)x + 2(e^{-1} - 2e^{-0.5} + 1)x(x - 0.5)$

$y''' = -e^x, M_3 = \max_{x \in [0,1]} |y'''| = 1, e^x - p_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x(x - 0.5)(x - 1)$

$: 0 \le x \le 1$时 , $|e^x - p_2(x)| \le \frac{1}{3!}|x(x - 0.5)(x - 1)|$

17、解：差商表

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	0	1			
1	1	3	2		
2	2	9	6	2	
3	3	27	8	6	4/3

由牛顿插值公式：

$$p_3(x) = N_3(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x + 1,$$

$$\sqrt{3} \approx p_3(\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}(\frac{1}{2})^3 - 2(\frac{1}{2})^2 + \frac{8}{3}(\frac{1}{2}) + 1 = 2$$

18、解：

$$f(x, y) = -y + x + 1,\ y_0 = \eta = 1, h = 0.1,$$

$$y_{n+1} = y_n + 0.1(x_n + 1 - y_n),\ (n = 0,1,2,3,\cdots)$$

$$y_0 = 1,$$

$$y_k = 1.000000;1.000000;1.010000;1.029000;$$

$$1.056100;1.090490;1.131441.$$

19．解：分别将 $f(x) = 1, x, x^2$，代入求积公式，可得 $A_0 = A_2 = \frac{1}{3}h,\ A_1 = \frac{4}{3}h$。

令 $f(x) = x^3$ 时求积公式成立，而 $f(x) = x^4$ 时公式不成立，从而精度为 3。

20、解：设 $y = a + bx$ 则可得 $\begin{cases} 5a + 15b = 31 \\ 15a + 55b = 105.5 \end{cases}$

于是 $a = 2.45,\ b = 1.25$，即 $y = 2.45 + 1.25x$。解：

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 30 & 32 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 3 & 30 & 32 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 3 & 30 & 32 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 4 & 3 & 30 & 32 \\ 0 & 11/4 & -41/2 & -19 \\ 0 & 3/2 & 1 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 3 & 30 & 32 \\ 0 & 11/4 & -41/2 & -19 \\ 0 & 0 & 2/1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\to \begin{pmatrix} 4 & 3 & 30 & 32 \\ 0 & 11 & -82 & -38 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

即 $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 30x_3 = 32, \\ 11x_2 - 82x_3 = -38, \\ x_3 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 13, \\ x_2 = 8, \\ x_3 = 2. \end{cases}$

22. 解：用反插值得

$$x = f_{-1}(y) \approx \frac{(y-4)(y-5)(y-7)}{(2-4)(2-5)(2-7)} + 2\frac{(y-2)(y-5)(y-7)}{(4-2)(4-5)(4-7)} + 4\frac{(y-2)(y-4)(y-7)}{(5-2)(5-4)(5-7)}$$

$$+5\frac{(y-2)(y-4)(y-5)}{(7-2)(7-4)(7-5)}$$

令$y = 0$得$x = f_{-1}(0) \approx \frac{8}{3}$

解 令$f(x) = 1, x, x^2$代入公式精确成立，得

$$\begin{cases} A + B = 2h \\ -hA + Bx_1 = 0 \\ h^2A + Bx_1^2 = \frac{2}{3}h^3 \end{cases};$$

解得 $x_1 = \frac{1}{3}h, B = \frac{3}{2}h, A = \frac{1}{2}h$，得求积公式

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(-h) + 3f(\frac{1}{3}h)]$$

对$f(x) = x^3$；$0 = \int_{-h}^{h} f(x)dx \neq \frac{h}{2}[(-h)^3 + 3f(\frac{1}{3}h)^3] = -\frac{4}{9}h^4$ 故求积公式具有 2 次代数精确度。

24、解：本题是 Gauss 消去法解具体方程组，只要直接用消元公式及回代公式直接计算即可。

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 9 \\ -\frac{1}{60}x_2 - \frac{1}{45}x_3 = -4 \\ \frac{13}{15}x_3 = -154 \end{cases}$$

故

$x_3 = -154 \times 153 = -177.69$

$$x_2 = -60(-4 + \frac{1}{45}x_3) = 476.92$$

$$x_1 = 4(9 - \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{5}x_2) = -227.08$$

. 解：由等式对$f(x) = 1, x, x^2$精确成立得：$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1^2 + 3x_2^2 = 1 \end{cases}$，

解此方程组得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1-\sqrt{6}}{5} \\ x_2 = \frac{3+2\sqrt{6}}{15} \end{cases}$$

又当$f(x) = x^3$时 左边≠右边

..

..

：　此公式的代数精度为 2．解：梯形法为 $y_{n+1} = y_n + 0.2[(2x_n - 5y_n) + (2x_{n+1} - 5y_{n+1})]$　即

$$y_{n+1} = \frac{2}{15}(x_n + x_{n+1}) + \frac{1}{15}y_n$$

迭代得

$$y_1 = 0.62667,\ y_2 = 0.55566,\ y_3 = 0.58519,$$
$$y_4 = 0.64840,\ y_5 = 0.72280$$

．**解：**先选列主元 $i_1 = 2$，2 行与 1 行交 换得 $\left[A^{(1)} \mid b^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$，消元 $\begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & 5 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \end{bmatrix}$；3 行与 2 行交换 $\begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & 5 \end{bmatrix}$；消元 $\begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \\ 0 & 0 & \frac{22}{7} & \frac{66}{7} \end{bmatrix}$；

回代得解 $x_3 = 3, x_2 = 2, x_1 = 1$；行列式得 $\det A = -18 \cdot \frac{7}{16} \cdot \frac{22}{7} = -66$

解：$\sqrt{3}$ 是 $f(x) = x^2 - 3 = 0$ 的正根，$f'(x) = 2x$，牛顿迭代公式 为

$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n}$，　即　$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{3}{2x_n}(n = 0,1,2,...)$

取 x0=1.7，列表如下：

n	1	2	3
x_n	1.73235	1.73205	1.73205

29、已知数据如下：

x_i	1	1.4	1.8	2.2	2.6
y_i	0.931	0.473	0.297	0.224	0.168

求形如 $y = \frac{1}{a + bx}$ 拟合函数。

解：

..

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/146144145131010224