

湖南省武冈二中 2023-2024 学年高三最后一模数学试题

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，且 a_1 ， a_3 ， a_2 成等差数列，则公比 q 的值为（ ）

- A. $-\frac{1}{2}$ B. -2 C. -1 或 $\frac{1}{2}$ D. 1 或 $-\frac{1}{2}$

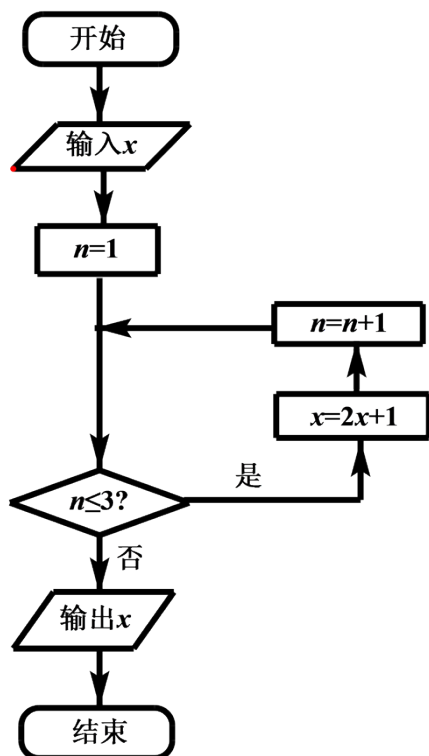
2. 若 $(x^2 + a)\left(\frac{1}{x} - 1\right)^5$ 的展开式中的常数项为 -12 ，则实数 a 的值为（ ）

- A. -2 B. -3 C. 2 D. 3

3. 甲乙丙丁四人中，甲说：我年纪最大，乙说：我年纪最大，丙说：乙年纪最大，丁说：我不是年纪最大的，若这四人中只有一个人说的是真话，则年纪最大的是（ ）

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

4. 当输入的实数 $x \in [2, 30]$ 时，执行如图所示的程序框图，则输出的 x 不小于 103 的概率是（ ）



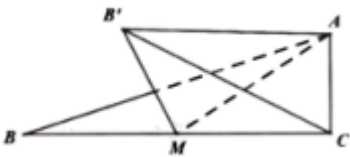
- A. $\frac{9}{14}$ B. $\frac{5}{14}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{9}{28}$

5. 记递增数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $a_1 = 1, a_9 = 9$, 且对 $\{a_n\}$ 中的任意两项 a_i 与 a_j ($1 \leq i < j \leq 9$), 其和

$a_i + a_j$, 或其积 $a_i a_j$, 或其商 $\frac{a_j}{a_i}$ 仍是该数列中的项, 则 ()

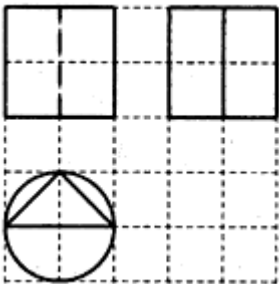
- A. $a_5 > 3, S_9 < 36$
- B. $a_5 > 3, S_9 > 36$
- C. $a_6 > 3, S_9 > 36$
- D. $a_6 > 3, S_9 < 36$

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M 是边 BC 的中点, 将 $\triangle ABC$ 沿着 AM 翻折成 $\triangle AB'C$, 且点 B' 不在平面 ABC 内, 点 P 是线段 $B'C$ 上一点. 若二面角 $B'-AM-C$ 与二面角 $B'-PM-C$ 的平面角相等, 则直线 AP 经过 $\triangle AB'C$ 的 ()



