专题 2-1　将军饮马等 8 类常见最值问题

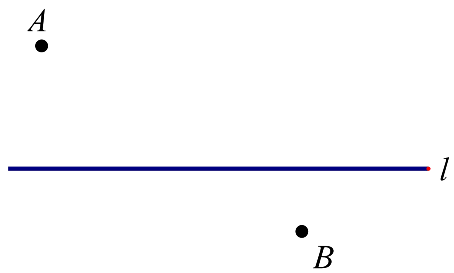
01 题型·解读

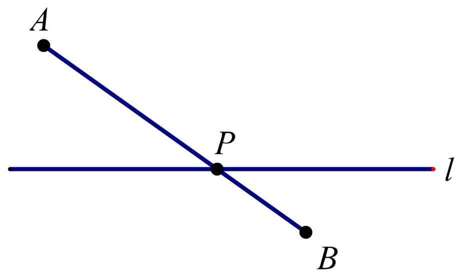
02 满分·技巧

一、单动点问题

【问题 1】在直线 l 上求一点 P，使 $PA+PB$ 最小

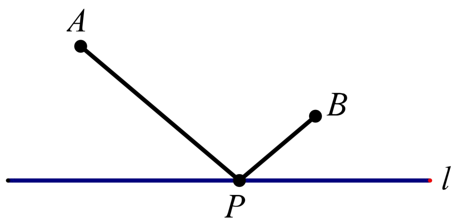
问题解决：连接 AB，与 l 交点即为 P，两点之间线段最短 $PA+PB$ 最小值为 AB

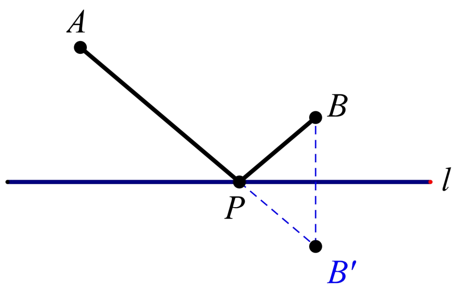




【问题 2】在直线 l 上求一点 P，使 $PA+PB$ 最小

问题解决：作 B 关于 l 的对称点 $B'\Rightarrow PB=PB'$，则 $PA+PB=PA+PB'$，当 A，P，B'共线时取最小，原理：两点之间线段最短，即 $PA+PB$ 最小值为 AB'

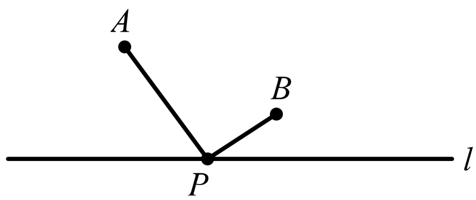


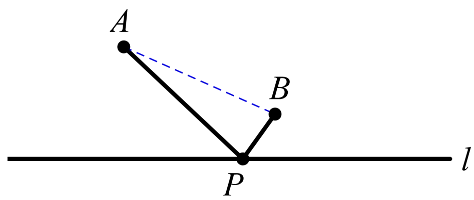


【问题 3】在直线 l 上求一点 P，使$|PA-PB|$最大

问题解决：连接 AB，当 A，B，P 共线时取最大

原理：三角形两边之和大于第三边，在$\triangle AB'P$ 中，$|PA-PB'|\leqslant AB'$

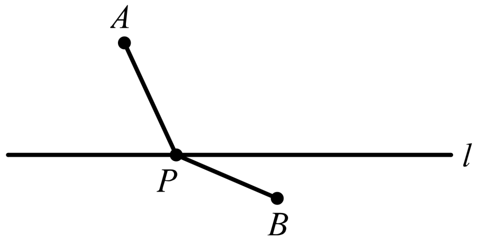


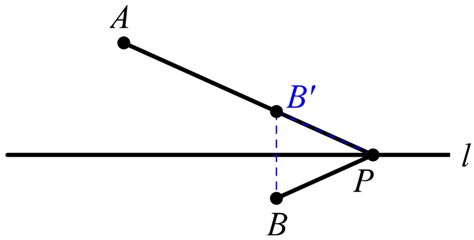


【问题 4】在直线 l 上求一点 P，使$|PA-PB|$最大

问题解决：作 B 关于直线 l 的对称点 $B'\Rightarrow PB=PB'$，$|PA-PB|=|PA-PB'|$

原理：三角形两边之和大于第三边，连接 AB'，在 $\triangle AB'P$ 中 $|PA-PB'|\leqslant AB'$



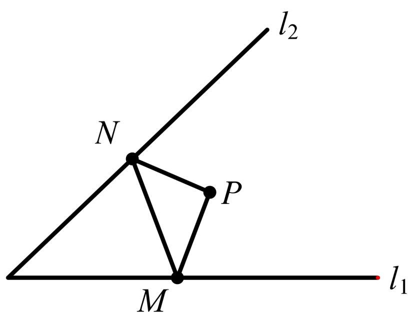


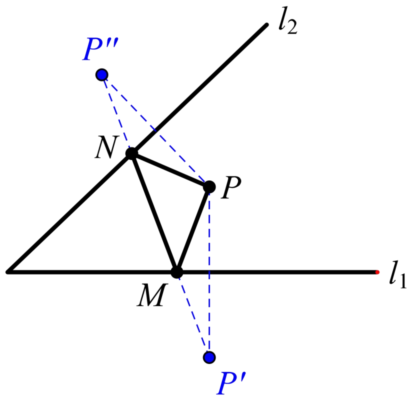
二、双动点问题（作两次对称）

【问题 5】在直线 l_1，l_2 上分别求点 M，N，使 $\triangle PMN$ 周长最小

问题解决：分别作点 P 关于两直线的对称点 P' 和 P''，$PM=P'M$，$PN=P''N$，

原理：两点之间线段最短，P'，P''，与两直线交点即为 M，N，则 $AM+MN+PN$ 的最小值为线段 $P'P''$ 的长

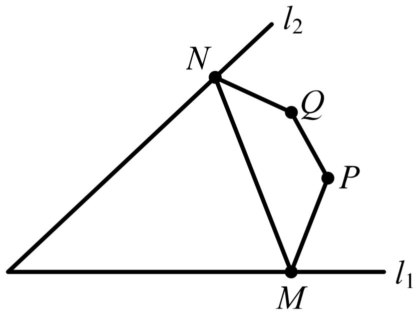


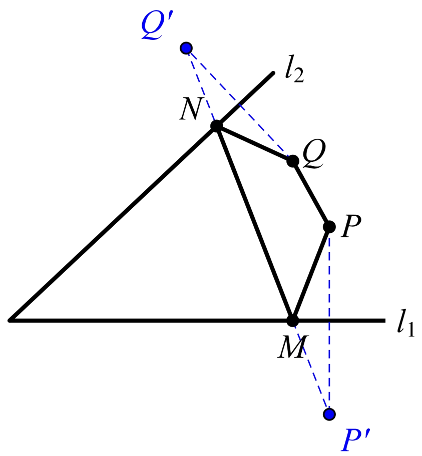


【问题 6】P，Q 为定点，在直线 l_1，l_2 上分别求点 M，N，使四边形 $PQMN$ 周长最小

问题解决：分别作点 P，Q 关于直线 l_1，l_2 的对称点 P' 和 Q'，$PM=P'M$，$QN=Q'N$

原理：两点之间线段最短，连接 $P'Q'$，与两直线交点即为 M，N，则 $PM+MN+QN$ 的最小值为线段 $P'Q'$ 的长，周长最小值为 $P'Q'+PQ$

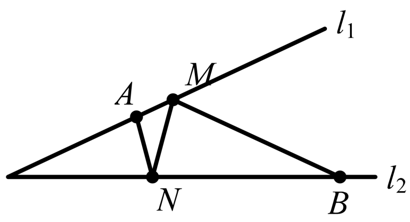


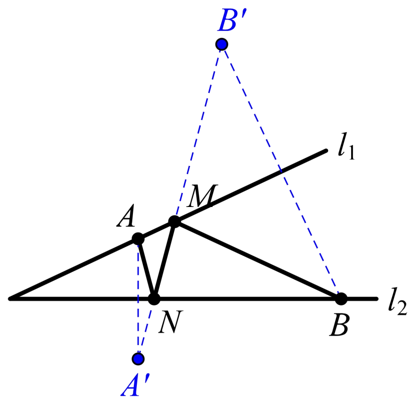


【问题 7】A，B 分别为 l_1，l_2 上的定点，M，N 分别为 l_1，l_2 上的动点，求 $AN+MN+BM$ 最小值

问题解决：分别作 A，B 关于 l_1，l_2 的对称点 A'，B'，则 $AN=A'N$，$BM=B'M$，$A'B'$ 即所求

原理：两点之间距离最短，A'，N，M，B' 共线时取最小，则 $AN+MN+BM=A'N+MN+B'M\leqslant A'B'$



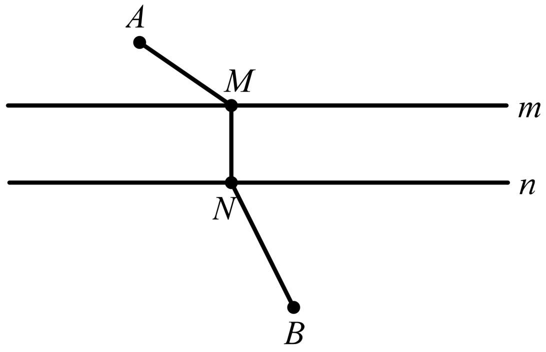


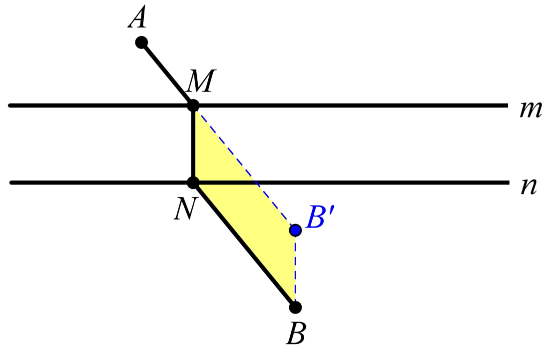
三、动线段问题（造桥选址）

【问题 8】直线 $m\parallel n$，在 m，n 上分别求点 M，N，使 $MN\perp m$，且 $AM+MN+BN$ 的最小值

问题解决：将点 B 向上平移 MN 的长度单位得 B'，连接 $B'M$，当 $AB'M$ 共线时有最小值

原理：通过构造平行四边形转换成普通将军饮马，$AM+MN+BN=AM+MN+B'M\leqslant AB'+MN$



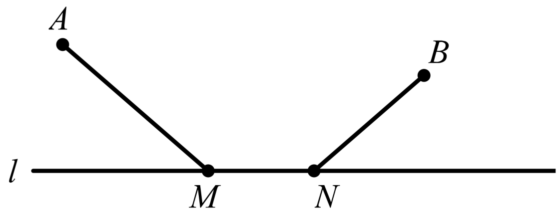


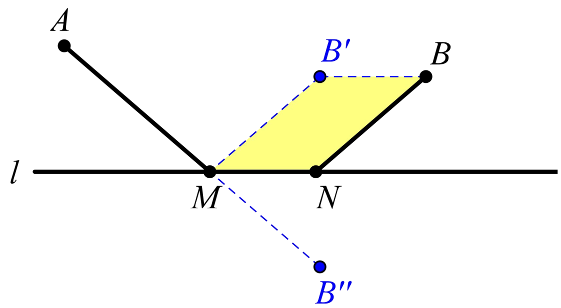
【问题 9】在直线 l 上求两点 M，N(M 在左）且 $MN=a$，求 $AM+MN+BN$ 的最小值

