

第十章 计数原理与概率、随机变量及其分布列

10.1.1 排列组合（题型战法）

知识梳理

一 分类计数原理与分步计数原理

1.分类加法计数原理: 完成一件事有几类办法, 各类办法相互独立, 每类办法中又有多种不同的办法, 则完成这件事的不同办法数是各类不同方法种数的和。

2.分步乘法计数原理: 完成一件事, 需要分成几个步骤, 每一步的完成有多种不同的方法, 则完成这件事的不同方法种数是各种不同的方法数的乘积。

原则: 先分类后分步; 由特殊点入手。

二 排列与排列数

1.排列: 从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素, 按照一定的顺序排成一行, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。

2.排列数: 从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有不同排列的个数, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数, 记作 A_n^m 。

三 组合与组合数

1.组合: 从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素组成一个组, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合。

2.组合数: 从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有不同组合的个数, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数, 记作 C_n^m 。

公式: (1) $A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$

(2) $C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ ($n, m \in N^*$, 且 $m \leq n$)。特别地, $C_n^0 = 1$

性质: (1) ① $0! = 1$; ② $A_n^n = n!$. (2) ① $C_n^m = C_n^{n-m}$; ② $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$

题型战法

题型战法一 数字排列问题

典例 1. 用 0, 1, 2, 3, 4 可以组成没有重复数字的四位偶数的个数为 ()

- A. 36 B. 48 C. 60 D. 72

【答案】C

【分析】当个位数为 0 时，从其他 4 个数选 3 个进行排列，当个位数为 2 或 4 时，从剩下的非零的 3 个数中选一个排在千位，再从剩下的 3 个数中选 2 个排在十位和百位，最后用分类计数原理求解.

【详解】当个位数为 0 时，有 $A_4^3 = 24$ 个，

当个位数为 2 或 4 时，有 $2A_3^1 A_3^2 = 36$ 个，

所以无重复数字的四位偶数有 $24+36=60$ 个，

故选：C.

变式 1-1. 在 1, 2, 3, 4, 5, 6 这六个数字组成的没有重复数字的三位数中，各位数字之和为奇数的共有 ()

- A. 36 个 B. 48 个 C. 54 个 D. 60 个

【答案】D

【分析】分这三个数字是三个奇数和两个偶数，一个奇数两种情况计算.

【详解】解：①这三个数字为三个奇数，共 $A_3^3 = 6$ (个)；

②这三个数字为两个偶数，一个奇数，共 $C_3^2 C_3^1 A_3^3 = 54$ (个) .

故各数位之和为奇数的共有 $54+6=60$ (个) .

故选：D.

变式 1-2. 用 0,1,2,3,4 这五个数字能组成无重复数字且 1 与 3 不相邻的五位数的个数有 ()

- A. 36 B. 48 C. 60 D. 72

【答案】C

【分析】根据题意分当 1 在万位，当 2 在万位，当 3 在万位和当 4 在万位四种情况分别求解即可.

【详解】根据题意：当 1 在万位时，千位不能排 3，所以千位有： C_3^1 种，再排列剩下的数字有：

A_3^3 ，所以当 1 在万位时，共有： $C_3^1 A_3^3 = 18$ 种；

当2在万位时，先排0和4，有： A_2^2 种，会出现三个空，再将数字1和3插入三个空，有 A_3^2 种，所以
当2在万位时，共有： $A_2^2 A_3^2 = 12$ 种；

当3在万位时，千位不能排1，所以千位有： C_3^1 种，再排列剩下的数字有： A_3^3 ，所以当3在万位时，
共有： $C_3^1 A_3^3 = 18$ 种；

当4在万位时，先排0和2，有： A_2^2 种，会出现三个空，再将数字1和3插入三个空，有 A_3^2 种，所以
当4在万位时，共有： $A_2^2 A_3^2 = 12$ 种；

综上所述：满足条件的方法共有： $C_3^1 A_3^3 + A_2^2 A_3^2 + C_3^1 A_3^3 + A_2^2 A_3^2 = 60$ 。

故选：C.

