

型)

- A.  $\left[0, \frac{1}{4}\right)$       B.  $\left[0, \frac{1}{e}\right)$       C.  $\left[0, \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}}\right)$       D.  $[0, e]$

8. 已知函数  $f(x)$ ，若在  $f(x)$  图象上存在点  $P$ ，使得点  $P$  到坐标原点的距离  $d \leq 1$ ，则

称函数  $f(x)$  为“向心函数”. 下列四个选项中，是“向心函数”的有 ( )

- A.  $f(x) = x + \frac{1}{4x}$       B.  $f(x) = \sqrt{x + \frac{5}{4}}$   
C.  $f(x) = \sqrt{2}\cos x$       D.  $f(x) = e^x + \frac{1}{2}$

## 二、多选题

9. 已知复数  $z_1, z_2$ ，则下列结论正确的有 ( )

- A.  $z_1^2 = \overline{z_1^2}$       B.  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$       C.  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$   
D.  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

10. 在发生某公共卫生事件期间，有专业机构认为该事件在一段时间内没有发生大规模群体感染的标志为“连续 7 日，每天新增疑似病例不超过 5 人”. 根据过去连续 7 天的新增疑似病例数据信息，下列各项中，一定没有发生大规模群体感染的是 ( )

- A. 众数为 1 且中位数为 4      B. 平均数为 3 且极差小于或等于 2  
C. 标准差为  $\sqrt{2}$  且平均数为 2      D. 平均数为 2 且中位数为 3

11. 已知数列  $C_1: 0, 1, 0, 1, 0$ ，现在对该数列进行一种变换，规则  $f$ : 每个 0 都变为“1, 0, 1”，

每个 1 都变为“0, 1, 0”，得到一个新数列，记数列  $C_{k+1} = f(C_k), k = 1, 2, 3, \dots$ ，且  $C_n$  的所

有项的和为  $S_n$ ，则以下判断正确的是 ( )

- A.  $C_n$  的项数为  $5 \cdot 3^{n-1}$       B.  $S_3 = 22$   
C.  $C_4$  中 1 的个数为 68      D.  $S_n = \frac{5 \cdot 3^{n-1} - 1}{2}$

## 三、填空题

12. 某农业科研所在 5 块面积相同的长方形试验田中均种植了同一种农作物，每一块试验田的施肥量  $x$  (单位: kg) 与产量  $y$  (单位: kg) 之间有如下关系:

|                   |     |     |      |      |      |
|-------------------|-----|-----|------|------|------|
| 施肥量 $x/\text{kg}$ | 20  | 40  | 50   | 60   | 80   |
| 产量 $y/\text{kg}$  | 600 | 800 | 1200 | 1000 | 1400 |

已知  $y$  与  $x$  满足线性回归方程  $\hat{y} = 13x + \hat{a}$ , 则当施肥量为 80kg 时, 残差为\_\_\_\_\_.

13. 在锐角  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ . 若

$\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - \frac{2}{3} \sin A \sin B$ , 则  $\frac{b}{a}$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

14. 已知  $f(x)$  不是常数函数, 且满足:  $f(x) + f(-x) = 0, f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -f(x)$ . ①请写出函数  $f(x)$  的一个解析式\_\_\_\_\_; ②将你写出的解析式

$f(x) + \log_2(\sqrt{x^2 + 1} - x) + \frac{-a^2 + 2a - 3}{2}$  得到新的函数  $h(x)$ , 若  $h(-3) + h(3) = -3$ , 则实数  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

#### 四、解答题

15. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx + n$  在  $x = 1$  时取得极值.

(1) 求实数  $m$  的值;

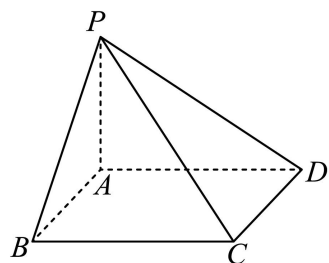
(2) 若对于任意的  $x \in [2, 4]$ ,  $f(x) > n^2$  恒成立, 求实数  $n$  的取值范围.