问题解决：将 B 点向左移动 a 个单位长度，再作 B'关于直线 l 的对称点 B''，当 $AB''M$ 共线有最小值

原理：通过平移构造平行四边 $BB'MN \Rightarrow BN=B'M=B''M$ ，

$AM+MN+BN=AM+MN+B''M \leq AB''$



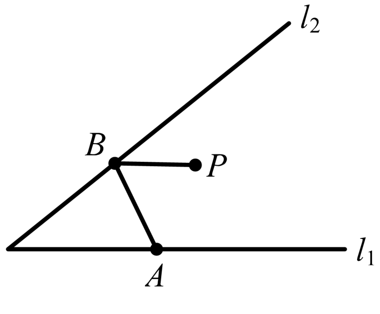


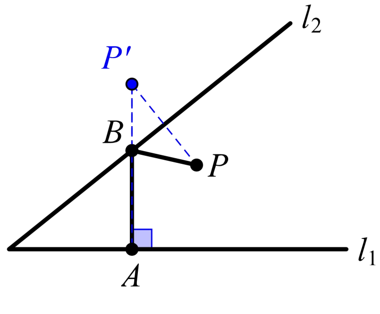
四、垂线段最短

【问题 10】在直线 l_1，l_2 上分别求点 A，B，使 $PB+AB$ 最小

问题解决：作 P 关于 l_2 的对称点 P'，作 $P'A\perp l_1$ 于 A，交 l_2 于 B，$P'A$ 即所求

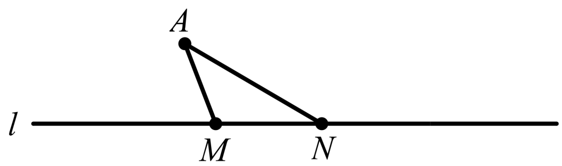
原理：点到直线，垂线段最短，$PB+AB=P'B+AB\leq P'A$

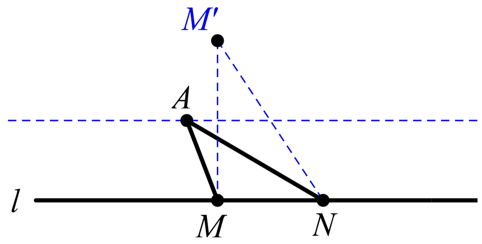


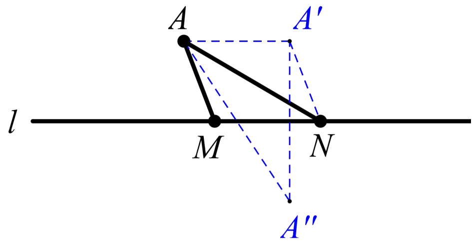


五、相对运动，平移型将军饮马

【问题 11】在直线 l 上求两点 M，N(M 在左）且 $MN=a$，求 $AM+AN$ 的最小值







问题解决：相对运动或构造平行四边形

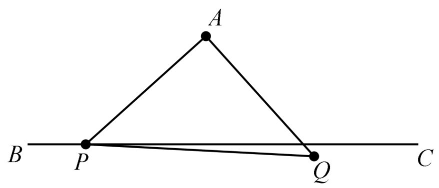
策略一：相对运动思想

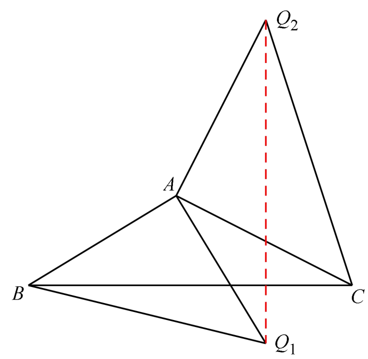
过点 A 作 MN 的平行线，相对 MN，点 A 在该平行线上运动，则可转化为普通饮马问题

策略二：构造平行四边形等量代换，同问题 9.

六、瓜豆轨迹，手拉手藏轨迹

【问题 12】如图，点 P 在直线 BC 上运动，将点 P 绕定点 A 逆时针旋转 90°，得到点 Q，求 Q 点轨迹？





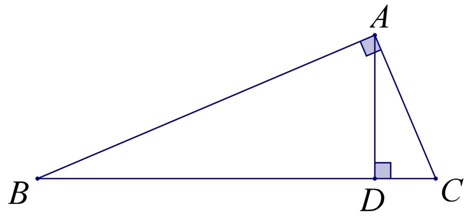
问题解决：当 AP 与 AQ 夹角固定且 AP:AQ 为定值的话，P、Q 轨迹是同一种图形．当确定轨迹是线段的时候，可以任取两个时刻的 Q 点的位置，连线即可，比如 Q 点的起始位置和终点位置，连接即得 Q 点轨迹线段．

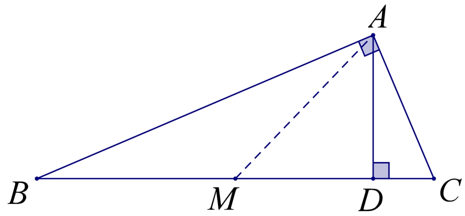
原理：由手拉手可知$\triangle ABC \cong \triangle AQ_1Q_2$，故$\angle AQ_2Q_1 = \angle ACB$,故 Q 点轨迹为直线

七、化斜为直，斜大于直

【问题 13】已知：AD 是 $Rt\triangle ABC$ 斜边上的高

（1）求$\dfrac{AD}{BC}$的最大值；（2）若 $AD=2$，求 BC 的最大值



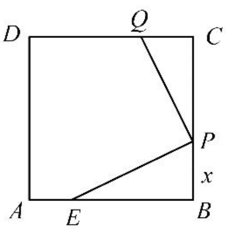


问题解决：取 BC 中点 M，（1）则 $\dfrac{AD}{BC} \le \dfrac{AM}{BC} = \dfrac{1}{2}$；（2）$BC = 2AM \le 2AD = 4$

八、构造二次函数求最值

这类问题一般无法通过纯几何方法来解决或几何方法比较复杂，需要通过面积法或者构造全等、相似建立等量关系，将待求的线段或图形的面积用含有自变量的式子来表示，一般是一个二次函数或者换元后是一个二次函数，然后通过配方得到最值．当然，配方的目的是为了避开基本不等式这个超纲的知识点，如果是选择题或填空题，你可以直接用基本不等式来秒杀，不需要配方．

【问题 14】正方形 $ABCD$ 的边长为 6，点 Q 在边 CD 上，且 $CD=3CQ$，P 是边 BC 上一动点，连接 PQ，过点 P 作 $EP\perp PQ$ 交 AB 边于点 E，设 BP 的长为 x，则线段 BE 长度的最大值为______．



问题解决：根据题意，作出图形，根据两个三角形相似的判定得到$\triangle PCQ \backsim \triangle EBP$，进而根据相似比得到$BE = -\dfrac{1}{2}(x-3)^2 + \dfrac{9}{2}$，利用二次函数求最值方法求解即可得到答案

【详解】易知$\therefore \triangle PCQ \backsim \triangle EBP$，$\therefore \dfrac{QC}{BP} = \dfrac{PC}{BE}$，

$\because CD=3CQ$， $CD=6$， $\therefore QC=2$， $\therefore \frac{2}{x}=\frac{6-x}{BE}$，

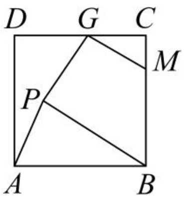
$\therefore BE=\frac{1}{2}x(6-x)=-\frac{1}{2}(x^2-6x)=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{9}{2}(0\le x\le 6)$，

$\because -\frac{1}{2}<0$， $\therefore BE=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{9}{2}$ 在 $x=3$ 时有最大值，最大值为 $\frac{9}{2}$

03 核心·题型

题型一 两定一动型（线段和差最值问题）

1．（2023·西安·模拟预测）如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 M 在边 BC 上， $MC=1$，P 为正方形内（含边上）一点，且 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{4}S_{正方体ABCD}$，$G$ 为边 CD 上一动点，连接 MG,GP，则 $MG+GP$ 的最小值为 _____.



【答案】3

【分析】先确定组成点 P 的所有点为过 AD,BC 的中点 E,F 的线段 EF，作点 M 关于 CD 的对称点 M'，连接 $M'G$，证明 $M'F$ 的长为 $MG+GP$ 的最小值，因此求出 $M'F$ 的长即可.

