人教A版2019必修第二册

第六章《平面向量及其应用》

6.2.4　向量的数量积

学习目标

1．了解平面向量数量积的物理背景，理解数量积的含义及其物理意义．

2．体会平面向量的数量积与向量投影的关系，理解掌握数量积的性质，并能运用性质进行相关的判断和运算．

3．体会类比的数学思想和方法，进一步培养学生抽象概括、推理论证的能力．发展学生从特殊到一般的能力，培养学生学习的主动性和合作交流的学习习惯．

环节一：创设情境，引入课题

前面我们学习了向量的加、减运算．类比数的运算，出现了一个自然的问题：向量能否相乘？如果能，那么向量的乘法该怎样定义？

在物理课中我们学过功的概念：如果一个物体在力$\vec{F}$的作用下产生位移$\vec{F}$的作用下产生位移$\vec{s}$，那么力$\vec{F}$所做的功$W=|\vec{F}|\cdot|\vec{s}|\cos\theta$，

其中θ是$\vec{F}$与$\vec{s}$的夹角.

功是一个标量，它由力和位移两个向量来确定．这给我们一种启示，能否把“功”看成是两个向量“相乘”的结果呢？受此启发，我们引入向量“数量积”的概念．

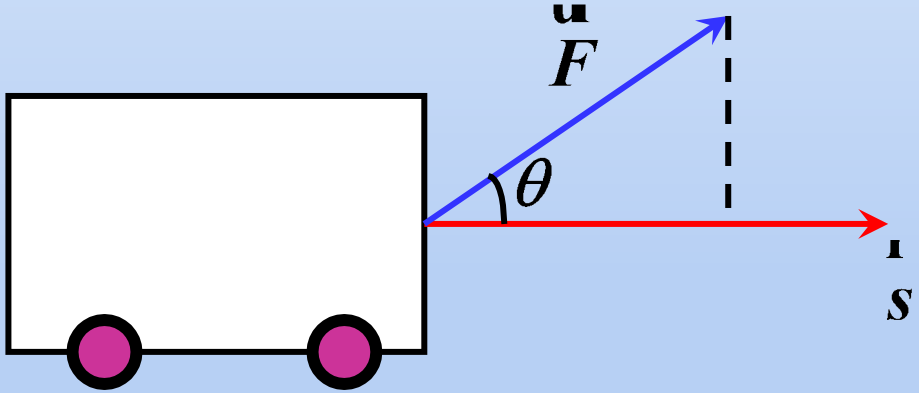


图6.2-18

因为力做功的计算公式中涉及力与位移的夹角，所以我们先要定义向量的夹角概念．

已知两个非零向量$\vec{a}, \vec{b}$, O是平面上的任意一点, 作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

则$\angle AOB=\theta\ (0\leq\theta\leq\pi)$叫做向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角.

显然, 当$\theta=0$时, $\vec{a}$与$\vec{b}$同向;

当$\theta=\pi$时, $\vec{a}$与$\vec{b}$反向.

如果$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角是$\frac{\pi}{2}$, 我们说$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直, 记作$\vec{a}\perp\vec{b}$.

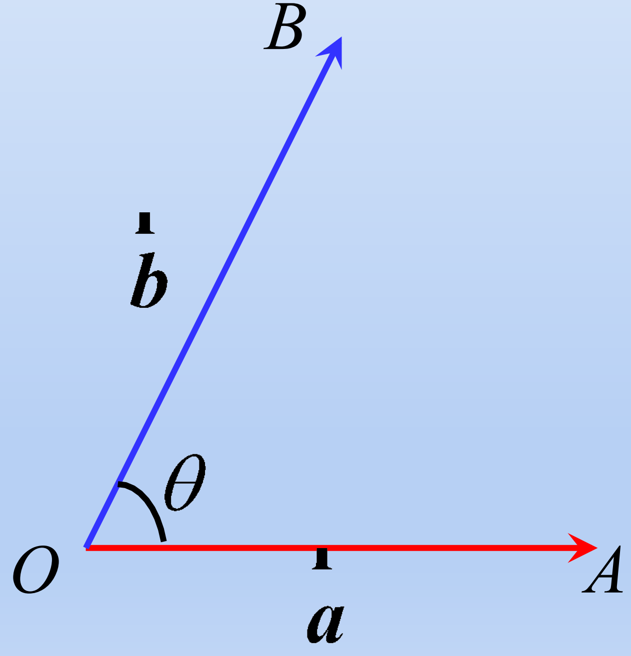


图6.2-19

环节二：观察分析，感知概念

平面向量的数量积的定义

已知两个非零向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，它们的夹角为θ，我们把数量$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$叫做$\vec{a}$与$\vec{b}$的数量积(或内积)，记作$\vec{a}\cdot\vec{b}$，即