16. 在课外体育活动中, 甲、乙两名同学进行投篮游戏, 每人投 3 次, 每投进一次得 2 分, 否则得 0 分. 已知甲每次投进的概率为  $\frac{3}{5}$ , 且每次投篮相互独立; 乙第一次投篮, 投进的概率为  $\frac{4}{5}$ , 从第二次投篮开始, 若前一次投进, 则该次投进的概率为  $\frac{3}{4}$ , 若前一次没有投进, 则该次投进的概率为  $\frac{1}{2}$ .

(1) 求甲 3 次投篮得 4 分的概率;

(2) 若乙 3 次投篮得分为  $X$ , 求  $X$  的分布列和数学期望.

17. 设四边形  $ABCD$  为矩形, 点  $P$  为平面  $ABCD$  外一点, 且  $PA \perp$  平面  $ABCD$ , 若  $PA = AB = 1, BC = 2$ .



(1) 求  $PC$  与平面  $PAD$  所成角的大小;

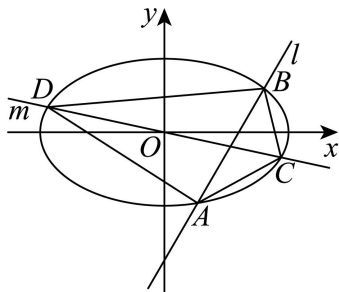
(2) 在  $BC$  边上是否存在一点  $G$ , 使得点  $D$  到平面  $PAG$  的距离为  $\sqrt{2}$ , 若存在, 求出  $BG$  的值, 若不存在, 请说明理由;

(3) 若点  $E$  是  $PD$  的中点, 在  $\triangle PAB$  内确定一点  $H$ , 使  $CH + EH$  的值最小, 并求此时  $HB$  的

值.

18. 椭圆  $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点是  $F\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$ , 且经过点  $E(1, 1)$ ; 直线  $l$  与

椭圆  $C_1$  交于  $A, B$  两点, 以  $AB$  为直径的圆过原点.



(1) 求椭圆  $C_1$  的方程;

(2) 当直线  $AB$  的斜率为 2 时, 求  $AB$  的长度;

(3) 若过原点的直线  $m$  与椭圆  $C_1$  交于  $C, D$  两点, 且  $\overrightarrow{OC} = t(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ , 求四边形  $ACBD$  面积的范围.

19. 悬链线的原理运用于悬索桥、架空电缆、双曲拱桥、拱坝等工程. 通过适当建立坐

标系, 悬链线可为双曲余弦函数  $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  的图象, 类比三角函数的三种性质: ①

平方关系: ①  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , ② 和角公式:  $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ , ③ 导

数:  $\begin{cases} (\sin x)' = \cos x, \\ (\cos x)' = -\sin x, \end{cases}$  定义双曲正弦函数  $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

(1) 直接写出  $sh(x)$ ,  $ch(x)$  具有的类似①、②、③的三种性质 (不需要证明);

(2) 若当  $x > 0$  时,  $sh(x) > ax$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围;

(3) 求  $f(x) = ch(x) - \cos x - x^2$  的最小值.

参考答案:

1. B

【分析】计算出集合  $B$  后，由交集的定义计算即可得.

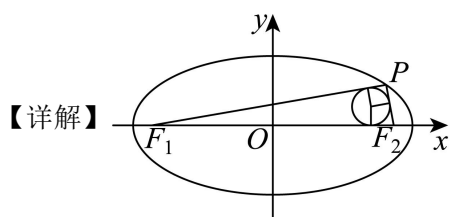
【详解】由  $2^x > \frac{1}{2}$ ，可得  $x > -1$ ，即  $B = \{x | x > -1\}$ ，

故  $A \cap B = (-1, 4)$ .

故选：B.

2. B

【分析】由椭圆定义及圆切线性质，结合直角三角形求内切圆半径.



由椭圆定义及圆切线性质知： $r = \frac{|PF_1| + |PF_2| - |F_1F_2|}{2} = a - c = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}$ .

故选：B

3. C

【分析】根据递推公式，结合  $a_1, a_2$ ，通过赋值，即可求得  $a_4$ .

【详解】由题意可知  $a_3 = a_2 + 3a_1 + 2 = 1 + 3 + 2 = 6$ ， $a_4 = a_3 + 3a_2 + 2 = 6 + 3 \times 1 + 2 = 11$ .