【详解】解：过点 P 作 $EF\,//\,AB$，分别交 AD,BC 于点 E，F，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

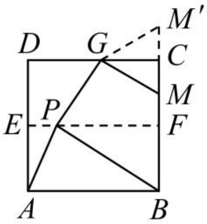
$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 和四边形 $EFCD$ 都是矩形，

$\because S_{\triangle PAB}=\frac{1}{4}S_{正方体ABCD}$， 正方形 $ABCD$ 的边长为 4，

$\therefore \frac{1}{2}\times 4\cdot EA=\frac{1}{4}\times 4^2$，

解得 $EA=2$，

$\therefore CF=DE=AD-AE=4-2=2$，



作点 M 关于 CD 的对称点 M'，连接 $M'G$，

则 $M'G = MG$，$M'C = MC = 1$，

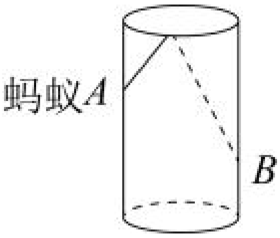
∴ $MG + GP = M'G + GP \geq M'F$，

∴ $MG + GP$ 的最小值为 $M'F$ 的长，

∵ $M'F = M'C + CF = 1 + 2 = 3$，

∴ $MG + GP$ 的最小值为 3

2．透明圆柱形容器（容器厚度忽略不计）的高为 12cm，底面周长为 10cm，在容器内壁离底部 3cm 的点 B 处有一饭粒，此时一只蚂蚁正好在容器外壁且离容器上沿 3cm 的点 A 处．求蚂蚁吃到饭粒需要爬行的最短路程是多少？



【答案】13

【详解】∵高为 12cm，底面周长为 10cm，在容器内壁离容器底部 3cm 的点 B 处有一饭粒，

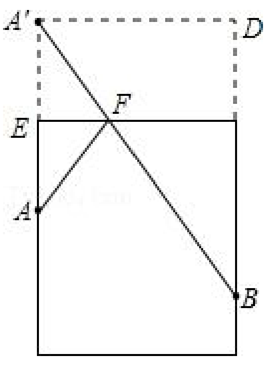
此时壁虎正好在容器外壁，离容器上沿 3cm 与饭粒相对的点 A 处，

∴$A'D$＝5cm，BD＝12－3＋AE＝12cm，

∴将容器侧面展开，作 A 关于 EF 的对称点 A'，

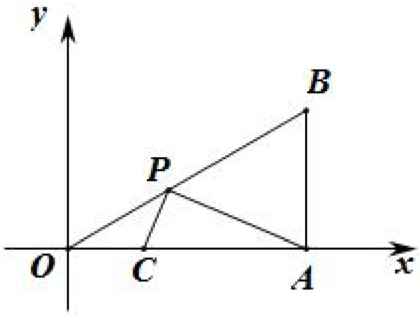
连接 $A'B$，则 $A'B$ 即为最短距离，

$A'B$＝$\sqrt{A'D^2 + BD^2}$＝13（cm）．



3．如图，在平面直角坐标系中，$Rt\triangle OAB$ 的顶点 A 在 x 轴的正半轴上．顶点 B 的坐标为（3，$\sqrt{3}$），点 C 的坐标为（1，0），且∠AOB=30°点 P 为斜边 OB 上的一个动点，则 PA+PC 的最小值为

（　　）

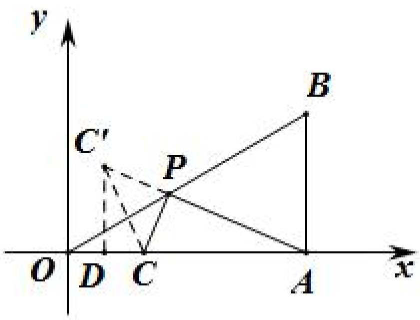


A．$\sqrt{2}$　　　　B．$\sqrt{3}$　　　　C．$\sqrt{7}$　　　　D．$\sqrt{11}$

【答案】C

【分析】过点 C 作 C 关于 OB 的对称点 C′，连接 AC′与 OB 相交，根据轴对称确定最短路线得 AC′与OB的交点即为所求的点P，PA+PC的最小值=AC′，过点C′作C′D⊥OA于D，求出CC′，∠OCC′=60°，再求出 CD、C′D，然后求出 AD，再根据勾股定理列式计算即可得解．

【详解】解：如图，过点 C 作 C 关于 OB 的对称点 C′，连接 AC′与 OB 相交，



则 AC′与 OB 的交点即所求的点 P，PA+PC 的最小值=AC′，

过点 C′作 C′D⊥OA 于 D，

∵点 C 的坐标为（1，0），且∠AOB=30°，

∴∠OCC′=90°-30°=60°，

OC=1，CC′=$2\times1\times\frac{1}{2}$=1，

∴CD=$\frac{1}{2}$，C′D=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∵顶点 B 的坐标为（3，$\sqrt{3}$），点 C 的坐标为（1，0），∠OAB=90°，

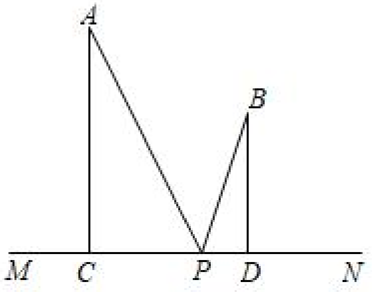
∴AC=3-1=2，

∴AD=2+$\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$，

在 Rt△AC′D 中，由勾股定理得，AC′=$\sqrt{C'D^2+AD^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{7}$

4．如图，点 A，B 在直线 MN 的同侧，A 到 MN 的距离 $AC=8$，B 到 MN 的距离 $BD=5$，已知 $CD=4$，

P 是直线 MN 上的一个动点，记 $PA+PB$ 的最小值为 a，$|PA-PB|$ 的最大值为 b，则 a^2-b^2 的值为（　）

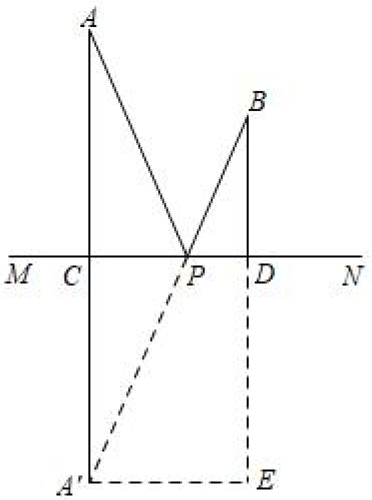


A．160　　B．150　　C．140　　D．130

【答案】A

【分析】作点 A 关于直线 MN 的对称点 A'，连接 $A'B$ 交直线 MN 于点 P，则点 P 即为所求点，过点 A' 作直线 $AE\perp BD$，在根据勾股定理求出线段 $A'B$ 的长，即为 PA+PB 的最小值，延长 AB 交 MN 于点 P'，此时 $P'A-P'B=AB$，由三角形三边关系可知 $AB>|PA-PB|$，故当点 P 运动到 P' 时 $|PA-PB|$ 最大，过点 B 作 $BE\perp AC$ 由勾股定理求出 AB 的长就是 $|PA-PB|$ 的最大值，代入计算即可得.

【详解】解：如图所示，作点 A 关于直线 MN 的对称点 A'，连接 $A'B$ 交直线 MN 于点 P，则点 P 即为所求点，过点 A' 作直线 $AE\perp BD$，



∵ $AC=8$， $BD=5$， $CD=4$，

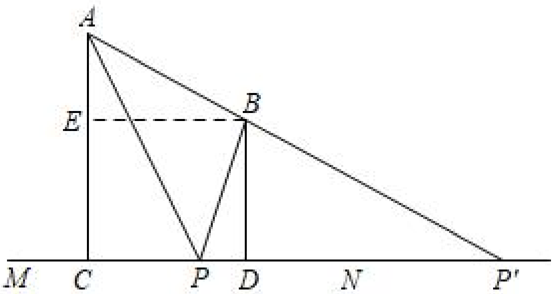
∴ $A'C=8$， $BE=8+5=13$， $A'E=CD=4$，

在 $Rt_{\triangle}A'EB$ 中，根据勾股定理得，

∴ $A'B=\sqrt{BE+A'E}=\sqrt{13^2+4^2}=\sqrt{185}$，

即 PA+PB 的最小值是 $a=\sqrt{185}$；

如图所示，延长 AB 交 MN 于点 P'，



∵ $P'A-P'B=AB$， $AB>|PA-PB|$，

∴当点 P 运动到 P' 点时，$|PA-PB|$ 最大，

过点 B 作 $BE\perp AC$，则 $BE=CD=4$，

∴ $AE=AC-BD=8-5=3$，

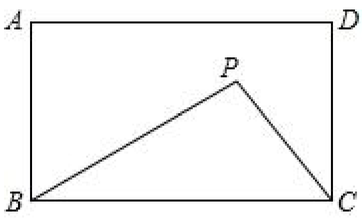
在 $Rt_{\triangle}AEB$ 中，根据勾股定理得，

$AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

∴ $|PA-PB|=5$，

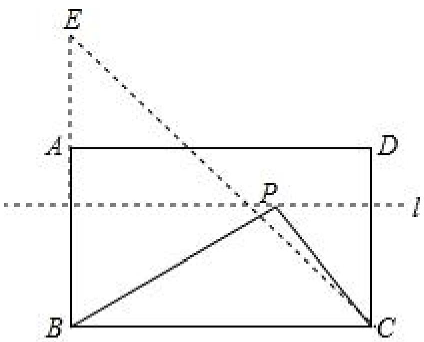
即 $b=5$，∴ $a^2-b^2=(\sqrt{185})^2-5^2=160$

5．如图，在矩形 ABCD 中，AB＝3，BC＝5．动点 P 满足 $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{3}S_{矩形ABCD}$．则点 P 到 B，C 两点距离之和 PB+PC 的最小值为_______。



【答案】$\sqrt{41}$

【解答】解：设△PBC 中 BC 边上的高是 h.



∵$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{3}S_{矩形ABCD}$.

∴$\frac{1}{2}BC\bullet h=\frac{1}{3}AB\bullet BC$,

$\therefore h=\frac{2}{3}AB=2$,

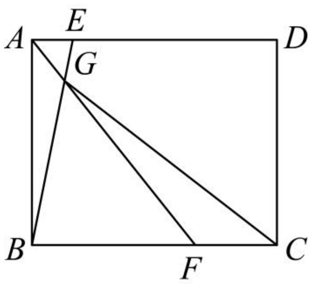
∴动点 P 在与 BC 平行且与 BC 的距离是 2 的直线 l 上，如图，作 B 关于直线 l 的对称点 E，连接 CE，则 CE 的长就是所求的最短距离.

在 Rt△BCE 中，∵$BC=5$，$BE=2+2=4$，

$\therefore CE=\sqrt{Bc^2+BE^2}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$，

即 $PB+PC$ 的最小值为 $\sqrt{41}$

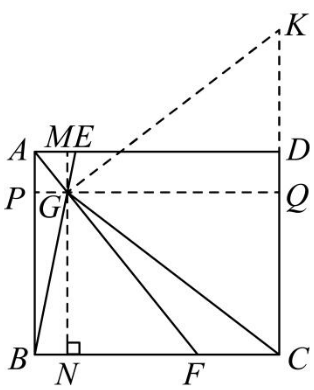
6．（2023·泰州·三模）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=5\text{cm}$，$BC=6\text{cm}$，点 E 在直线 AD 上，从点 A 出发向右运动，速度为每秒 0.5cm，点 F 在直线 BC 上，从点 B 出发向右运动，速度为每秒 2cm，BE、AF 相交于点 G，则 $BG+CG$ 的最小值为____________cm.



