

江苏省无锡市市北高中 2024 届高三一诊考试数学试卷

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

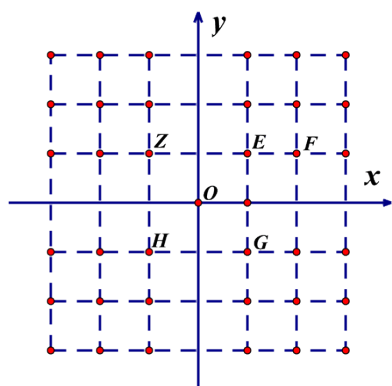
1. 一个盒子里有 4 个分别标有号码为 1, 2, 3, 4 的小球，每次取出一个，记下它的标号后再放回盒子中，共取 3 次，则取得小球标号最大值是 4 的取法有（ ）

A. 17 种 B. 27 种 C. 37 种 D. 47 种

2. 设点 $A(t, 0)$, P 为曲线 $y = e^x$ 上动点，若点 A, P 间距离的最小值为 $\sqrt{6}$ ，则实数 t 的值为（ ）

A. $\sqrt{5}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $2 + \frac{\ln 2}{2}$ D. $2 + \frac{\ln 3}{2}$

3. 若 i 为虚数单位，网格纸上小正方形的边长为 1，图中复平面内点 Z 表示复数 z ，则表示复数 $\frac{2i}{z}$ 的点是（ ）



A. E B. F C. G D. H

4. 已知条件 $p: a = -1$ ，条件 q : 直线 $x - ay + 1 = 0$ 与直线 $x + a^2y - 1 = 0$ 平行，则 p 是 q 的（ ）

A. 充要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件

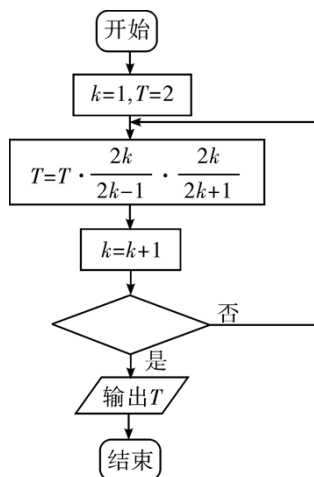
5. 若 $z = \frac{i^{2020} + 3i}{1 + i}$ ，则 z 的虚部是（ ）

A. i B. $2i$ C. -1 D. 1

6. 历史上有不少数学家都对圆周率作过研究，第一个用科学方法寻求圆周率数值的人是阿基米德，他用圆内接和外切正多边形的周长确定圆周长的上下界，开创了圆周率计算的几何方法，而中国数学家刘徽只用圆内接正多边形就求得 π 的近似值，他的方法被后人称为割圆术。近代无穷乘积式、无穷连分数、无穷级数等各种 π 值的表达式纷纷出现，使得 π 值的计算精度也迅速增加。华理斯在 1655 年求出一个公式：

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times L}{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times L}$$

，根据该公式绘制出了估计圆周率 π 的近似值的程序框图，如下图所示，执行该程序框图，已知输出的 $T > 2.8$ ，若判断框内填入的条件为 $k \geq m?$ ，则正整数 m 的最小值是