故选：C.

4. D

【分析】根据条件概率公式计算即可.

【详解】由题意得，事件  $A$  包含的样本点数  $n(A) = C_3^2 + C_4^2 = 9$ ，

事件  $A$  和  $B$  包含的样本点数  $n(AB) = C_4^2 = 6$ ，

所以  $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ .

故选：D

5. B

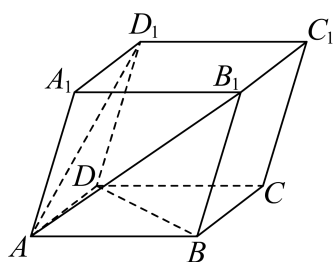
【分析】利用向量数量积的即可求出夹角的余弦值.

【详解】  $\overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot \overrightarrow{AD}$   
 $= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{DB} = 5,$

故  $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BD} = -5,$

所以  $\cos \langle \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BD} \rangle = \frac{\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = \frac{-5}{3 \times 4} = -\frac{5}{12}.$

故选：B.



6. D

【分析】由已知作图如图所示，设  $\angle AEF = \alpha$ ，利用三角函数表示各边长，借助三角函数性质计算可得结果.

【详解】如图所示，  $EF = 10, FG = 20,$

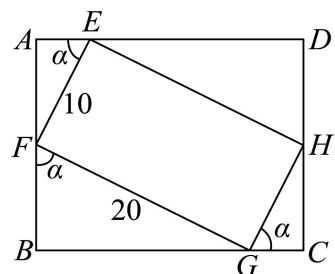
令  $\angle AEF = \alpha$ ，则  $AF = 10 \sin \alpha, \angle AFE = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ，则  $\angle BFG = \alpha$ ，

$BF = 20 \cos \alpha, BG = 20 \sin \alpha, \angle BGF = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ，则  $\angle CGH = \alpha, CG = 10 \cos \alpha$

$\therefore$  周长  $= 2AB + 2BC = 2(10 \sin \alpha + 20 \cos \alpha) + 2(20 \sin \alpha + 10 \cos \alpha)$

$$= 60 \sin \alpha + 60 \cos \alpha = 60\sqrt{2} \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) \leq 60\sqrt{2},$$

故选：D.



【点睛】关键点睛：本题解决的关键是利用三角函数的定义表示出所求周长，再利用三角恒等变换即可得解.

7. C

【分析】作出  $f(x)$  的图象，根据  $g(x) = f(x) - m$  有三个不同的零点，转化  $f(x) = m$  为有三个根，求出  $x_1, x_2, x_3$  关系，构造函数求出函数的导数，利用导数研究取值范围即可。

【详解】作出函数  $f(x)$  的图象如图，

不妨设  $x_1 < x_2 < x_3$ ，则  $f(x) = m$  有三个不同的根，则  $0 \leq m < \frac{1}{4}$ ，

当  $x \leq 0$  时， $-x^2 - x - m = 0$ ，得  $x^2 + x + m = 0$ ，则  $x_1 \cdot x_2 = m$ ，

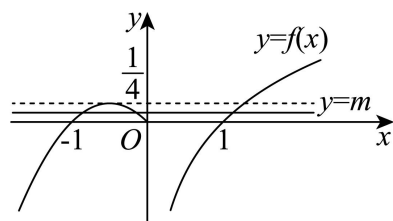
当  $x > 0$  时， $\ln x_3 = m$ ， $x_3 = e^m$ ，则  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = me^m$ ，

设  $h(m) = me^m$  ( $0 \leq m < \frac{1}{4}$ )，则  $h'(m) = (m+1)e^m > 0$ ，

所以  $h(m)$  在  $\left[0, \frac{1}{4}\right)$  上单调递增，

所以  $h(x) \in \left[0, \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}}\right)$ ，即  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$  的取值范围是  $\left[0, \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}}\right)$ 。

故选：C。



8. B

【分析】设  $P(x, f(x))$ ，结合选项中函数解析式，即可表示出  $|PO|^2$  的表达式，结合不等式知识可判断 A、B；利用构造函数，求出导数判断函数单调性，即可判断  $|PO|^2$  与 1 的大小关系，可判断 C、D。