【答案】10

【分析】过点 G 作直线 $MN\perp BC$，分别交 AD、BC 于点 M、N，过点 G 作直线 $PQ\parallel CD$，分别交 AB、DC 于点 P、Q，易知四边形 $ABNM$、$PBNG$、$GNCQ$ 为矩形，证明 $\triangle GAE\backsim\triangle GFB$，由相似三角形的性质可得 $\frac{AE}{BF}=\frac{GM}{GN}$；设 E、F 两点运动时间为 t，则 $AE=0.5t$，$BF=2t$，易得 $GM=1\text{cm}$，$GN=4\text{cm}$；作点 C 关于直线 PQ 的对称点 K，由轴对称的性质可得 $CG=KG$，故当 B、G、K 三点共线时，$BG+KG$ 的值最小，即 $BG+CG$ 取最小值，此时，在 Rt△BCK 中，由勾股定理求得 BK 的值，即可获得答案.

【详解】解：如下图，过点 G 作直线 $MN\perp BC$，分别交 AD、BC 于点 M、N，过点 G 作直线 $PQ\parallel CD$，分别交 AB、DC 于点 P、Q，



易知四边形 $ABNM$、$PBNG$、$GNCQ$ 为矩形，$MN=AB=5\text{cm}$，

∵四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore AD\parallel BC$，$AB\parallel DC$

∴$\angle GAE=\angle GFB$， $\angle GEA=\angle GBF$，

∴$\triangle GAE\backsim\triangle GFB$，

∴$\frac{AE}{BF}=\frac{GM}{GN}$，

设E、F两点运动时间为t，则$AE=0.5t$， $BF=2t$，

则有$\frac{GM}{GN}=\frac{0.5t}{2t}=\frac{1}{4}$，即$GN=4GM$，

∵$MN=5\text{cm}$，

∴$GM=1\text{cm}$， $GN=4\text{cm}$，

∵四边形$GNCQ$为矩形，

∴$QC=GN=4\text{cm}$，

作点C关于直线PQ的对称点K，如图，

则$QK=QC=4\text{cm}$， $KC=QK+QC=8\text{cm}$，

由轴对称的性质可得$CG=KG$，

当B、G、K三点共线时，$BG+KG$的值最小，即$BG+CG$取最小值，

此时，在$\text{Rt}\triangle BCK$中，$BK=\sqrt{BC^2+KC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10\text{cm}$，

∴$BG+CG$的最小值为10cm

7．已知x,y,S满足$S=\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}$，则$S$的最小值为______.

【答案】5

【分析】根据$\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}$表示平面内点(x,y)与$(-2,3)$之间的距离，$\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}$表示平面内点(x,y)与$(2,6)$之间的距离，得出当点(x,y)在$(-2,3)$与$(2,6)$之间的线段上时，这两个距离之和最小，求出这个最小距离即可.

【详解】解：∵$\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}$表示平面内点(x,y)与$(-2,3)$之间的距离，$\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}$表示平面内点(x,y)与$(2,6)$之间的距离，

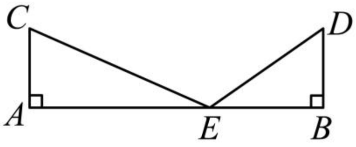
∴$S=\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}$表示这两个距离之和，

∵两点之间线段最短，

∴当点(x,y)在$(-2,3)$与$(2,6)$之间的线段上时，这两个距离之和最小，

∴S的最小值为$\sqrt{(-2-2)^2+(3-6)^2}=5$.

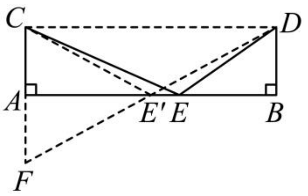
8．探究式子$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-4)^2+1}$ $(x\geqslant 0)$的最小值.小胖同学运用“数形结合”的思想：如图，取$AB=4$，作$AC\perp AB$于A．$BD\perp AB$于B，且$AC=1$，$BD=1$，点E在AB上，设$AE=x$，则$BE=4-x$，于是，$\sqrt{x^2+1}=CE$，$\sqrt{(x-4)^2+1}=DE$，因此，可求得$CE+DE$的最小值为________，已知$y=\sqrt{(x+5)^2+5^2}-\sqrt{x^2+3^2}$ $(x\geqslant 0)$，则y的最大值是________.



【答案】　$2\sqrt{5}$　$\sqrt{29}$

【分析】作C关于AB的对称点F，连接FD交AB于E'，连接CD，利用勾股定理求$CE+DE$的最小值即可；构造图形如图，过点D作$DM\perp AC$交AC于M，求y的最大值结合三角形的三边关系，根据矩形的性质，利用勾股定理进行计算即可得到答案．

【详解】解：如图，作C关于AB的对称点F，连接FD交AB于E'，连接CD，



，

则$AF=AC=1$，$CE'=FE'$，

此时$CE+DE$的值最小为：$CE'+DE'=FE'+DE'=DF$，

$\because AC\perp AB$，$BD\perp AB$，

$\therefore AC/\!/BD$，

$\because AC=BD=1$，

$\therefore$四边形$ABDC$是平行四边形，

$\because \angle CAB=90^\circ$，

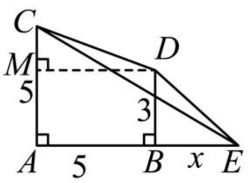
$\therefore$四边形$ABDC$是矩形，

$\therefore \angle FCD=90^\circ$，$CD=AB=4$，

$\because CF=CA+AF=2$，

$\therefore DF=\sqrt{CF^2+CD^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

如图，$\angle A=90^\circ, AC=5$，$AB=5$，$BD=3$，$BE=x$，



，

则$CE=\sqrt{5^2+(5+x)^2}$，$DE=\sqrt{x^2+3^2}$，

$\because CE-DE\le CD$，

$\therefore CE-DE$的最大值为CD的长度，

过点D作$DM\perp AC$交AC于M，

则四边形$ABDM$为矩形，

$\therefore DM=AB=5$，$AM=BD=3$，

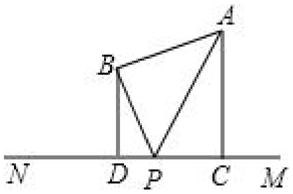
$\therefore CM=2$，

$\therefore CD=\sqrt{CM^2+DM^2}=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$，

$\therefore y$的最大值为$\sqrt{29}$

9．如图，A、B两点在直线MN外的同侧，A到MN的距离$AC=16$，B到MN的距离$BD=10$，$CD=8$，

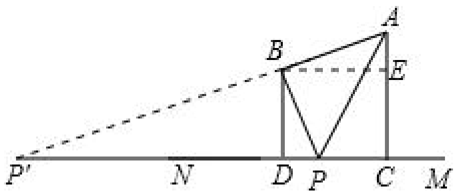
点 P 在直线 MN 上运动，则 $|PA-PB|$ 的最大值等于__________.



【答案】10

【分析】延长 AB 交 MN 于点 P'，过点 B 作 $BE\perp AC$，由题意可知 $P'A-P'B=AB\geq|PA-PB|$，即说明当点 P 运动到 P' 点时，$|PA-PB|$ 最大，即为 AB 的长．最后根据勾股定理求出 AB 的长即可．

【详解】解：如图，延长 AB 交 MN 于点 P'，过点 B 作 $BE\perp AC$，



$\because P'A-P'B=AB$，$AB\geq|PA-PB|$，

$\therefore$ 当点 P 运动到 P' 点时，$|PA-PB|$ 最大，即为 AB 的长．

$\because BD=10$，$CD=8$，$AC=16$，

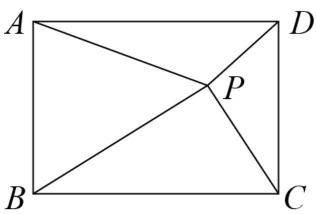
$\therefore BE=CD=8$，$AE=AC-CE=AC-BD=16-10=6$，

$\therefore AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

$\therefore |PA-PB|$ 的最大值等于 10

10．已知：如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3, AD=4$．动点 P 为矩形 $ABCD$ 内一点，且满足

$S_{\Delta PBC}=\frac{1}{3}S_{矩形ABCD}$，则△$ADP$ 周长的最小值为__________.



【答案】$4+2\sqrt{5}$

【分析】过点 P 作 $MN\perp AD$，交 AD 于点 M，交 BC 于点 N，由 $S_{\Delta PBC}=\frac{1}{3}S_{矩形ABCD}$，可得 $PN=\frac{2}{3}MN=2$，过 P 点作 $GH//AD$，交 AB 于点 G，交 CD 于点 H，作 A 点关于 GH 的对称点 A'，连接 $A'D$ 与 GH 交点即为所求点 P，在 Rt△$AA'D$ 中，$AD=4$，$AA'=2$，即可求 $A'D=2\sqrt{5}$．

【详解】解：过点 P 作 $MN\perp AD$，交 AD 于点 M，交 BC 于点 N，

$\because S_{\Delta PBC}=\frac{1}{3}S_{矩形ABCD}$，

$\therefore \frac{1}{2}\times BC\times PN=\frac{1}{3}\times BC\times MN$，

$\therefore PN=\frac{2}{3}MN$，

$\because AB=3$，

$\therefore MP=1$，

过 P 点作 $GH//AD$，交 AB 于点 G，交 CD 于点 H，作 A 点关于 GH 的对称点 A'，连接 $A'D$ 与 GH 交点即为所求点 P，

$\because AP=A'P$，

$\therefore AP+PD=A'D$，

$\because AG=1$，

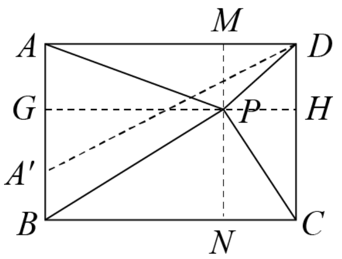
$\therefore AA'=2$，

在 $Rt\triangle AA'D$ 中，$AD=4$，$AA'=2$，

$\therefore A'D=2\sqrt{5}$，

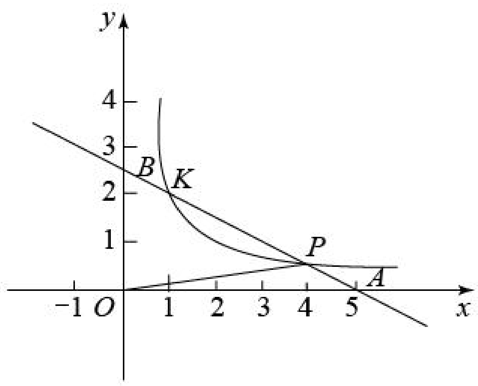
$\therefore \Delta ADP$ 周长的最小值 $2\sqrt{5}+4$，