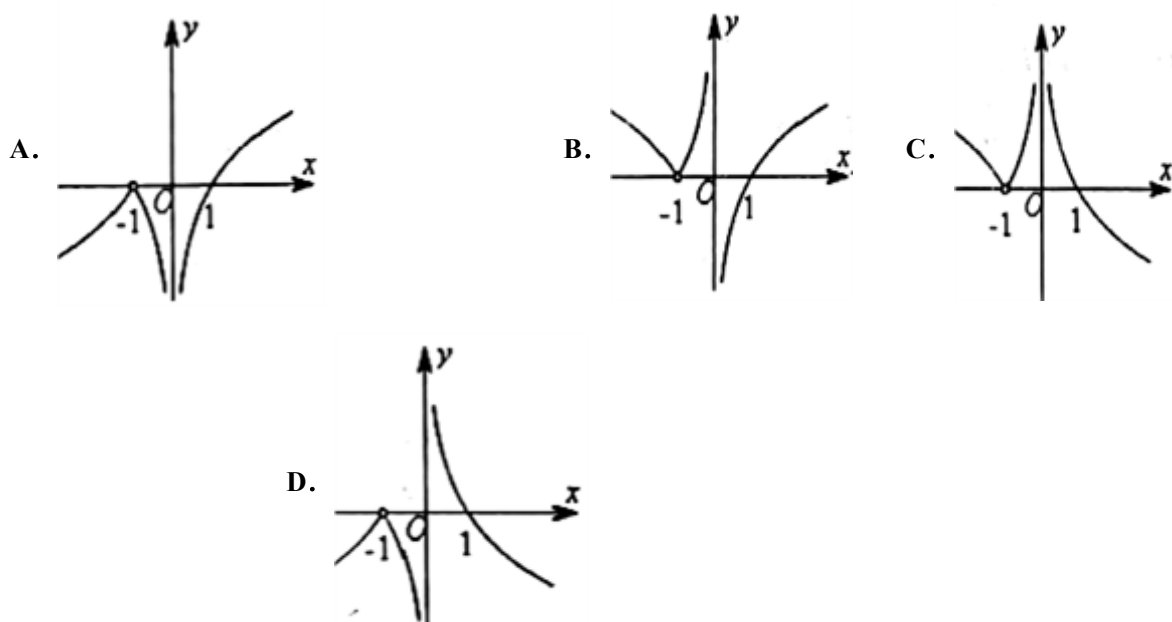


- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

7. 设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = \log_2(x+1) + ax^2 - a + 1$ (a 为常数)，则不等式 $f(3x+4) > -5$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, +\infty)$ C. $(-\infty, -2)$ D. $(-2, +\infty)$

8. 函数 $f(x) = \frac{x+1}{|x+1|} \log_a |x|$ ($0 < a < 1$) 的图象的大致形状是 ()



9. 已知 $2^a = 3^b = 6$ ，则 a, b 不可能满足的关系是 ()

- A. $a+b=ab$ B. $a+b > 4$ C. $(a-1)^2 + (b-1)^2 < 2$ D. $a^2 + b^2 > 8$

10. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ，集合 $B = \{x | x - 1 \geq 0\}$ ，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A \cap B) =$ () .

A. $(-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$

B. $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

C. $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

D. $(1, 3)$

11. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 10x + 1, & x \leq 0 \\ |lgx|, & x > 0 \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = a (a \in R)$ 有四个实数解 $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 其中

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则 $(x_1 + x_2)(x_3 - x_4)$ 的取值范围是 ()

A. $(0, 101]$

B. $(0, 99]$

C. $(0, 100]$

D. $(0, +\infty)$

12. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \theta)$, 其中 $\omega > 0$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 对满足 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$

的 x_1, x_2 , 有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$, 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象, 则函数 $g(x)$ 的单调递减区间是 ()

A. $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in Z)$

B. $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in Z)$

C. $\left[k\pi + \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{5\pi}{6}\right] (k \in Z)$

D. $\left[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12}\right] (k \in Z)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $(1+2x)^{11} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10} + a_{11}x^{11}$, 则 $a_1 - 2a_2 + \dots - 10a_{10} + 11a_{11} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 根据记载, 最早发现勾股定理的人应是我国西周时期的数学家商高, 商高曾经和周公讨论过“勾 3 股 4 弦 5”的问题. 现有 $\triangle ABC$ 满足“勾 3 股 4 弦 5”, 其中“股” $AB = 4$, D 为“弦” BC 上一点 (不含端点), 且 $\triangle ABD$ 满足勾股定理, 则 $(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, 直线 l 与圆 O 交于 P, Q 两点, $A(2, 2)$, 若 $AP^2 + AQ^2 = 40$, 则弦 PQ 的长度的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 函数 $f(x) = e^x - x - b$ (e 为自然对数的底数, $b \in R$), 若函数 $g(x) = f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)$ 恰有 4 个零点, 则实数 b 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 若函数 $f(x) = e^x - ae^{-x} - mx (m \in R)$ 为奇函数, 且 $x = x_0$ 时 $f(x)$ 有极小值 $f(x_0)$.

(1) 求实数 a 的值与实数 m 的取值范围;

(2) 若 $f(x_0) \geq -\frac{2}{e}$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

18. (12分) 已知点 $B(0, -2)$ 和椭圆 $M: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$. 直线 $l: y = kx + 1$ 与椭圆 M 交于不同的两点 P, Q .

(1) 当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 求 $\triangle PBQ$ 的面积;

(2) 设直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 C , 当 C 为 PB 中点时, 求 k 的值.

19. (12分) 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\cos\theta$.

(1) 求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设点 $P(\frac{1}{2}, 0)$, 直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 求 $|PA| + |PB|$ 的值.

20. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ ($n \in N^*$), 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{n(b_1 + b_n)}{2}$, ($n \in N^*$),

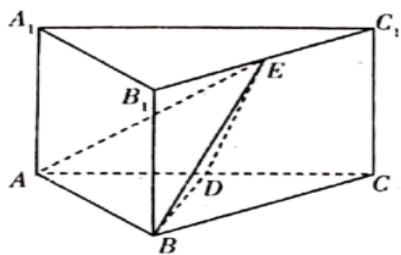
且 $b_1 = 1, b_2 = 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(3) 设 $c_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n \cdot b_{n+1}}$, 记 T_n 是数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 求正整数 m , 使得对于任意的 $n \in N^*$ 均有 $T_m \geq T_n$.