【详解】对于 A，设  $P(x, f(x))$ ，则  $|PO|^2 = x^2 + f^2(x) = x^2 + \left(x + \frac{1}{4x}\right)^2$

$$= 2x^2 + \frac{1}{16x^2} + \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{2}{16}} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} > 1,$$

当且仅当  $2x^2 = \frac{1}{16x^2}$ ，即  $x^4 = \frac{1}{32}$  时，上述等号成立，所以  $|PO|_{\min} > 1$ ，即 A 不正确；

$$\text{对于 B, } |PO|^2 = x^2 + \left(\sqrt{x + \frac{5}{4}}\right)^2 = x^2 + x + \frac{5}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \geq 1,$$

当  $x = -\frac{1}{2}$  时, 等号成立, 所以  $|PO|_{\min} = 1$ ,

在  $f(x)$  图象上存在点  $P$ , 使得点  $P$  到坐标原点的距离  $d = 1$ , 符合题意, 即 B 正确;

对于 C,  $|PO|^2 = x^2 + 2\cos^2 x$ , 显然当  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  时,  $|PO|^2 > 1$ ,

此时在  $f(x)$  图象上不存在点  $P$ , 使得点  $P$  到坐标原点的距离  $d \leq 1$ ;

当  $x \in [-1, 1]$  时, 令  $D(x) = x^2 + 2\cos^2 x$ , 则  $D'(x) = 2x - 4\sin x \cos x = 2x - 2\sin 2x$ ,

设  $G(x) = 2x - 2\sin 2x$ , 则  $G'(x) = 2 - 4\cos 2x$ ,

当  $x \in [-1, 1]$  时,  $\cos 2x \in (\frac{1}{2}, 1]$ , 故  $G'(x) = 2 - 4\cos 2x < 0$ ,

故  $G(x) = 2x - 2\sin 2x$  在  $[-1, 1]$  上单调递减, 而  $G(0) = 0$ ,

所以  $x \in [-1, 0)$  时,  $G(x) > 0$ , 即  $D'(x) > 0$ ,  $D(x)$  在  $[-1, 0)$  上单调递增,

$x \in (0, 1]$  时,  $G(x) < 0$ , 即  $D'(x) < 0$ ,  $D(x)$  在  $(0, 1]$  上单调递减,

故  $D(x)$  在  $x = 0$  时取到最大值  $D(0) = 2$ ,

又  $D(-1) = 1 + 2\cos^2 1 > 1, D(1) = 1 + 2\cos^2 1 > 1$ ,

故当  $x \in [-1, 1]$  时,  $D(x) > 1$ , 即  $|PO|^2 = x^2 + 2\cos^2 x > 1$ , 即  $|PO| > 1$ ,

综合上述在  $f(x)$  图象上不存在点  $P$ , 使得点  $P$  到坐标原点的距离  $d \leq 1$ , C 错误;

对于 D,  $|PO|^2 = x^2 + \left(e^x + \frac{1}{2}\right)^2$ , 若  $x \leq -1$ , 则  $|PO|^2 > 1$ ;

若  $x > -1$ , 设  $h(x) = e^x - x - 1$ , 则  $h'(x) = e^x - 1$ ,

当  $-1 < x < 0$  时,  $h'(x) < 0$ ,  $h(x)$  在  $(-1, 0)$  上单调递减,

当  $x > 0$  时,  $h'(x) > 0$ ,  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

故  $h(x) \geq h(0) = 0$ , 即  $e^x \geq x + 1$ , 当且仅当  $x = 0$  时等号成立,

则  $x > -1$  时,  $|PO|^2 = x^2 + \left(e^x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq x^2 + \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ ,

所以  $|PO|^2 \geq 2x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} > 1$ ,

综合上述在  $f(x)$  图象上不存在点  $P$ , 使得点  $P$  到坐标原点的距离  $d \leq 1$ , 即 D 错误,

故选: B

【点睛】难点点睛：解答本题时要根据“向心函数”的定义去判断各选项中函数是否满足定义中的条件，难点是判断选项 C、D 时，要构造函数，结合导数知识判断函数单调性，继而判断点  $P$  到坐标原点的距离和 1 的大小关系。

9. BC

【分析】根据复数的运算性质以及模的运算公式对应各个选项逐个判断即可求解。

【详解】设  $z_1 = a + bi$ ， $z_2 = c + di$ ，其中  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ 。