- A. 重心
- B. 垂心
- C. 内心
- D. 外心

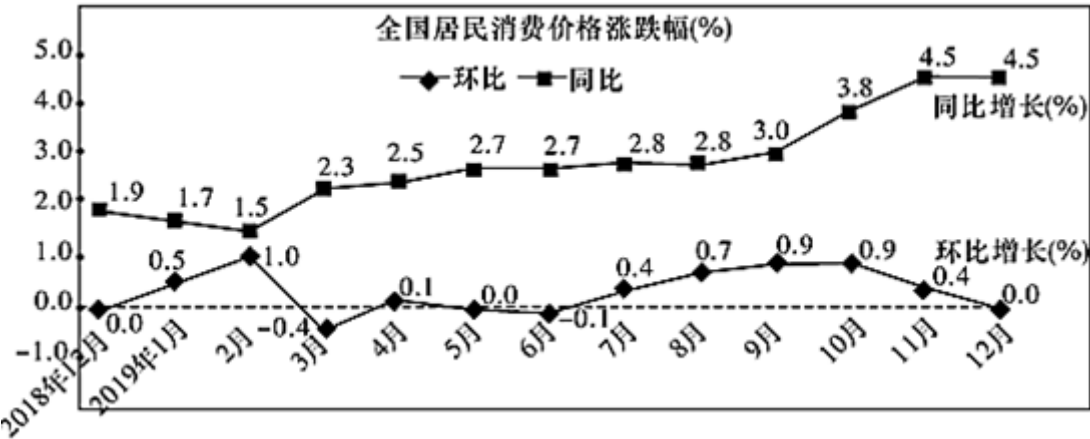
7. 一个组合体的三视图如图所示 (图中网格小正方形的边长为 1), 则该几何体的体积是 ()



- A. $2\pi - \frac{1}{2}$
- B. $2\pi - 1$
- C. $2\pi - 2$
- D. $2\pi - 4$

8. 如图是国家统计局于 2020 年 1 月 9 日发布的 2018 年 12 月到 2019 年 12 月全国居民消费价格的涨跌幅情况折线图.

(注: 同比是指本期与同期作对比; 环比是指本期与上期作对比. 如: 2019 年 2 月与 2018 年 2 月相比较称同比, 2019 年 2 月与 2019 年 1 月相比较称环比) 根据该折线图, 下列结论错误的是 ()



- A. 2019 年 12 月份，全国居民消费价格环比持平
- B. 2018 年 12 月至 2019 年 12 月全国居民消费价格环比均上涨
- C. 2018 年 12 月至 2019 年 12 月全国居民消费价格同比均上涨
- D. 2018 年 11 月的全国居民消费价格高于 2017 年 12 月的全国居民消费价格

9. 已知复数 z 满足 $z \cdot (1+2i) = 5$ (i 为虚数单位)，则在复平面内复数 z 对应的点位于()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

10. 2019 年某校迎国庆 70 周年歌咏比赛中，甲乙两个合唱队每场比赛得分的茎叶图如图所示（以十位数字为茎，个位数字为叶）.若甲队得分的中位数是 86，乙队得分的平均数是 88，则 $x+y =$ ()

甲				乙		
8	8	7	8			
8	2	x	8	2	y	9
7	6		9	1	3	7

- A. 170 B. 10 C. 172 D. 12

11. 要得到函数 $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，只需将函数 $y = 2\cos 2x$ 的图象

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
- B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
- C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度
- D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

12. 定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数 $f(x)$ 满足任意 $x \in \mathbf{R}$ ，有 $f(x+2) = f(x) - f(1)$ ，且当 $x \in [2, 3]$ 时，

$f(x) = -2x^2 + 12x - 18$.若函数 $y = f(x) - \log_a(x+1)$ 至少有三个零点，则 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ B. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ C. $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ D. $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知点 P 是直线 $l: x = y + 1$ 上的动点，点 Q 是抛物线 $C: y = x^2$ 上的动点.设点 M 为线段 PQ 的中点， O 为原点，则 $|OM|$ 的最小值为_____.

14. 在等差数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 中，若 $a_1 = a_2 + a_4$ ， $a_8 = -3$ ，则 a_{20} 的值是_____.

15. 将底面直径为 4, 高为 $\sqrt{3}$ 的圆锥形石块打磨成一个圆柱, 则该圆柱的侧面积的最大值为_____.

16. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1 (m > 0, n > 0)$ 有相同的焦点 F_1, F_2 , 其中 F_1 为左焦点. 点 P 为两曲线在第一象限的交点, e_1, e_2 分别为曲线 C_1, C_2 的离心率, 若 $\triangle PF_1F_2$ 是以 PF_1 为底边的等腰三角形, 则 $e_2 - e_1$ 的取值范围为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $c = 4\sqrt{2}$, $\cos C = \frac{3}{5}$.

(1) 若 $B = \frac{\pi}{4}$, 求 a 的值;

(2) 若 $b = 5$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12 分) 如图, 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA = AB = \sqrt{2}$, 点 M, N 分别在线段 PA, BD 上, $BN = \frac{1}{3}BD$.