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta}$$

规定：零向量与任一向量的数量积为0．

对比向量的线性运算，我们发现，向量线性运算的结果是一个向量，而两个向量的数量积是一个数量，这个数量的大小与两个向量的长度及其夹角有关．

与以往运算法则的区别及注意点

(1) 两向量的数量积结果是一个数量, 符号由夹角决定.
而向量的加法和减法的结果还是一个向量.

(2) 前面所提到的力所做的功, 就是力$\vec{F}$与其作用下物体产生的位移$\vec{S}$的数量积$\vec{F} \cdot \vec{S}$

(3) $\vec{a} \cdot \vec{b}$不能写成$\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$表示向量的另一种运算.

例9 已知$|\vec{a}|=5, |\vec{b}|=4, \vec{a}$与$\vec{b}$的夹角$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$，求$\vec{a}\cdot\vec{b}$.

解: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=5\times4\times\cos\dfrac{2\pi}{3}=5\times4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-10$

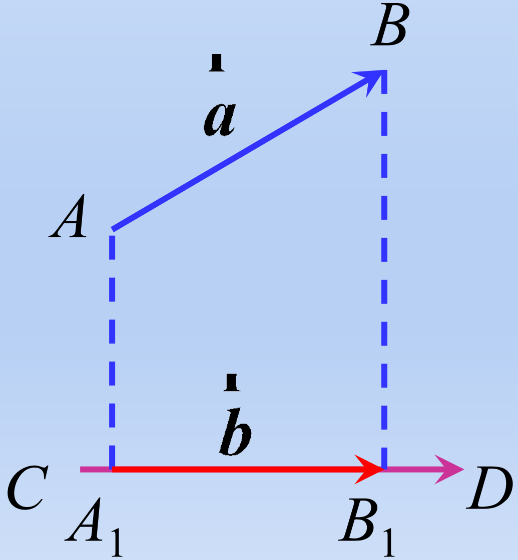
例10 设$|\vec{a}|=12, |\vec{b}|=9, \vec{a}\cdot\vec{b}=-54\sqrt{2}$，求$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角$\theta$.

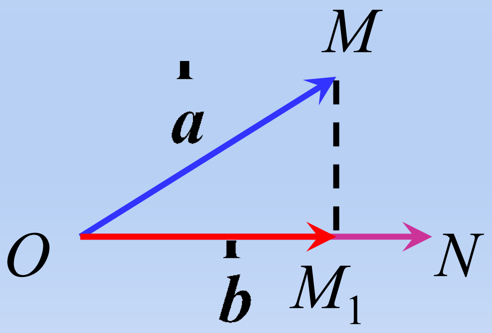
解: 由$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$，得$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{-54\sqrt{2}}{12\times9}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

因为$\theta\in[0,\pi]$，所以$\theta=\dfrac{3\pi}{4}$

如图6.2－20(1)，设$\vec{a},\vec{b}$是两个非零向量，$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{CD}=\vec{b}$，我们考虑如下的变换：过$\overrightarrow{AB}$的起点$A$和终点$B$，分别作$\overrightarrow{CD}$所在直线的垂线，垂足分别为$A_1$，$B_1$，得到$\overrightarrow{A_1B_1}$，我们称上述变换为向量$\vec{a}$向向量$\vec{b}$投影，$\overrightarrow{A_1B_1}$叫做向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影向量.

如图6.2－20(2)，我们可以在平面内任取一点O，作$\overrightarrow{OM}=\vec{a},\overrightarrow{ON}=\vec{b}$. 过点$M$作直线$ON$的垂线，垂足为$M_1$，则$\overrightarrow{OM_1}$就是向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影向量.