变式 1-3. 用 1, 2, 3, 4 四个数字组成无重复数字的四位数，其中比2000大的偶数共有（ ）

A. 16 个 B. 12 个 C. 9 个 D. 8 个

【答案】D

【分析】比2000大，故千位为2, 3, 4，分类讨论即可

【详解】比2000大，故千位为2, 3, 4，

千位为2，则个位为4，有 $A_2^2 = 2$ 种

千位为3，则个位为2或4，有 $A_2^1 \cdot A_2^2 = 4$ 种

千位为4，则个位为2，有 $A_2^2 = 2$ 种

故一共有8种，

故选：D

变式 1-4. 用 0, 2, 4, 5, 6, 8 组成无重复数字的四位数，则这样的四位数中偶数共有（ ）

A. 120 个 B. 192 个 C. 252 个 D. 300 个

【答案】C

【分析】根据个位数是否为零分类讨论即可.

【详解】若这个偶数的个位数是0，则有 $A_5^3 = 60$ 个；

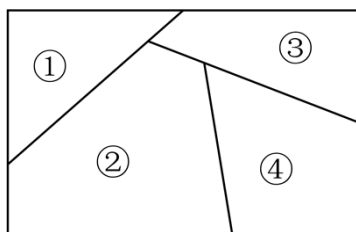
若这个偶数的个位数不是0，则有 $C_4^1 C_4^1 A_4^2 = 192$ 个.

故满足条件的四位数中偶数的总个数为 $60 + 192 = 252$ ；

故选：C.

题型战法二 染色问题

典例 2. 用 4 种不同颜色给如图所示的地图上着色，要求相邻两块涂不同的颜色，不同的涂色方法共有（ ）



- A. 24 种 B. 36 种 C. 48 种 D. 72 种

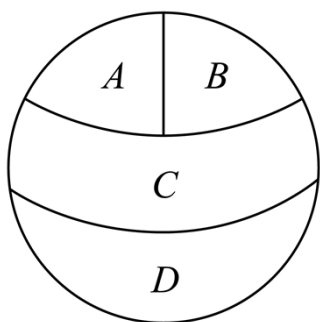
【答案】C

【分析】根据分步乘法计数原理逐一按①②③和④涂色，即可求解.

【详解】对于①②③，两两相邻，依次用不同颜色涂，共有 $4 \times 3 \times 2 = 24$ 种涂色方法，对于④，与②③相邻，但与①相隔，此时可用剩下的一种颜色或者与①同色，共 2 种涂色方法，则由分步乘法计数原理得 $24 \times 2 = 48$ 种不同的涂色方法.

故选:C

变式 2-1. 如图，有 A、B、C、D 四块区域需要植入花卉，现有 4 种不同花卉可供选择，要求相邻区域植入不同花卉，不同的植入方法有（ ）



- A. 12 种 B. 24 种 C. 48 种 D. 72 种

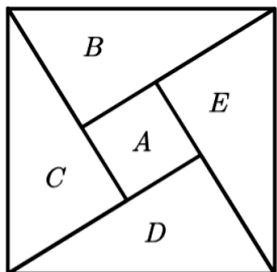
【答案】D

【分析】依次考虑 C、D、A、B 区域，利用分步乘法计数原理可得结果.

【详解】C 区域有 4 种选择，D 区域有 3 种选择，A 区域有 3 种选择，B 区域有 2 种选择，由分步乘法计数原理可知，不同的檀入方法共有 $4 \times 3 \times 3 \times 2 = 72$ 种.

故选：D.

变式 2-2. 用 4 种不同颜色给图中的 5 个区域涂色，要求相邻的区域不能涂同一种颜色，则不同的涂色方法共有多少种（ ）



A. 72

B. 48

C. 36

D. 24

【答案】A

【分析】可以同色的区域为 BD , CE ，分类讨论结合排列知识即可求解.

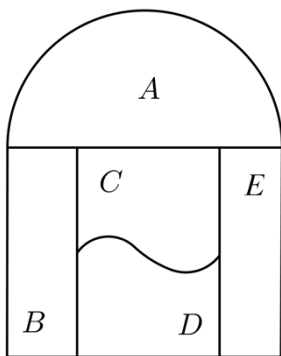
【详解】由题意，可以同色的区域为 BD , CE ；若只有 BD 同色，则有 $A_4^4 = 24$ 种；

若只有 CE 同色，有 $A_4^4 = 24$ 种；若 BD , CE 都同色，则 $A_4^3 = 24$ 种，由分类计数原理，

共有 $24 \times 3 = 72$ 种，

故选：A.