21. (12分) 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = BC = AA_1 = 1, AC = \sqrt{3}$, 点 D, E 分别为 AC 和 B_1C_1 的中点.



(I) 棱 AA_1 上是否存在点 P 使得平面 $PBD \perp$ 平面 ABE ? 若存在, 写出 PA 的长并证明你的结论; 若不存在, 请说明理由.

(II) 求二面角 $A - BE - D$ 的余弦值.

22. (10分) 已知 $f(x) = a - |x - b|$ ($a > 0$), 且 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $\{x | -3 \leq x \leq 7\}$.

(1) 求实数 a, b 的值;

(2) 若 $f(x)$ 的图像与直线 $x=0$ 及 $y=m(m<3)$ 围成的四边形的面积不小于 14, 求实数 m 取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

由于是放回抽取,故每次的情况有 4 种,共有 64 种, 先找到最大值不是 4 的情况,即三次取出标号均不为 4 的球的情况,进而求解.

【详解】

所有可能的情况有 $4^3 = 64$ 种,其中最大值不是 4 的情况有 $3^3 = 27$ 种,所以取得小球标号最大值是 4 的取法有

$64 - 27 = 37$ 种,

故选:C

【点睛】

本题考查古典概型,考查补集思想的应用,属于基础题.

2、C

【解析】

设 $P(x, e^x)$, 求 $|AP|^2$, 作为 x 的函数, 其最小值是 6, 利用导数知识求 $|AP|^2$ 的最小值.

【详解】

设 $P(x, e^x)$, 则 $|AP|^2 = (x-t)^2 + e^{2x}$, 记 $g(x) = e^{2x} + (x-t)^2$,

$g'(x) = 2e^{2x} + 2(x-t)$, 易知 $g'(x) = 2e^{2x} + 2(x-t)$ 是增函数, 且 $g'(x)$ 的值域是 R ,

$\therefore g'(x) = 0$ 的唯一解 x_0 , 且 $x < x_0$ 时, $g'(x) < 0$, $x > x_0$ 时, $g'(x) > 0$, 即 $g(x)_{\min} = g(x_0)$,

由题意 $g(x_0) = e^{2x_0} + (x_0 - t)^2 = 6$, 而 $g'(x_0) = 2e^{2x_0} + 2(x_0 - t) = 0$, $x_0 - t = -e^{2x_0}$,

$\therefore e^{2x_0} + e^{4x_0} = 6$, 解得 $e^{2x_0} = 2$, $x_0 = \frac{\ln 2}{2}$.

$$\therefore t = e^{2x_0} + x_0 = 2 + \frac{\ln 2}{2}.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查导数的应用，考查用导数求最值．解题时对 x_0 和 t 的关系的处理是解题关键．

3、C

【解析】

由于在复平面内点 Z 的坐标为 $(-1,1)$ ，所以 $z = -1 + i$ ，然后将 $z = -1 + i$ 代入 $\frac{2i}{z}$ 化简后可找到其对应的点．

【详解】

由 $z = -1 + i$ ，所以 $\frac{2i}{z} = \frac{2i}{-1+i} = i(-1-i) = 1-i$ ，对应点 G ．

故选：C

【点睛】

此题考查的是复数与复平面内点的对应关系，复数的运算，属于基础题．

4、C

【解析】

先根据直线 $x - ay + 1 = 0$ 与直线 $x + a^2y - 1 = 0$ 平行确定 a 的值，进而即可确定结果．

【详解】

因为直线 $x - ay + 1 = 0$ 与直线 $x + a^2y - 1 = 0$ 平行，

所以 $a^2 + a = 0$ ，解得 $a = 0$ 或 $a = -1$ ；即 q ： $a = 0$ 或 $a = -1$ ；

所以由 p 能推出 q ； q 不能推出 p ；

即 p 是 q 的充分不必要条件．

故选 C

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判定，熟记概念即可，属于基础题型．

5、D

【解析】

通过复数的乘除运算法则化简求解复数为： $a + bi$ 的形式，即可得到复数的虚部．

【详解】

由题可知 $z = \frac{i^{2020} + 3i}{1+i} = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+2i-3i^2}{1-i^2} = 2+i$,

所以 z 的虚部是 1.

故选: D.

【点睛】

本题考查复数的代数形式的混合运算, 复数的基本概念, 属于基础题.