(1) 若 $PM = \frac{1}{3}PA$, 求证: $MN \perp AD$;

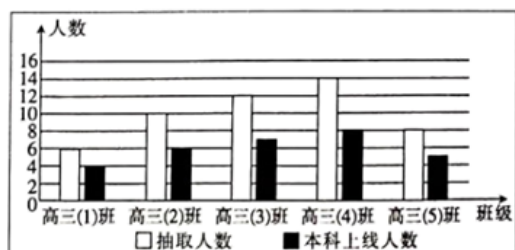
(2) 若二面角 $M-BD-A$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$, 求线段 MN 的长.

19. (12 分) 设函数 $f(x) = \left| \frac{1}{2}x + 1 \right| + |x - 1|$ ($x \in \mathbf{R}$) 的最小值为 m .

(1) 求 m 的值;

(2) 若 a, b, c 为正实数, 且 $\frac{1}{ma} + \frac{1}{2mb} + \frac{1}{3mc} = \frac{2}{3}$, 证明: $\frac{a}{9} + \frac{2b}{9} + \frac{c}{3} \geq 1$.

20. (12 分) 某省新课改后某校为预测 2020 届高三毕业班的本科上线情况, 从该校上一届高三 (1) 班到高三 (5) 班随机抽取 50 人, 得到各班抽取的人数和其中本科上线人数, 并将抽取数据制成下面的条形统计图.



- (1) 根据条形统计图，估计本届高三学生本科上线率.
- (2) 已知该省甲市 2020 届高考考生人数为 4 万，假设以 (1) 中的本科上线率作为甲市每个考生本科上线的概率.
- (i) 若从甲市随机抽取 10 名高三学生，求恰有 8 名学生达到本科线的概率 (结果精确到 0.01);
- (ii) 已知该省乙市 2020 届高考考生人数为 3.6 万，假设该市每个考生本科上线率均为 $p(0 < p < 1)$ ，若 2020 届高考本科上线人数乙市的均值不低于甲市，求 p 的取值范围.

可能用到的参考数据：取 $0.36^4 = 0.0168$ ， $0.16^4 = 0.0007$.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + 2(a-3)x + 2a \ln x$ ，其中 $a \in R$.

- (1) 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与直线 $x-2y+1=0$ 垂直，求实数 a 的值;
- (2) 若函数 $f(x)$ 在定义域上有两个极值点 x_1, x_2 ，且 $x_1 < x_2$.

①求实数 a 的取值范围;

②求证： $f(x_1) + f(x_2) + 10 > 0$.

22. (10 分) 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的左, 右焦点, 点 $P(-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 在椭圆 E 上, 且抛物线

$y^2 = 4x$ 的焦点是椭圆 E 的一个焦点.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 过点 F_2 作不与 x 轴重合的直线 l , 设 l 与圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 相交于 A, B 两点, 且与椭圆 E 相交于 C, D 两点,

当 $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_1B} = 1$ 时, 求 ΔF_1CD 的面积.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

由 a_1, a_3, a_2 成等差数列得 $2a_3 = a_1 + a_2$ ，利用等比数列的通项公式展开即可得到公比 q 的方程.

【详解】

由题意 $2a_3 = a_1 + a_2$, $\therefore 2a_1 q^2 = a_1 q + a_1$, $\therefore 2q^2 = q + 1$, $\therefore q = 1$ 或 $q = -\frac{1}{2}$

故选: D.

【点睛】

本题考查等差等比数列的综合, 利用等差数列的性质建立方程求 q 是解题的关键, 对于等比数列的通项公式也要熟练.

2、C

【解析】

先研究 $\left(\frac{1}{x} - 1\right)^5$ 的展开式的通项, 再分 $(x^2 + a)$ 中, 取 x^2 和 a 两种情况求解.

【详解】

因为 $\left(\frac{1}{x} - 1\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = (-1)^r C_5^r x^{r-5}$,

所以 $(x^2 + a)\left(\frac{1}{x} - 1\right)^5$ 的展开式中的常数项为: $x^2 (-1)^3 C_5^3 x^{-2} + a C_5^0 (-1) = -10 - a = -12$,

解得 $a = 2$,

故选: C.

【点睛】

本题主要考查二项式定理的通项公式, 还考查了运算求解的能力, 属于基础题.

3、C

【解析】

分别假设甲乙丙丁说的是真话, 结合其他人的说法, 看是否只有一个说的是真话, 即可求得年纪最大者, 即可求得答案.