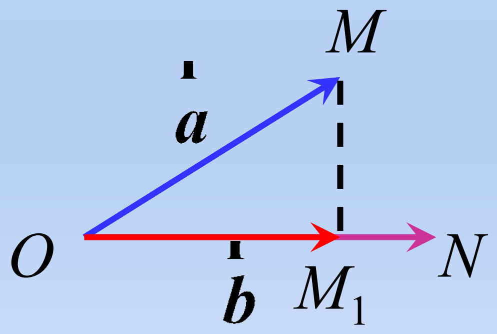


环节三：抽象概括，形成概念

如图6.2 – 20(2), 设与$\vec{b}$方向相同的单位向量为$\vec{e}$, $\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ, 那么$\overrightarrow{OM_1}$与$\vec{e}$, $\vec{a}$, θ之间有怎样的关系?

显然, $\overrightarrow{OM_1}$与$\vec{e}$共线, 于是$\overrightarrow{OM_1} = \lambda\vec{e}$.

下面我们探究λ与$\vec{a}$, θ的关系, 进而给出$\overrightarrow{OM_1}$的明确表达式. 我们分θ为锐角、直角、钝角以及$\theta = 0, \theta = \pi$等情况进行讨论.



当θ为锐角时，$\overrightarrow{OM_1}$与$\vec{e}$方向相同，$\lambda=\left|\overrightarrow{OM_1}\right|=|\vec{a}|\cos\theta$，所以

$$\overrightarrow{OM_1}=\left|\overrightarrow{OM_1}\right|\vec{e}=|\vec{a}|\cos\theta\,\vec{e}$$

当θ为直角时，$\lambda=0$，所以$\overrightarrow{OM_1}=\vec{0}=|\vec{a}|\cos\dfrac{\pi}{2}\vec{e}$

当θ为钝角时，$\overrightarrow{OM_1}$与$\vec{e}$方向相反，

$$\lambda=-\left|\overrightarrow{OM_1}\right|=-|\vec{a}|\cos\angle MOM_1=-|\vec{a}|\cos(\pi-\theta)=|\vec{a}|\cos\theta\text{，即}\overrightarrow{OM_1}=|\vec{a}|\cos\theta\,\vec{e}$$

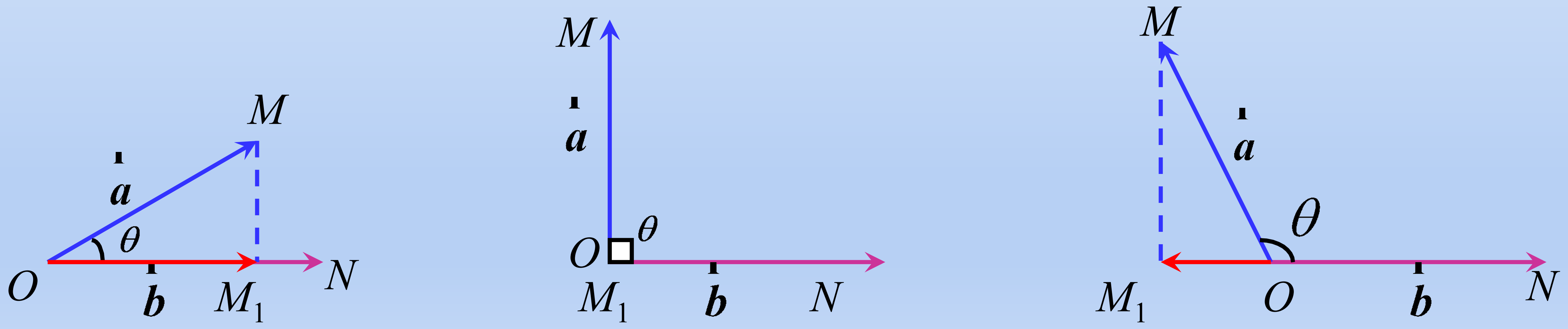


图6.2-21

当$\theta=0$时, $\lambda=|\vec{a}|$, 所以$\overrightarrow{OM_1}=|\vec{a}|\vec{e}=|\vec{a}|\cos 0\vec{e}$,

当$\theta=\pi$时, $\lambda=-|\vec{a}|$, 所以$\overrightarrow{OM_1}=-|\vec{a}|\vec{e}=|\vec{a}|\cos\pi\vec{e}$.