对于选项 A:  $z_1^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ ,  $\overline{z_1^2} = a^2 - b^2 - 2abi$ ，所以  $2ab$  与  $-2ab$  不一定相等，

故选项 A 错误；

对于选项 B: 因为  $z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ ，

所以  $\overline{z_1 \cdot z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)i$ ，

因为  $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i$ ，

所以  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ ，故选项 B 正确；

对于选项 C: 因为  $z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ ，

所有  $|z_1 z_2| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{a^2 c^2 + b^2 d^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2}$

因为  $|z_1| |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{a^2 c^2 + b^2 d^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2}$ ，

所以  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ，故选项 C 正确；

对于选项 D: 因为  $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ ，所以  $|z_1 + z_2| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$

$|z_1| + |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$ ，而  $\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$  与  $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$  不一定相等，故选项 D 错误；

故选项 D 错误；

故选：BC。

10. BCD

【分析】根据题意，举出反例可得 A 错误，由平均数、极差的性质分析 B，由标准差、平均数的公式分析 C，由中位数、平均数的定义分析 D，综合可得答案。

【详解】根据题意，设 7 天数据中，最小值为  $a$ ，最大值为  $b$ ，

依次分析选项：

对于 A，数据 1、1、1、4、5、6、7，满足众数为 1 且中位数为 4，但不满足“每天新增疑似

病例不超过 5 人”，不符合题意；

对于 B，若数据的平均数为 3，其数据的最小值  $a \leq 3$ ，又由极差小于或等于 2，故数据中的最大值  $b \leq 5$ ，符合题意；

对于 C，标准差为  $\sqrt{2}$ ，则其方差为 2，假设  $b \geq 6$ ，则方差的最小值为  $\frac{(6-2)^2}{7} = \frac{16}{7} > 2$ ，与

标准差为  $\sqrt{2}$  矛盾，故必有  $b \leq 5$ ，符合题意；

对于 D，假设  $b \geq 6$ ，由于其中位数为 3，则平均数的最小值为

$$\frac{1}{7}(0+0+0+3+3+3+6) = \frac{15}{7} > 2, \text{ 与平均数为 2 矛盾, 故必有 } b \leq 5, \text{ 符合题意.}$$

故选：BCD.

## 11. ABC

【分析】根据已知条件，分析出数列的项数成等比数列判断 A，根据变换规则，得出数列中 0 与 1 个数的规律，结合数列项数为  $5 \cdot 3^{n-1}$ ，即可判断 B、C、D 三个选项.

【详解】设数列  $\{C_n\}$  的项数为一个数列  $\{a_n\}$ ，因为  $C_1$  中有 5 项，即  $a_1 = 5$ ，

根据题意：在  $f$  作用下，每个 0 都变为“1,0,1”，每个 1 都变为“0,1,0”，

所以有  $a_n = 3a_{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，由此可知数列  $\{a_n\}$  为首相  $a_1 = 5$ ，公比  $q = 3$  的等比数列，

所以  $C_n$  的项数为  $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$ ；

根据变换规则，若数列的各项中，1 与 0 的个数相同，

则与之相邻的下一个数列中 1 与 0 的个数也相同；

若 1 比 0 多  $n$  个，则与之相邻的下一个数列中 1 比 0 的个数少  $n$  个；

若 1 比 0 少  $n$  个，则与之相邻的下一个数列中 1 比 0 的个数多  $n$  个；

因为  $C_1$  中有 5 项，其中 2 个 1，3 个 0，1 比 0 少 1 个，

所以  $C_2$  的 15 项中，1 比 0 的个数多 1 个；

以此类推，若  $n$  为奇数，则数列的各项中 1 比 0 少 1 个，

若  $n$  为偶数，则数列的各项中 1 比 0 多 1 个；

根据以上分析  $C_n$  的项数为  $5 \cdot 3^{n-1}$ ，所以 A 正确；

$C_3$  中共有 45 项，其中  $n=3$  为奇数，所以数列中有  $\frac{45-1}{2} = 22$  个 1，

有  $45-22=23$  个 0，所以  $S_3 = 22$ ，所以 B 正确；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/147135166044006043>