变式 2-3. 给图中 A , B , C , D , E 五个区域染色，每个区域只染一种颜色，且相邻的区域不同色. 若有四种颜色可供选择，则不同的染色方案共有（ ）



A. 24 种

B. 36 种

C. 48 种

D. 72 种

【答案】D

【分析】先对 A , B , C 三个区域染色，再讨论 B , E 是否同色.

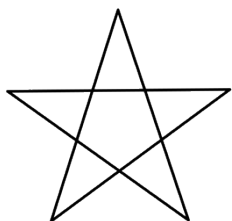
【详解】当 B , E 同色时，共有 $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ 种不同的染色方案，

当 B , E 不同色时，共有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 24$ 种不同的染色方案，

所以共有 72 种不同的染色方案.

故选：D.

变式 2-4. 现有红、黄、蓝三种颜色，对如图所示的正五角星的内部涂色（分割成六个不同区域），要求每个区域涂一种颜色且相邻部分（有公共边的两个区域）的颜色不同，则不同涂色方法有（ ）

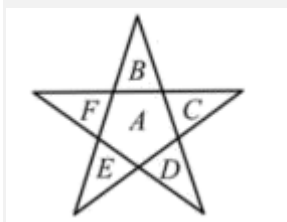


- A. 48 种 B. 64 种 C. 96 种 D. 144 种

【答案】C

【分析】先给中间涂色，再给外边每个涂色，利用分步乘法计算原理求解即可.

【详解】根据题意，假设正五角星的区域为 A, B, C, D, E, F ，如图所示，



先对 A 区域涂色，有 3 种方法，再对 B, C, D, E, F 这 5 个区域进行涂色，因为 B, C, D, E, F 这 5 个区域都与 A 相邻，所以每个区域都有 2 种涂色方法，所以共有 $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 96$ 种涂色方法.

故选：C.

题型战法三 位置（元素）有限的排列问题（优先法）

典例 3. 将五辆车停在 5 个车位上，其中 A 车不能停在 1 号车位上，则不同的停车方案有（ ）

- A. 24 种 B. 78 种 C. 96 种 D. 120 种

【答案】C

【分析】根据分步计数原理，先让 A 车选车位，再让剩余车辆选车位，即可得出结论.

【详解】第一步：先让 A 车选车位，有 $C_4^1 = 4$ 种；

第二步：让剩余四辆车选车位，有 $A_4^4 = 24$ 种，

所以共有： $4 \times 24 = 96$ 种.

故选：C.

变式 3-1. 4 人随机排成一排，甲不在排头且乙不在排尾的排法有多少种（ ）

- A. 14 种 B. 16 种 C. 10 种 D. 13 种

【答案】A

【分析】分两类：甲在排尾，另一种甲不在排头也不在排尾，然后利用分类加法原理求解即可.

【详解】根据题意分两类：

第一类：甲在排尾，其它 3 人全排列，有 $A_3^3 = 6$ ，

第二类：甲不在排头也不在排尾，则甲排在中间两个位置中的一个，然后从剩余的除乙外的 2 人中选一人排在排尾，最后剩下的 2 人排在剩余的 2 个位置，则有 $C_2^1 C_2^1 A_2^2 = 8$ 种，

所以由分类加法原理可得共有 $6 + 8 = 14$ 种，

故选：A.

变式 3-2. 甲，乙，丙，丁，戊共 5 名同学进行劳动技能比赛，决出第 1 名到第 5 名的名次. 已知甲和乙都不是第 1 名，且乙不是最后 1 名，则 5 人的名次排列的所有可能情况共有（ ）

- A. 30 种 B. 54 种 C. 84 种 D. 120 种

【答案】B

【分析】根据题意先排乙，再排甲，再排其他人即可

【详解】根据题意先排乙，再排甲，再排其他人，则所有排列的情况有 $A_3^1 A_3^1 A_3^3 = 54$

故选：B

变式 3-3. 甲、乙、丙、丁 4 名同学站成一排参加文艺汇演，若甲、乙不能同时站在两端，则不同排列方式共有（ ）

- A. 4 种 B. 8 种 C. 16 种 D. 20 种

【答案】D

【分析】在四人全排的排法中，减去甲、乙同时站在两端的排法，即可得解.