从上面的讨论可知，

$$\boxed{\text{对于任意的}\theta\in[0,\pi],\ \text{都有}\overrightarrow{OM_1}=|\vec{a}|\cos\theta\vec{e}}$$

环节四：辨析理解，深化概念

探究

从上面的探究我们看到，两个非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$相互平行或垂直时，向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影向量具有特殊性. 这时，它们的数量积又有怎样的特殊性？

由向量数量积的定义，可以得到向量数量积的如下重要性质．

设$\vec{a}, \vec{b}$是非零向量, 它们的夹角是θ, $\vec{e}$是与$\vec{b}$方向相同的单位向量, 则

(1) $\vec{a}\cdot\vec{e} = \vec{e}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta$

(2) $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ 如果$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, 是否有$\vec{a} = \vec{0}$, 或$\vec{b} = \vec{0}$?

(3) 当$\vec{a}$与$\vec{b}$同向时, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$; 当$\vec{a}$与$\vec{b}$反向时, $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

特别地, $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$ 或 $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ ($\vec{a}\cdot\vec{a}$常记作$\vec{a}^2$)

此外, 由$|\cos\theta| \leq 1$还可以得到

(4) $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

练习（第20页）

1. 已知$\left|\vec{p}\right| = 8, \left|\vec{q}\right| = 6, \vec{p}$和$\vec{q}$的夹角是$60°$, 求$\vec{p} \cdot \vec{q}$

解: $\vec{p} \cdot \vec{q} = \left|\vec{p}\right| \cdot \left|\vec{q}\right| \cos 60° = 8 \times 6 \times \frac{1}{2} = 24$

2. 已知$\triangle ABC$中, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, 当$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$或$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$时, 判断$\triangle ABC$的形状.

$\because \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos A$,

所以当$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$时, $\cos A<0$, A为钝角, $\triangle ABC$为钝角三角形;

当$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$时, $\cos A=0$, A为直角, $\triangle ABC$为直角三角形.

3. 已知$|\vec{a}|=6$，$\vec{e}$为单位向量，当向量$\vec{a}$，$\vec{e}$的夹角θ分别等于$45°, 90°, 135°$时，求向量$\vec{a}$在向量$\vec{e}$上的投影向量.

当$\theta=45°$时，向量$\vec{a}$在向量$\vec{e}$上的投影向量为$|\vec{a}|\cos 45°\vec{e}=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}=3\sqrt{2}\vec{e}$;

当$\theta=90°$时，向量$\vec{a}$在向量$\vec{e}$上的投影向量为$|\vec{a}|\cos 90°\vec{e}=\vec{0}$;

当$\theta=135°$时，向量$\vec{a}$在向量$\vec{e}$上的投影向量为

$$|\vec{a}|\cos 135°\vec{e}=6\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{e}=-3\sqrt{2}\vec{e};$$

探究

类比数的乘法运算律，结合向量的线性运算的运算律，你能得到数量积运算的哪些运算律？你能证明吗？

由向量数量积的定义, 可以发现下列运算律成立：

对于向量$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$和实数$\lambda$, 有

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

(2) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$;

(3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

下面我们利用向量投影证明分配律（3）

证明：如图，任取一点O，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{b}$.

设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{c}$的夹角分别为θ_1，θ_2，θ，它们在向量$\vec{c}$上的投影向量分别为$\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{OB_1}$，$\overrightarrow{OD_1}$，与$\vec{c}$向相同的单位向量为$\vec{e}$，则