6、B

【解析】

初始: $k=1$, $T=2$, 第一次循环: $T=2 \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3} < 2.8$, $k=2$, 继续循环;

第二次循环: $T = \frac{8}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{128}{45} > 2.8$, $k=3$, 此时 $T > 2.8$, 满足条件, 结束循环,

所以判断框内填入的条件可以是 $k \geq 3$?, 所以正整数 m 的最小值是 3, 故选 B.

7、D

【解析】

由 $f(0)=0$ 可得 $a=1$, 所以 $f(x) = \log_2(x+1) + x^2 (x \geq 0)$, 由 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数结合增函数+增函数=增函数, 可知 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 注意到 $f(-2) = -f(2) = -5$, 再利用函数单调性即可解决.

【详解】

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数, 所以 $f(0)=0$, 解得 $a=1$, 所以当 $x \geq 0$ 时,

$f(x) = \log_2(x+1) + x^2$, 且 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x)$ 单调递增, 所以

$y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 因为 $f(2)=5$, $f(-2)=-5$,

故有 $3x+4 > -2$, 解得 $x > -2$.

故选: D.

【点睛】

本题考查利用函数的奇偶性、单调性解不等式, 考查学生对函数性质的灵活运用能力, 是一道中档题.

8、C

【解析】

对 x 分类讨论, 去掉绝对值, 即可作出图象.

【详解】

$$f(x) = \frac{x+1}{|x+1|} \log_a |x| = \begin{cases} -\log_a(-x), & x < -1, \\ \log_a(-x), & -1 < x < 0, \\ \log_a x, & x > 0. \end{cases}$$

故选 C.

【点睛】

识图常用的方法

(1)定性分析法：通过对问题进行定性的分析，从而得出图象的上升(或下降)的趋势，利用这一特征分析解决问题；

(2)定量计算法：通过定量的计算来分析解决问题；

(3)函数模型法：由所提供的图象特征，联想相关函数模型，利用这一函数模型来分析解决问题.

9、C

【解析】

根据 $2^a = 3^b = 6$ 即可得出 $a = 1 + \log_2 3$, $b = 1 + \log_3 2$, 根据 $\log_2 3 \cdot \log_3 2 = 1$, $\log_3 2 + \log_3 2 > 2$, 即可判断出结果.

【详解】

$$\because 2^a = 3^b = 6;$$

$$\therefore a = \log_2 6 = 1 + \log_2 3, \quad b = \log_3 6 = 1 + \log_3 2;$$

$$\therefore a + b = 2 + \log_2 3 + \log_3 2 > 4, \quad ab = 2 + \log_2 3 + \log_3 2 > 4, \quad \text{故 } A, B \text{ 正确};$$

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 = (\log_2 3)^2 + (\log_3 2)^2 > 2 \log_2 3 \cdot \log_3 2 = 2, \quad \text{故 } C \text{ 错误};$$

$$\begin{aligned} \because a^2 + b^2 &= 2 + 2(\log_2 3 + \log_3 2) + (\log_2 3)^2 + (\log_3 2)^2 \\ &> 2 + 4\sqrt{\log_2 3 \cdot \log_3 2} + 2 \log_2 3 \cdot \log_3 2 = 8, \quad \text{故 } D \text{ 正确} \end{aligned}$$

故 C.

【点睛】

本题主要考查指数式和对数式的互化，对数的运算，以及基本不等式： $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ 和不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 的应用，属于中档题

10、A

【解析】

算出集合 A、B 及 $A \cap B$ ，再求补集即可.

【详解】

由 $x^2 - 2x - 3 < 0$ ，得 $-1 < x < 3$ ，所以 $A = \{x \mid -1 < x < 3\}$ ，又 $B = \{x \mid x \geq 1\}$ ，

所以 $A \cap B = \{x \mid 1 \leq x < 3\}$ ，故 $\complement_{\mathbb{R}}(A \cap B) = \{x \mid x < 1 \text{ 或 } x \geq 3\}$ 。

故选：A.

【点睛】

本题考查集合的交集、补集运算，考查学生的基本运算能力，是一道基础题.

11、B

【解析】

画出函数图像，根据图像知： $x_1 + x_2 = -10$ ， $x_3 x_4 = 1$ ， $\frac{1}{10} \leq x_3 < 1$ ，计算得到答案.

【详解】

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 10x + 1, & x \leq 0 \\ |\lg x|, & x > 0 \end{cases}$ ，画出函数图像，如图所示：

根据图像知： $x_1 + x_2 = -10$ ， $\lg x_3 = -\lg x_4$ ，故 $x_3 x_4 = 1$ ，且 $\frac{1}{10} \leq x_3 < 1$ 。

故 $(x_1 + x_2)(x_3 - x_4) = -10 \left(x_3 - \frac{1}{x_3} \right) \in (0, 99]$ 。

故选：B.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/148132006006006063>