【详解】利用间接法，将四人全排，共 $A_4^4 = 24$ 种不同的排法，

若甲、乙同时站在两端，此时有 $A_2^2 A_2^2 = 4$ 种不同的排法.

因此，若甲、乙不能同时站在两端，则不同排列方式共有 $24 - 4 = 20$ 种.

故选：D.

变式 3-4. 某中学举行的秋季运动会中，有甲、乙、丙、丁四位同学参加 100 米短跑决赛，现将四位同学安排在 1, 2, 3, 4 这 4 个跑道上，每个跑道安排一名同学，则甲不在 2 跑道，乙不在 4 跑道的不同安排方法种数为 ()

A. 12 B. 14 C. 16 D. 18

【答案】B

【分析】根据题意，按甲是否在 4 道上分 2 种情况讨论，求出每种情况的安排方法数目，由加法原理计算可得答案.

【详解】解：根据题意，分 2 种情况讨论：

①若甲在 4 道上，剩下 3 人任意安排在其他 3 个跑道上，有 $A_3^3 = 6$ 种排法，

②若甲不在 4 道上，甲的安排方法有 2 种，乙的安排方法也有 2 种，剩下 2 人任意安排在其他 2 个跑道上，有 2 种安排方法，

此时有 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 种安排方法，

故共有 $6 + 8 = 14$ 种不同的安排方法，

故选：B.

题型战法四 相邻问题的排列问题（捆绑法）

典例 4. 为弘扬我国古代的“六艺”文化，某小学开设“礼”“乐”“射”“御”“书”“数”六门体验课程，每周一门，连续开设六周，课程“乐”“数”排在相邻两周，则不同的安排方案有 ()

A. 60 种 B. 120 种 C. 240 种 D. 480 种

【答案】C

【分析】利用捆绑法即得.

【详解】因为课程“乐”“数”排在相邻两周，可用捆绑法，把“乐”“数”捆绑看作一个元素与其他元素一起排列共 A_5^5 种，再排其内部顺序 A_2^2 种，

所以不同的安排方案有 $A_5^5 A_2^2 = 120 \times 2 = 240$ 种.

故选：C.

变式 4

-1. “宫、商、角、徵、羽”起源于春秋时期，是中国古乐的五个基本音阶，亦称五音．如果把这五个音阶全用上，排成一个五个音阶的音序，要求宫、商两音阶相邻且宫音阶不在正中间，则可排成不同的音序共有（ ）

- A. 48 种 B. 36 种 C. 32 种 D. 24 种

【答案】B

【分析】根据题意，先由捆绑法计算宫、商两音阶相邻的排法，排除其中宫音阶在正中间的排法求解.

【详解】解：将宫、商两音阶看成一个整体，再与其他 3 个音阶全排列，有 $A_2^2 A_4^4 = 48$ 种排法，其宫音阶在正中间的排法有 $2 \times A_3^3 = 12$ 种，

所以宫、商两音阶相邻且宫音阶不在正中间，则可排成不同的音序共有 $48 - 12 = 36$ 种的排法，故选：B.

变式 4-2. 把语文，数学，英语，物理等 7 本不同的书放入书架，若数学书和物理书相邻，语文书不放在最左边，英语书不放在最右边，则不同的放法共有（ ）

- A. 780 B. 960 C. 1440 D. 1008

【答案】D

【分析】把数学书和物理书捆绑，从语文书的位置进行分类，结合排列知识求解.

【详解】先把数学书和物理书捆绑看作一个元素，共有 A_2^2 种方法；

当语文书放在最右边时，英语书和其它书排列，共有 A_5^5 种方法；

当语文书放不在最右边时，最右边放置除语文和英语之外的书，有 4 种方法，最左边放置除语文之外的余下的书，有 4 种方法，其它位置没有要求，有 A_4^4 种方法；

综上所述共有 $A_2^2 (A_5^5 + 4 \times 4 \times A_4^4) = 1008$ 种方法；

故选：D

变式 4-3. 小明跟父母、爷爷和奶奶一同参加《中国诗词大会》的现场录制，5 人坐一排.则小明的父母都与他相邻的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{20}$ B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{3}{10}$

【答案】B

【分析】利用捆绑法求出排列数，进而可得概率.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/148074040066007035>