故答案为 $4+2\sqrt{5}$．



2022·绥化·中考真题

11．在平面直角坐标系中，已知一次函数 $y_1=k_1x+b$ 与坐标轴分别交于 $A(5,0)$，$B\left(0,\frac{5}{2}\right)$ 两点，且与反比例函数 $y_2=\frac{k_2}{x}$ 的图象在第一象限内交于 P，K 两点，连接 OP，$\triangle OAP$ 的面积为 $\frac{5}{4}$．



(1)求一次函数与反比例函数的解析式；

(2)若 C 为线段 OA 上的一个动点，当 $PC+KC$ 最小时，求 $\triangle PKC$ 的面积．

【答案】(1) $y_1=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$，$y_2=\frac{2}{x}$．；$\frac{6}{5}$

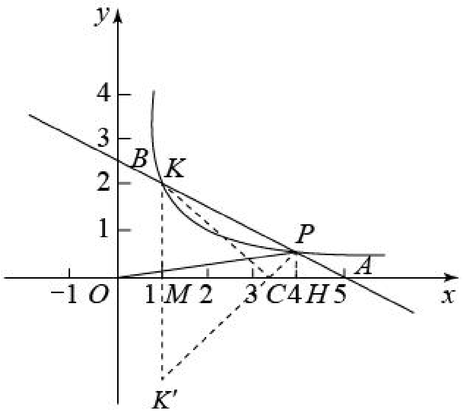
【详解】（1）解：∵一次函数 $y_1=k_1x+b$ 与坐标轴分别交于 $A(5,0)$，$B\left(0,\frac{5}{2}\right)$ 两点，

∴把 $A(5,0)$，$B\left(0,\frac{5}{2}\right)$ 代入 $y_1=k_1x+b$ 得，

$\begin{cases}5k_1+b=0\\ b=\frac{5}{2},\end{cases}$，解得，$\begin{cases}k_1=-\frac{1}{2}\\ b=\frac{5}{2}\end{cases}$，

∴一次函数解析式为 $y_1=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$，

过点 P 作 $PH\perp x$ 轴于点 H，



∵ $A(5,0)$，

∴ $OA=5$，

又 $S_{\Delta PAO}=\frac{5}{4}$，

∴ $\frac{1}{2}\times5\times PH=\frac{5}{4}$

∴ $PH=\frac{1}{2}$，

∴ $-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$，

∴ $x=4$，

∴ $P(4,\frac{1}{2})$

∵ $P(4,\frac{1}{2})$ 在双曲线上，

∴ $k_2=4\times\frac{1}{2}=2$，

∴ $y_2=\frac{2}{x}$.

（2）解：作点 K 关于 x 轴的对称点 K'，连接 KK' 交 x 轴于点 M，则 K'（1，-2），OM=1，

连接 PK' 交 x 轴于点 C，连接 KC，则 PC+KC 的值最小，

设直线 PK' 的解析式为 $y=mx+n$，

把 $P(4,\frac{1}{2}),K'(1,-2)$ 代入得，$\begin{cases} m+n=-2 \\ 4m+n=\frac{1}{2} \end{cases}$

解得，$\begin{cases} m=\frac{5}{6} \\ n=-\frac{17}{6} \end{cases}$

∴直线 PK' 的解析式为 $y=\frac{5}{6}x-\frac{17}{6}$，

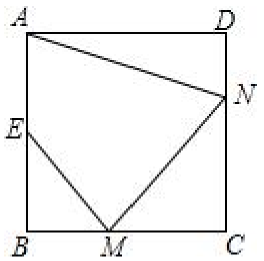
当 $y=0$ 时，$\frac{5}{6}x-\frac{17}{6}=0$，解得，$x=\frac{17}{5}$，∴ $C(\frac{17}{5},0)$ ∴ $OC=\frac{17}{5}$

∴ $MC=OC-OM=\frac{17}{5}-1=\frac{12}{5}$, $AC=OA-OC=5-\frac{17}{5}=\frac{8}{5}$，$AM=OA-OM=5-1=4$，

∴ $S_{\Delta PKC}=S_{\Delta AKM}-S_{\Delta KMC}-S_{\Delta PAC}=\frac{1}{2}\times4\times2-\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}\times2-\frac{1}{2}\times\frac{8}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{5}$

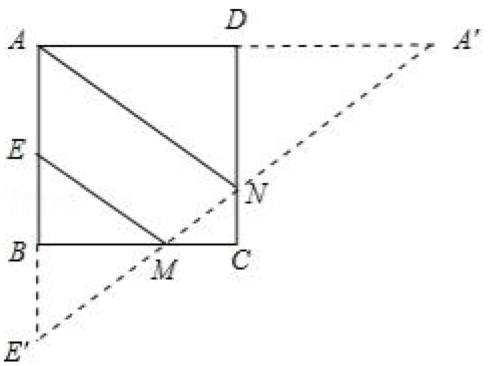
题型二　双动点最值问题（两次对称）

12．如图所示，E 为边长是 2 的正方形 ABCD 的中点，M 为 BC 上一点，N 为 CD 上一点，连 EM、MN、NA，则四边形 AEMN 周长的最小值为_______。



【答案】6

【解答】解：延长 AD 至 A′，使 AD＝DA′，延长 AB 至 E′，使 BE＝BE′，连接 A′E′，



交 BC 于 M，交 DC 于 N，此时 AN＝A′N，EM＝E′M，四边形 AEMN 周长＝AN+MN+ME+AE＝A′E′+AE，根据两点之间线段最短，A′E′+AE 就是四边形 AEMN 周长的最小值；

∵AD＝2，AE＝BE＝1，

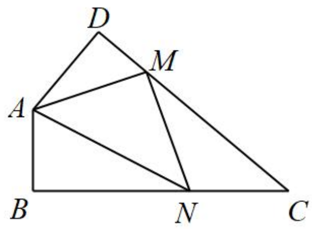
∴A′D＝AD＝2，BE＝BE′＝1，

∴AE′＝3，AA′＝4，

$\therefore A'E' = \sqrt{AE' + AA'} = 5$,

∴四边形 $AEMN$ 周长的最小值为 $5+1=6$.

13．（2023·淄博·一模）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle D=90°$，$\angle DAB=140°$，M，N 分别是边 DC，BC 上的动点，当 $\triangle AMN$ 的周长最小时，$\angle MAN=$______°.



【答案】100

【分析】作点 A 关于 CD、CB 的对称点 E、F，连接 EF 分别交 CD、CB 于点 H、G，连接 AH、AG、EM、FN，则当点 M 与点 H 重合，点 N 与点 G 重合时，$\triangle AMN$ 的周长最小，则易得 $\angle MAN$ 的大小.

【详解】解：如图，作点 A 关于 CD、CB 的对称点 E、F，连接 EF 分别交 CD、CB 于点 H、G，连接 AH、AG、EM、FN，

由对称性知：$EM=AM$，$EH=AH$，$NF=NA$，$GF=GA$，

$\therefore AM+MN+NA=EM+MN+NF\geq EF$，

∴当点 M 与点 H 重合，点 N 与点 G 重合时，$\triangle AMN$ 的周长最小；

∵ $GA=GF$，$EH=AH$，

∴ $\angle GAF=\angle GFA$，$\angle HEA=\angle HAE$，

∴ $\angle AGH=2\angle GFA$，$\angle AHG=2\angle HEA$

∵ $\angle DAB=140°$，

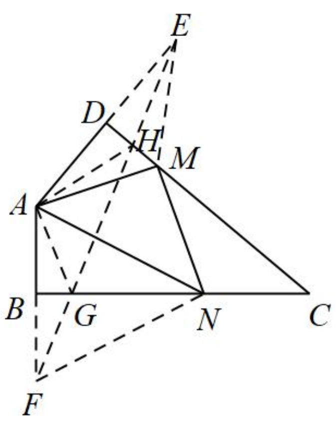
∴ $\angle GFA+\angle HEA=180°-\angle DAB=40°$，

∵ $\angle AGH+\angle AHG=2\angle GAF+2\angle HEA=2\times 40°=80°$，

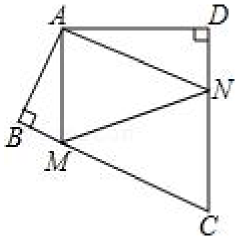
∴ $\angle GAH=180°-(\angle AGH+\angle AHG)=180°-80°=100°$，

即 $\angle MAN=100°$，

故答案为：100.

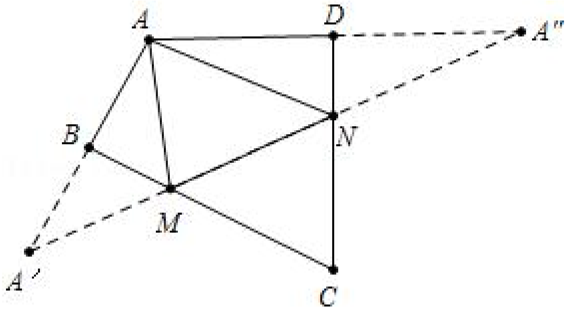


14．四边形 ABCD 中，∠BAD＝125°，∠B＝∠D＝90°，在 BC、CD 上分别找一点 M、N，当三角形 AMN 周长最小时，∠MAN 的度数为________。



【答案】70

【解答】解：延长 AB 到 A' 使得 $BA'=AB$，延长 AD 到 A'' 使得 $DA''=AD$，



连接 $A'A''$ 与 BC、CD 分别交于点 M、N.

∵ $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$，

∴A、A' 关于 BC 对称，A、A'' 关于 CD 对称，

此时△AMN 的周长最小，

∵$BA=BA'$，$MB\perp AB$，

∴$MA=MA'$，同理：$NA=NA''$，

∴ $\angle A'=\angle MAB$，$\angle A''=\angle NAD$，

∵ $\angle AMN=\angle A'+\angle MAB=2\angle A'$，$\angle ANM=\angle A''+\angle NAD=2\angle A''$，

∴ $\angle AMN+\angle ANM=2(\angle A'+\angle A'')$，

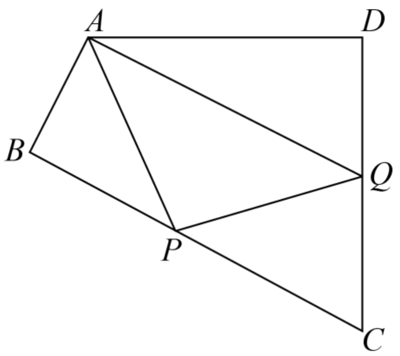
∵ $\angle BAD=125^\circ$，

∴ $\angle A'+\angle A''=180^\circ-\angle BAD=55^\circ$，

∴ $\angle AMN+\angle ANM=2\times55^\circ=110^\circ$．

∴ $\angle MAN=180^\circ-110^\circ=70^\circ$，故答案为：70°

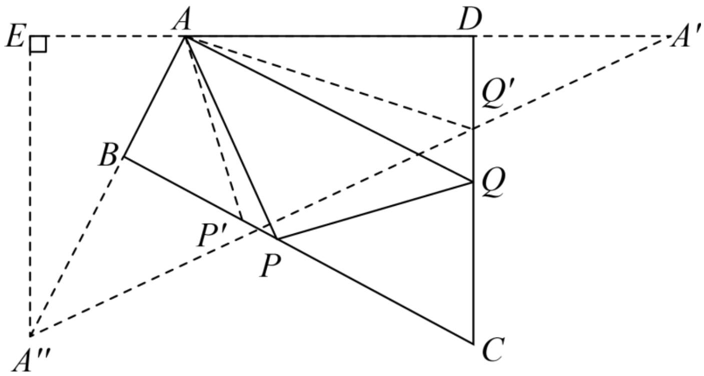
15．（2023·西安·二模）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle D=90^\circ$，$\angle BAD=120^\circ$，$AB=2$，$AD=4$，$P$、$Q$ 分别是边 BC、CD 上的动点，连接 AP，AQ，PQ，则△APQ 周长的最小值为__________.