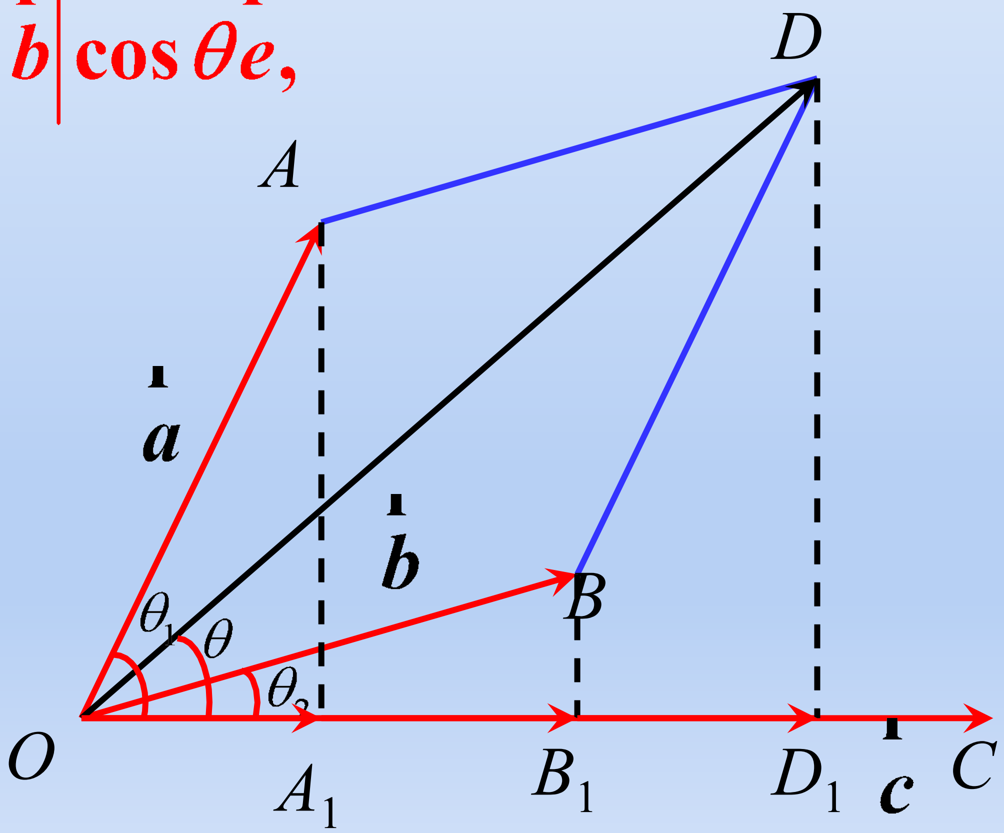
$$\overrightarrow{OA_1}=|\vec{a}|\cos\theta_1\vec{e},\ \overrightarrow{OB_1}=|\vec{b}|\cos\theta_2\vec{e},\ \overrightarrow{OD_1}=|\vec{a}+\vec{b}|\cos\theta\vec{e},$$

因为$\vec{a}=\overrightarrow{BD}$，所以$\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{B_1D_1}$，

于是$\overrightarrow{OD_1}=\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{B_1D_1}=\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OA_1}$，

即$|\vec{a}+\vec{b}|\cos\theta\vec{e}=|\vec{a}|\cos\theta_1\vec{e}+|\vec{b}|\cos\theta_2\vec{e}$，

整理得$\left(|\vec{a}+\vec{b}|\cos\theta-|\vec{a}|\cos\theta_1-|\vec{b}|\cos\theta_2\right)\vec{e}=\vec{0}$

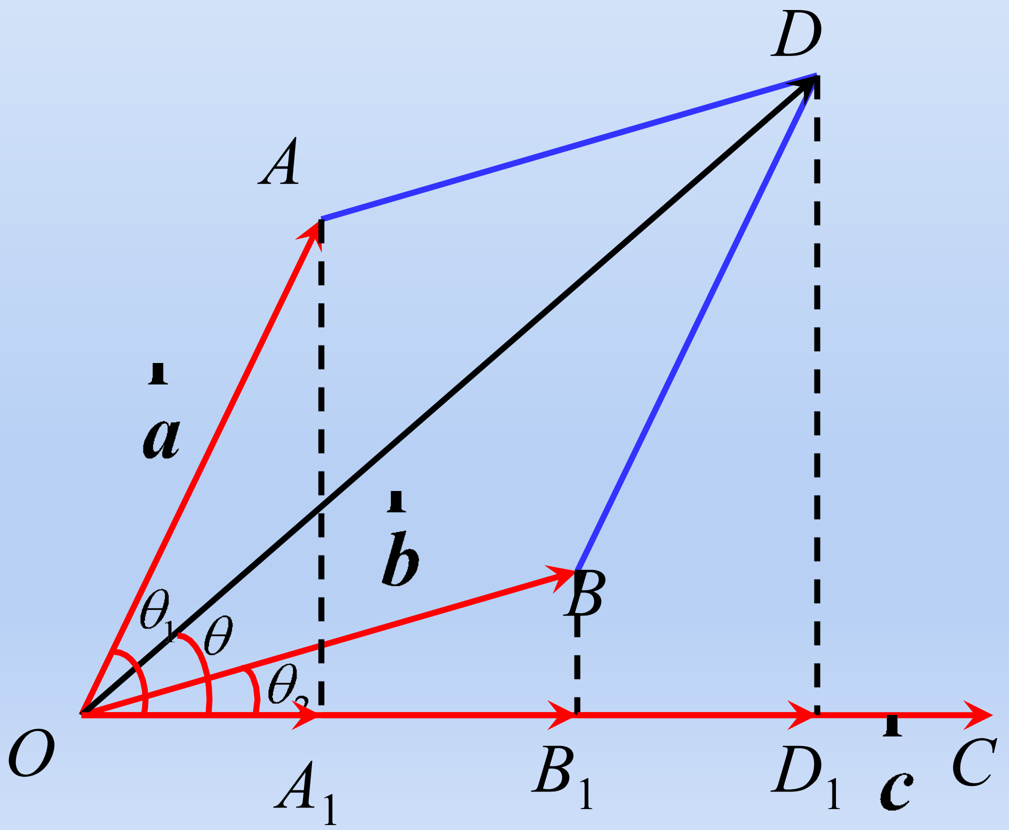


所以$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\cos\theta-\left|\vec{a}\right|\cos\theta_1-\left|\vec{b}\right|\cos\theta_2=0$,

即$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\cos\theta=\left|\vec{a}\right|\cos\theta_1+\left|\vec{b}\right|\cos\theta_2$,

所以$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\theta=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\theta_1+\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\theta_2$,

因此$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$



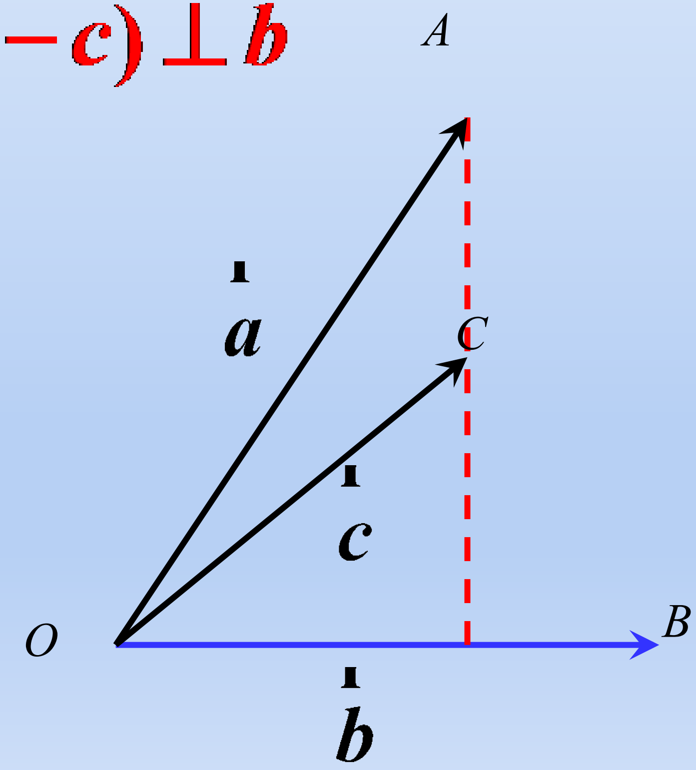
思考：下面两个式子成立吗？

(1) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$ 不满足结合律

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}\Rightarrow\vec{a}=\vec{c}$ 不满足消去律

设$\vec{b}$是非零向量，且$\vec{a}\neq\vec{c}$，求证：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}\Leftrightarrow(\vec{a}-\vec{c})\perp\vec{b}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$
$$\Leftrightarrow\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0$$
$$\Leftrightarrow(\vec{a}-\vec{c})\perp\vec{b}$$



环节五：课堂练习，巩固运用

例11 我们知道，对任意$a, b \in \mathbf{R}$，恒有

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\ (a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