【答案】$4\sqrt{7}$

【分析】如图，由$\angle B=\angle D=90°$，作A关于BC对称的点A''，作A关于CD对称的点A'，连接$A'A''$，与BC交点为P'，与CD交点为Q'，连接AP'，AQ'，由对称的性质可得$AP'=A''P'$，$AQ'=A'Q'$，$A'D=AD=\frac{1}{2}AA'=4$，$A''B=AB=\frac{1}{2}AA''=2$，则$AP'+P'Q'+AQ'=A''P'+P'Q'+A'Q'$，可知当$A''$、$P'$、$Q'$、$A'$四点共线时，$\triangle APQ$的周长最小为$A'A''$，如图，过$A''$作$A''E\perp AD$的延长线于$E$，由$\angle BAD=120°$，可得$\angle A''AE=60°$，则$A''E=AA''\cdot\sin\angle A''AE=2\sqrt{3}$，$AE=AA''\cdot\cos\angle A''AE=2$，$A'E=10$，根据$A'A''=\sqrt{A'E^2+A''E^2}$，计算求解即可.

【详解】解：如图，由$\angle B=\angle D=90°$，作A关于BC对称的点A''，作A关于CD对称的点A'，连接$A'A''$，与BC交点为P'，与CD交点为Q'，连接AP'，AQ'，



由对称的性质可得$AP'=A''P'$，$AQ'=A'Q'$，$A'D=AD=\frac{1}{2}AA'=4$，$A''B=AB=\frac{1}{2}AA''=2$，

∴$AP'+P'Q'+AQ'=A''P'+P'Q'+A'Q'$，

∴当A''、P'、Q'、A'四点共线时，$\triangle APQ$的周长最小为$A'A''$，

如图，过A''作$A''E\perp AD$的延长线于E，

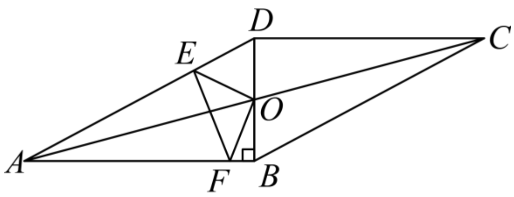
∵$\angle BAD=120°$，

∴$\angle A''AE=60°$，

∴$A''E=AA''\cdot\sin\angle A''AE=2\sqrt{3}$，$AE=AA''\cdot\cos\angle A''AE=2$，

∴$A'E=10$，由勾股定理得$A'A''=\sqrt{A'E^2+A''E^2}=4\sqrt{7}$

16．如图，在平行四边形$ABCD$中，对角线AC、BD相交于点O，点E、F分别是边AD、AB上的点，连接OE、OF、EF，若$AB=\sqrt{3}$，$BC=2$，$\angle DAB=30°$，则$\triangle OEF$周长的最小值是______.



【答案】$\frac{\sqrt{13}}{2}$

【分析】作点 O 关于 AB 的对称点 M，点 O 关于 AD 的对称点 N，连接 MN，MF，NE，AN，AM，则 $\triangle OEF$ 的周长 $= OE + OF + EF = ME + EF + MF$，故当 M、E、F、N 四点共线时 $ME + EF + MF$，即此时 $\triangle OEF$ 的周长最小，最小值为 MN 的长，证明 $\triangle MAN$ 是等边三角形，得到 $MN = AM = AO$；过 D 作 $DP \perp AB$ 交直线 AB 于 P，由平行四边形的性质得到 $AD = BC = 2$，$OD = OB = \frac{1}{2}BD$，由含 30 度角的直角三角形的性质得到 $DP = \frac{1}{2}AD = 1$，则 $AP = \sqrt{3}$，$OD = OB == \frac{1}{2}$，即可得到点 P 与点 B 重合，则 $OA = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$，由此即可得到答案.

【详解】解：作点 O 关于 AB 的对称点 M，点 O 关于 AD 的对称点 N，连接 MN，MF，NE，AN，AM，由作图得：$AN = AO = AM$，$\angle NAD = \angle DAO$，$\angle MAB = \angle BAO$，$NE = OE$，$MF = OF$，

∴ $\triangle OEF$ 的周长 $= OE + OF + EF = ME + EF + MF$，

∴当 M、E、F、N 四点共线时 $ME + EF + MF$，即此时 $\triangle OEF$ 的周长最小，最小值为 MN 的长，

∵ $\angle DAB = 30°$，

∴ $\angle MAN = 60°$，

∴ $\triangle MAN$ 是等边三角形，

∴ $MN = AM = AO$；

过 D 作 $DP \perp AB$ 交直线 AB 于 P，

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD = BC = 2$，$OD = OB = \frac{1}{2}BD$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADP$ 中，$\angle DAP = 30°$，$\angle DPA = 90°$，

∴ $DP = \frac{1}{2}AD = 1$，

∴ $AP = \sqrt{AD^2 - BD^2} = \sqrt{3}$，$OD = OB = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}$，

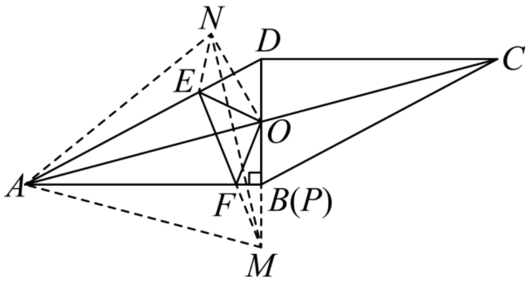
∴ $AB = AP = \sqrt{3}$，

∴点 P 与点 B 重合，

∴ $OA = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$，

∴ $MN = \frac{\sqrt{13}}{2}$

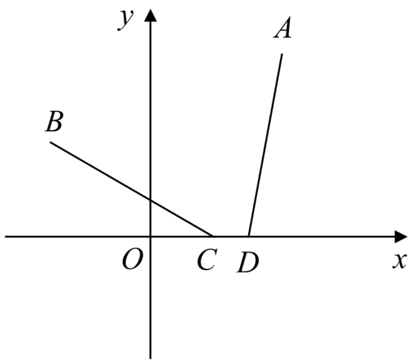
∴ $\triangle OEF$ 的周长最小值为 $\frac{\sqrt{13}}{2}$，



题型三 动线段问题：造桥选址（构造平行四边形）

鞍山·中考真题

17．如图，在平面直角坐标系中，已知 $A(3,6), B(-2,2)$，在 x 轴上取两点 C，D（点 C 在点 D 左侧），且始终保持 $CD=1$，线段 CD 在 x 轴上平移，当 $AD+BC$ 的值最小时，点 C 的坐标为________.



【答案】(-1，0)

【分析】作点 B 关于 x 轴的对称点 B′，将 B′向右平移 1 个单位得到 B″，连接 AB″，与 x 轴交于点 D，过点 B′作 AB″的平行线，与 x 轴交于点 C，得到此时 AD+BC 的值最小，求出直线 AB″，得到点 D 坐标，从而可得点 C 坐标．

【详解】解：如图，作点 B 关于 x 轴的对称点 B′，将 B′向右平移 1 个单位得到 B″，连接 AB″，与 x 轴交于点 D，过点 B′作 AB″的平行线，与 x 轴交于点 C，

可知四边形 B′B″DC 为平行四边形，

则 B′C=B″D，

由对称性质可得：BC=B′C，

∴AD+BC=AD+B′C=AD+B″D=AB″，

则此时 AB″最小，即 AD+BC 最小，

∵A（3，6），B（-2，2），

∴B′（-2，-2），

∴B″（-1，-2），

设直线 AB″的表达式为：y=kx+b，

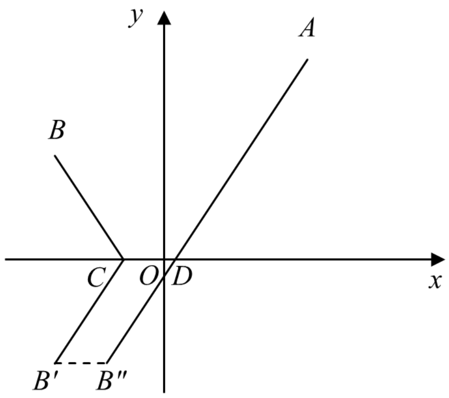
则$\begin{cases}6=3k+b\\-2=-k+b\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=2\\b=0\end{cases}$，

∴直线 AB″的表达式为：y=2x，

令 y=0，解得：x=0，即点 D 坐标为（0，0），

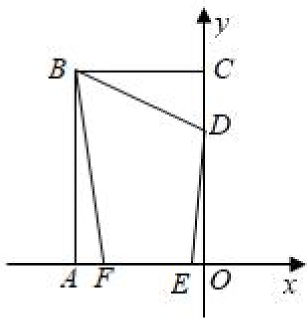
∴点 C 坐标为（-1，0），

故答案为：(-1，0).



聊城·中考真题

18．如图，在直角坐标系中，矩形 *OABC* 的顶点 *O* 在坐标原点，顶点 *A*，*C* 分别在 *x* 轴，*y* 轴上，*B*，*D* 两点坐标分别为 *B*（－4，6），*D*（0，4），线段 *EF* 在边 *OA* 上移动，保持 *EF*＝3，当四边形 *BDEF* 的周长最小时，点 *E* 的坐标为__________.



【答案】$(-0.4,0)$

【详解】解：如图所示，∵*D*（0，4），

∴*D* 点关于 *x* 轴的对称点坐标为 *H*（0，-4），

∴*ED*=*EH*，

将点 *H* 向左平移 3 个单位，得到点 *G*（-3，-4），

∴*EF*=*HG*，*EF*∥*HG*，

∴四边形 *EFGH* 是平行四边形，

∴*EH*=*FG*，

∴*FG* =*ED*，

∵*B*（-4，6），

∴$BD=\sqrt{(-4-0)^2+(6-4)^2}=2\sqrt{5}$，

又∵$EF=3$，

∴四边形 $BDEF$ 的周长$=BD+DE+EF+BF=2\sqrt{5}+FG+3+BF$，

要使四边形 $BDEF$ 的周长最小，则应使 $FG+BF$ 的值最小，

而当 F、G、B 三点共线时 $FG+BF$ 的值最小，

设直线 BG 的解析式为：$y=kx+b(k\neq 0)$

∵B（-4，6），G（-3，-4），

∴$\begin{cases}-4k+b=6\\-3k+b=-4\end{cases}$，

∴$\begin{cases}k=-10\\b=-34\end{cases}$，

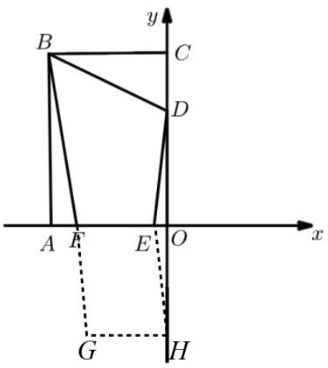
∴$y=-10x-34$，

当 $y=0$ 时，$x=-3.4$，

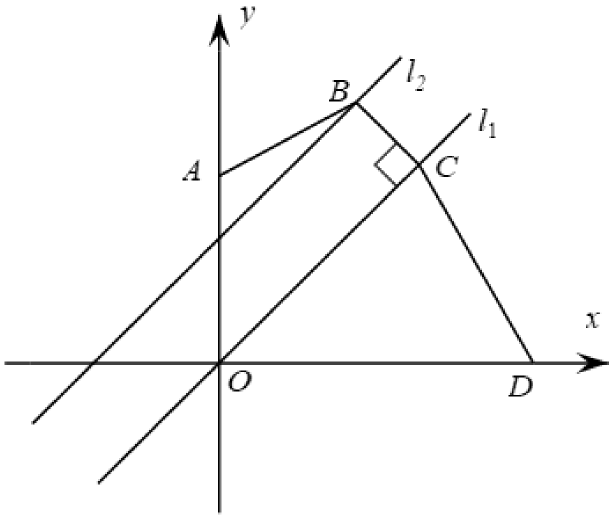
∴$F(-3.4,0)$，

∴$E(-0.4,0)$

故答案为：$(-0.4,0)$．



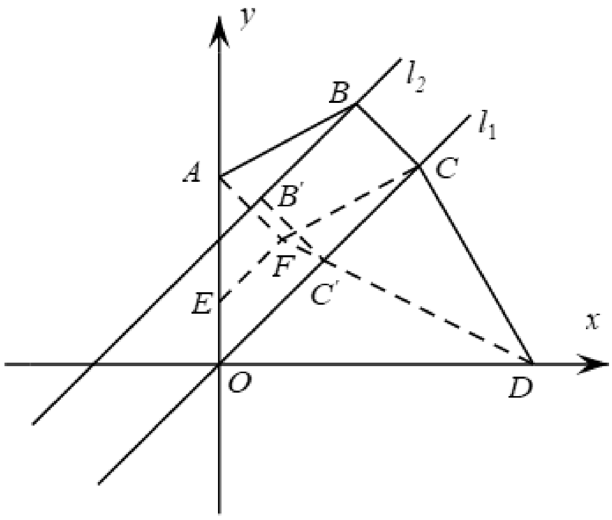
19．如图，在平面直角坐标系中有 $A(0,3)$，$D(5,0)$两点．将直线l_1：$y=x$ 向上平移 2 个单位长度得到直线l_2，点B在直线l_2上，过点B作直线l_1的垂线，垂足为点C，连接AB，BC，CD，则折线$ABCD$的长$AB+BC+CD$的最小值为______．



【答案】$2\sqrt{5}+\sqrt{2}$

【分析】先证四边形 $ABCF$ 是平行四边形，可得 $AB=CF$，则 $AB+BC+CD=CF+\sqrt{2}+CD$，即当点 C，点 D，点 F 三点共线时，$CF+CD$ 有最小值为 DF 的长，即 $AB+BC+CD$ 有最小值，即可求解．

【详解】解：如图，将点A沿 y 轴向下平移2个单位得到 $E(0,1)$，以 AE 为斜边，作等腰直角三角形 AEF，则点 $F(1,2)$，连接 CF，



$\because \triangle AEF$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AF=EF=\sqrt{2}$，$\angle AEF=45°$，

$\because$ 将直线 l_1：$y=x$ 向上平移2个单位长度得到直线 l_2，

$\therefore \angle AOC=45°$，$BC=\sqrt{2}$，

$\therefore BC=AF=\sqrt{2}$，$\angle AEF=\angle AOC=45°$，

$\therefore EF//OC$，

$\because AF\perp EF$，$BC\perp OC$，

$\therefore AF//BC$，

$\therefore$四边形 $ABCF$ 是平行四边形，

$\therefore AB = CF$，

$\therefore AB + BC + CD = CF + \sqrt{2} + CD$，

$\therefore$当点 C，点 D，点 F 三点共线时，$CF + CD$ 有最小值为 DF 的长，即 $AB + BC + CD$ 有最小值，

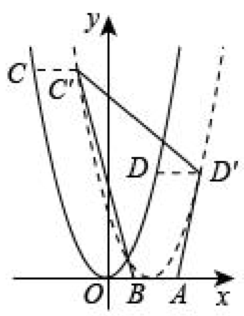
$\because$点 $D(5,0)$，点 $F(1,2)$，

$\therefore DF = \sqrt{(5-1)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{5}$，

$\therefore$折线 $ABCD$ 的长 $AB + BC + CD$ 的最小值为 $2\sqrt{5} + \sqrt{2}$

广西来宾中考真题

20．如图，已知点 $A(3,0)$，$B(1,0)$，两点 $C(-3,9)$，$D(2,4)$ 在抛物线 $y = x^2$ 上，向左或向右平移抛物线后，C，D 的对应点分别为 C'，$D¢$，当四边形 $ABC'D'$ 的周长最小时，抛物线的解析式为__________.



【答案】$y = \left(x - \frac{25}{13}\right)^2$．

【详解】解：$\because A(3,0)$，$B(1,0)$，$C(-3,9)$，$D(2,4)$，

$\therefore AB = 3 - 1 = 2$，$CD = \sqrt{(-3-2)^2 + (9-4)^2} = 5\sqrt{2}$，

由平移的性质可知：$C'D' = CD = 5\sqrt{2}$，

$\therefore$四边形 $ABC'D'$ 的周长为 $AB + BC' + C'D' + D'A = 2 + BC' + 5\sqrt{2} + D'A$；

要使其周长最小，则应使 $BC' + D'A$ 的值最小；

设抛物线平移了 a 个单位，当 $a>0$ 时，抛物线向右平移，当 $a<0$ 时，抛物线向左平移；

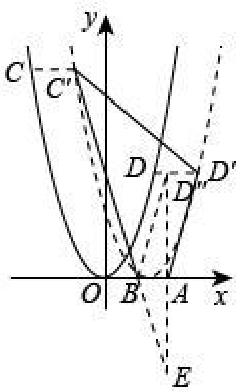
$\therefore C'(-3+a,9)$，$D'(2+a,4)$，

将 D' 向左平移 2 个单位得到 $D''(a,4)$，则由平移的性质可知：$BD'' = AD'$，

将 $D''(a,4)$ 关于 x 轴的对称点记为点 E，则 $E(a,-4)$，由轴对称性质可知，$BD'' = BE$，

$\therefore BC' + D'A = BC' + BE$，

当 B、E、C' 三点共线时，$BC' + BE$ 的值最小，



设直线 BC' 的解析式为：$y=kx+b(k\neq 0)$，

∴ $\begin{cases}(-3+a)k+b=9\\ k+b=0\end{cases}$，当 $a\neq 4$ 时，∴ $\begin{cases}k=\dfrac{9}{a-4}\\ b=\dfrac{9}{4-a}\end{cases}$

∴ $y=\dfrac{9}{a-4}x+\dfrac{9}{4-a}$，

将 E 点坐标代入解析式可得：$-4=\dfrac{9}{a-4}a+\dfrac{9}{4-a}$，

解得：$a=\dfrac{25}{13}$，此时 $BC'+BE=C'E=\sqrt{(-3+a-a)^2+(9+4)^2}=\sqrt{178}$，

此时四边形 $ABC'D'$ 的周长为 $AB+BC'+C'D'+D'A=2+5\sqrt{2}+\sqrt{178}$；

当 $a=4$ 时，$C'(1,9)$，$D'(6,4)$，$A(3,0)$，$B(1,0)$，

此时四边形 $ABC'D'$ 的周长为：

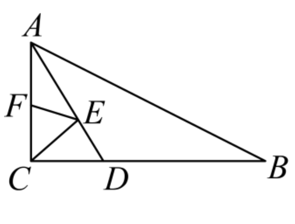
$AB+BC'+C'D'+D'A=2+(9-0)+5\sqrt{2}+\sqrt{(6-3)^2+(4-0)^2}=16+5\sqrt{2}$；

∵ $2+5\sqrt{2}+\sqrt{178}<16+5\sqrt{2}$，

∴当 $a=\dfrac{25}{13}$ 时，其周长最小，所以抛物线向右平移了 $\dfrac{25}{13}$ 个单位，所以其解析式为：$y=\left(x-\dfrac{25}{13}\right)^2$

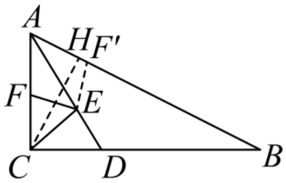
题型四 垂线段最短

21．（2023下·湛江·二模）如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=6$，$BC=8$，$AB=10$，AD 平分 $\angle CAB$ 交 BC 于点 D，点 E、F 分别是 AD、AC 边上的动点，则 $CE+EF$ 的最小值为________.