对任意向量$\vec{a}, \vec{b}$，是否也有下面类似的结论？

(1) $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$　　(2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2$

(1) $(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2-\vec{b}^2$

因此，上述结论是成立的．

例12 已知$|\vec{a}|=6, |\vec{b}|=4$, $\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$60°$, 求$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})$.

$$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})$$

$$=\vec{a}\cdot\vec{a}-3\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{a}-6\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$=|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-6|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta-6|\vec{b}|^2$$

$$=6^2-6\times4\times\cos60°-6\times4^2=-72$$

例13 已知$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, 且$\vec{a}$与$\vec{b}$不共线. 当k为何值时, 向量$\vec{a}+k\vec{b}$与$\vec{a}-k\vec{b}$互相垂直?

$\vec{a}+k\vec{b}$与$\vec{a}-k\vec{b}$互相垂直的充要条件是$(\vec{a}+k\vec{b})\cdot(\vec{a}-k\vec{b})=0$,

即$\vec{a}^2-k^2\vec{b}^2=0$

因为$\vec{a}^2=3^2=9$, $\vec{b}^2=4^2=16$, 所以$9-16k^2=0$. 解得$k=\pm\frac{3}{4}$.

也就是说, 当$k=\pm\frac{3}{4}$时, $\vec{a}+k\vec{b}$与$\vec{a}-k\vec{b}$互相垂直.

补充练习1: 若$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1, \vec{a}\perp\vec{b}$且$2\vec{a}+3\vec{b}$与$k\vec{a}-4\vec{b}$也互相垂直, 求$k$的值.

解: 因为$2\vec{a}+3\vec{b}$与$k\vec{a}-4\vec{b}$互相垂直,

所以$\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(k\vec{a}-4\vec{b}\right)=2k\vec{a}^2+(3k-8)\vec{a}\cdot\vec{b}-12\vec{b}^2=0$

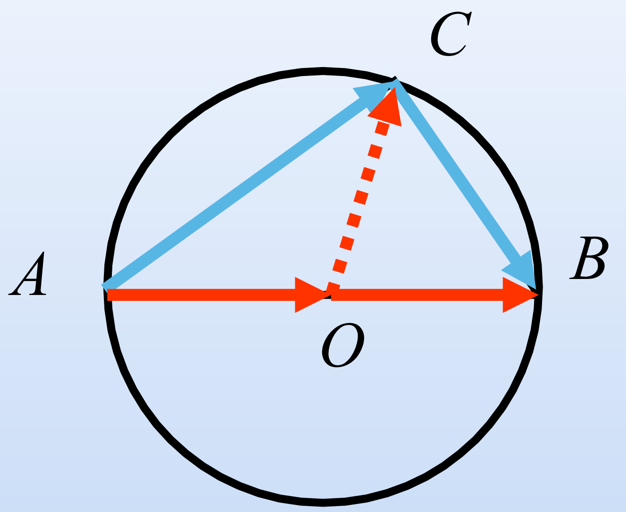
又因为$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1, \therefore \vec{a}^2=\vec{b}^2=1, \because \vec{a}\perp\vec{b}, \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0,$

代入上式可得$2k-12=0$, 解得$k=6$

补充练习2　用向量方法证明：直径所对的圆周角为直角。

如图所示，已知$\odot O$，AB为直径，

C为$\odot O$上任意一点. 求证：$\angle ACB=90^\circ$



分析：要证明$\angle ACB=90^\circ$，

只需证明$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CB}$，即$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

证明：设$\odot O$的半径为r，$\overrightarrow{AO}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{b}$

则$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{CB}=\vec{a}-\vec{b}$，

由此可得：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=r^2-r^2=0$

$\therefore\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，即$\angle ACB=90^\circ$

环节六:归纳总结，反思提升

一、向量的数量积

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

二、向量的投影

$$\overrightarrow{OA_1}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta\,\boldsymbol{e}$$

三、向量数量积的性质

4.向量的数量积运算律是怎样的？

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$（交换律）

(2) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$（数乘结合律）

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$（分配律）

5.类比实数中的结论，数量积是否有相似的结论呢？比如消去律等？

环节七：目标检测，作业布置

完成教材：

第22页 习题6.2 10,18题