【答案】$\frac{24}{5}$

【详解】解：如图，在 AB 上取一点 F'，使 $AF'=AF$，连接 EF'，作 $CH\perp AB$，



$\because AD$ 平分 $\angle BAC$，

$\therefore \angle DAC=\angle DAB$，

$\because AE=AE$，

$\therefore \triangle AEF\cong\triangle AEF'(\text{SAS})$，

$\therefore EF=EF'$，

$\therefore CE+EF=CE+EF'$，

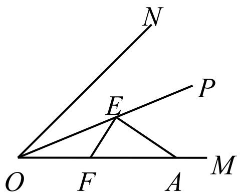
$\therefore$ 当点 C，E，F' 在同一条线上，且 $CE\perp AB$ 时，$CE+EF'$ 最小，即 $CE+EF$ 最小，其值为 CH，

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CH$，

$\therefore CH=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{6\times8}{10}=\frac{24}{5}$，

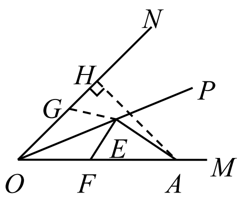
即 $CE+EF$ 的最小值为 $\frac{24}{5}$

22．如图，$\angle MON=45°$，OP 平分 $\angle MON$，点 A 为射线 OM 上一点，$OA=4$，点 E，F 分别为射线 OP，OM 上的动点，连接 AE，EF，则 $AE+EF$ 的最小值为__________.



【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】在 ON 上截取 OG＝OF，连接 EG，过点 A 作 AH⊥ON 于点 H.



∵OG＝OF，∠EOG＝∠EOF，OE＝OE，

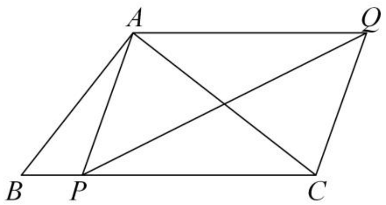
∴△OEG≌△OEF，∴EG＝EF，

∴AE＋EF＝AE＋EG≥AH.

∵∠MON＝45°，OA＝4，∴AH＝$\frac{\sqrt{2}}{2}OA=2\sqrt{2}$.

2022·贵州毕节·中考真题

23．如图，在Rt△ABC中，$\angle BAC=90^\circ, AB=3, BC=5$，点 P 为 BC 边上任意一点，连接 PA，以 PA，PC 为邻边作平行四边形 $PAQC$，连接 PQ，则 PQ 长度的最小值为_________.



【答案】$\frac{12}{5}$

【分析】利用勾股定理得到 BC 边的长度，根据平行四边形的性质，得知 OP 最短即为 PQ 最短，利用垂线段最短得到点 P 的位置，再证明 $\triangle CAB\backsim\triangle CP'O$ 利用对应线段的比得到 OP' 的长度，继而得到 PQ 的长度.

【详解】解：∵ $\angle BAC=90^\circ, AB=3, BC=5$，

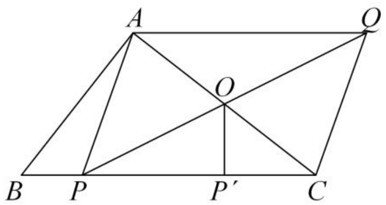
∴ $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=4$，

∵四边形 $APCQ$ 是平行四边形，

∴$PO=QO$，$CO=AO$，

∵PQ 最短也就是 PO 最短，

∴过 O 作 BC 的垂线 OP'，



∵ $\angle ACB=\angle P'CO$ $\angle CP'O=\angle CAB=90^\circ$，

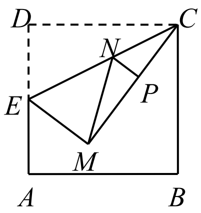
∴ $\triangle CAB\backsim\triangle CP'O$，

∴ $\frac{CO}{BC}=\frac{OP'}{AB}$，

∴ $\frac{2}{5}=\frac{OP'}{3}$，∴ $OP'=\frac{6}{5}$，∴则 PQ 的最小值为 $2OP'=\frac{12}{5}$

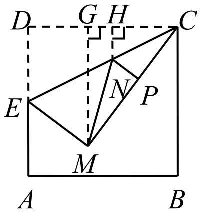
2022 铜仁

24．如图，在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，点 E 为 AD 的中点，将△CDE 沿 CE 翻折得△CME，点 M 落在四边形 $ABCE$ 内，点 N 为线段 CE 上的动点，过点 N 作 $NP/\!/EM$ 交 MC 于点 P，则 $MN+NP$ 的最小值为_________.



【答案】$\frac{8}{5}$

【解析】分别过点 M，N 作 CD 的垂线，垂足为 M，N.



由题意，∠EMC＝∠D＝90°，MC＝DC＝2.

∵NP∥EM，∴∠NPC＝∠EMC＝90°.

∵∠ECM＝∠ECD，∴NP＝NH，

∴MN＋NP＝MN＋NH⩾MG.

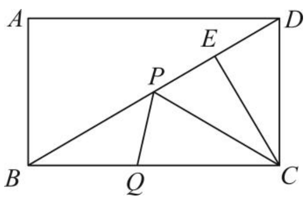
∵点 E 为 AD 的中点，∴tan∠ECD＝$\frac{1}{2}$，

∴由 12345 模型可知 tan∠DCM＝$\frac{4}{3}$，

∴sin∠DCM＝$\frac{4}{5}$，∴MG＝$\frac{4}{5}MC=\frac{8}{5}$，

∴MN＋NP 的最小值为$\frac{8}{5}$.

25．（2023·鸡西·三模）如图，在矩形$ABCD$中，$CE\perp BD$于点E，$AB=2\sqrt{3}$，$BE=3ED$，P、Q分别是BD、BC上的动点，则$PC+PQ$的最小值为________.



【答案】$3\sqrt{3}$

【分析】根据矩形的性质和解直角三角形可得$DE=\sqrt{3}$，利用勾股定理得到$CE=3$，可得$\cos\angle DCE=\frac{\sqrt{3}}{2}$，如图，延长$CE$至点$C'$，使$C'E=CE$，过点$C'$作$C'Q'\perp BC$于点$Q$，$C'Q'$交$BD$于点$P'$，连接$PC'$，可得点$C$和点$C'$关于$BD$对称，根据垂线段最短可得$PC+PQ$的最小值为$C'Q'$，然后在$\text{Rt}\triangle CC'Q'$中，利用$C'Q'=CC'\cdot\cos\angle DCE$，即可得出答案.

【详解】解：∵在矩形$ABCD$中，$CE\perp BD$，$AB=2\sqrt{3}$，$BE=3CD$，

$\therefore CD=AB=2\sqrt{3}$，$\angle BCD=\angle CED=\angle CEB=90°$，$BE=3ED$，

$\because \angle DBC+\angle BDC=90°$，$\angle DCE+\angle BDC=90°$，$BD=4ED$，

$\therefore \angle DBC=\angle DCE$，

$\therefore \dfrac{DE}{CD}=\sin\angle DCE=\sin\angle DBC=\dfrac{CD}{BD}$，

$\therefore DE\cdot BD=CD^2$，

$\therefore DE\cdot 4DE=\left(2\sqrt{3}\right)^2$，

解得：$DE=\sqrt{3}$ 或 $DE=-\sqrt{3}$（负值不符合题意，舍去），

$\therefore CE=\sqrt{CD^2-DE^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=3$，

$\therefore \cos\angle DCE=\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

如图，延长 CE 至点 C'，使 $C'E=CE$，过点 C' 作 $C'Q'\perp BC$ 于点 Q，$C'Q'$ 交 BD 于点 P'，连接 PC'，

$\because CE\perp BD$，

$\therefore$ 点 C 和点 C' 关于 BD 对称，

$\therefore PC=PC'$，$P'C=P'C'$，

$\therefore PC+PQ=PC'+PQ\ge C'Q'$，

$\therefore PC+PQ\ge C'Q'$，当点 C'，P'，Q 共线时，$PC+PQ$ 的最小值为 $C'Q'$，

$\because C'Q'\perp BC$，$DC\perp BC$，

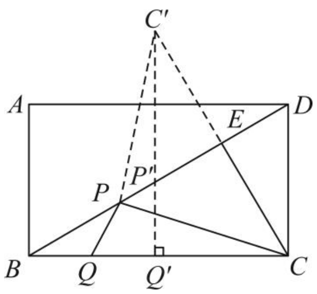
$\therefore C'Q'\parallel DC$，

$\therefore \angle CC'Q'=\angle DCE$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle CC'Q'$ 中，$CC'=2CE=6$，

$\therefore C'Q'=CC'\cdot\cos\angle DCE=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，

故答案为：$3\sqrt{3}$．



26．如图 1，在 Rt△ABC 中，∠ACB＝90°，AC＝2，BC＝4，点 D，E 分别是 AC，BC 的中点，连接 DE，将△DEC 绕点 C 旋转，在旋转过程中，直线 AD 与 BE 相交于点 H，如图 2，则 AH 的最大值为_________．

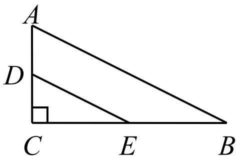


图 1

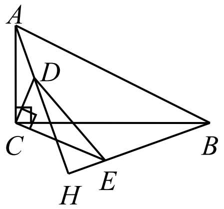


图 2

【答案】$\frac{8}{5}$

【解析】如图 1，过点 C 作直线 BH 的垂线，垂足为 G.

则 $CG \leqslant CE$，$\sin\angle CBH = \frac{CG}{BC} \leqslant \frac{CD}{BC} = \frac{1}{2}$，

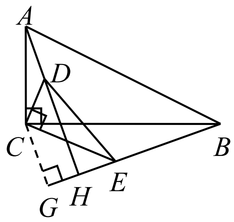


图 1

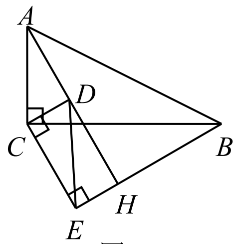


图 2

∴ $\angle CBH \leqslant 30°$，∴当 $\angle CBH$ 为 $30°$时，$\angle ABH$ 最大.

∵ $\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{EC} = \frac{1}{2}$，$\angle ACD = \angle BCE = 90° - \angle BCD$，

∴ $\triangle ACD \backsim \triangle BCE$，∴ $\angle CAH = \angle CBH$，

∴ $\angle AHB = \angle ACB = 90°$，

∴ $AH = AB \cdot \sin\angle ABH$，∴此时 AH 最大.

如图 2，此时 $CE \perp BE$，$\angle DCE = \angle CEH = \angle DHE = 90°$，

∴四边形 $CDHE$ 是矩形，∴ $\angle CDH = 90°$，$DH = CE = \frac{1}{2}BC = 2$，

∴ $\angle ADC = 90°$，$AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{3}$，

∴ AH 的最大值为 $2 + \sqrt{3}$.

题型五　相对运动平移型将军饮马

27．如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB = 15$，$BC = 20$，把边 AB 沿对角线 BD 平移，点 A'，B' 分别对应点 A，B，$A'C + B'C$ 的最小值为______.