【详解】

①假设甲说的是真话, 则年纪最大的是甲, 那么乙说谎, 丙也说谎, 而丁说的是真话, 而已知只有一个人说的是真话, 故甲说的不是真话, 年纪最大的不是甲;

②假设乙说的是真话, 则年纪最大的是乙, 那么甲说谎, 丙说真话, 丁也说真话, 而已知只有一个人说的是真话, 故乙说谎, 年纪最大的也不是乙;

③假设丙说的是真话, 则年纪最大的是乙, 所以乙说真话, 甲说谎, 丁说的是真话, 而已知只有一个人说的是真话, 故丙在说谎, 年纪最大的也不是乙;

④假设丁说的是真话，则年纪最大的不是丁，而已知只有一个人说的是真话，那么甲也说谎，说明甲也不是年纪最大的，同时乙也说谎，说明乙也不是年纪最大的，年纪最大的只有一人，所以只有丙才是年纪最大的，故假设成立，年纪最大的是丙。

综上所述，年纪最大的是丙

故选：C.

【点睛】

本题考查合情推理，解题时可从一种情形出发，推理出矛盾的结论，说明这种情形不会发生，考查了分析能力和推理能力，属于中档题.

4、A

【解析】

根据循环结构的运行，直至不满足条件退出循环体，求出 x 的范围，利用几何概型概率公式，即可求出结论.

【详解】

程序框图共运行 3 次，输出的 x 的范围是 $[23, 247]$ ，

所以输出的 x 不小于 103 的概率为 $\frac{247-103}{247-23} = \frac{144}{224} = \frac{9}{14}$.

故选:A.

【点睛】

本题考查循环结构输出结果、几何概型的概率，模拟程序运行是解题的关键，属于基础题.

5、D

【解析】

由题意可得 $a_5 = \frac{a_9}{a_5}$ ，从而得到 $a_5 = 3$ ，再由 $a_5 = 3$ 就可以得出其它各项的值，进而判断出 S_9 的范围.

【详解】

解：Q $a_i + a_j$ ，或其积 $a_i a_j$ ，或其商 $\frac{a_j}{a_i}$ 仍是该数列中的项，

$\therefore a_2 + a_9$ 或者 $a_2 a_9$ 或者 $\frac{a_9}{a_2}$ 是该数列中的项，

又Q 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，

$\therefore a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_9$ ，

$\therefore a_2 + a_9 > a_9$ ， $a_2 a_9 > a_9$ ，只有 $\frac{a_9}{a_2}$ 是该数列中的项，

同理可以得到 $\frac{a_9}{a_3}$ ， $\frac{a_9}{a_4}$ ， $\dots$ ， $\frac{a_9}{a_8}$ 也是该数列中的项，且有 $a_1 < \frac{a_9}{a_8} < \frac{a_9}{a_7} < \dots < \frac{a_9}{a_2} < a_9$ ，

$$\therefore a_5 = \frac{a_9}{a_5}, \therefore a_5 = 3 \text{ 或 } a_5 = -3 \text{ (舍)}, \therefore a_6 > 3,$$

根据 $a_1 = 1$, $a_5 = 3$, $a_9 = 9$,

同理易得 $a_2 = 3^{\frac{1}{4}}$, $a_3 = 3^{\frac{1}{2}}$, $a_4 = 3^{\frac{3}{4}}$, $a_6 = 3^{\frac{5}{4}}$, $a_7 = 3^{\frac{3}{2}}$, $a_8 = 3^{\frac{7}{4}}$,

$$\therefore S_9 = a_1 + a_2 + \dots + a_9 = \frac{1 - 3^{\frac{9}{4}}}{1 - 3^{\frac{1}{4}}} < 36,$$

故选：D.

【点睛】

本题考查数列的新定义的理解和运用，以及运算能力和推理能力，属于中档题.

6、A

【解析】

根据题意 $\square$ 到两个平面的距离相等，根据等体积法得到 $\square_{\square\square\square\square} = \square_{\square\square\square\square}$ ，得到答案.

【详解】

二面角 $\square - \square\square - \square'$ 与二面角 $\square - \square\square - \square$ 的平面角相等，故 $\square$ 到两个平面的距离相等.

故 $\square_{\square-\square\square\square\square} = \square_{\square-\square\square\square\square}$ ，即 $\square_{\square-\square\square\square\square} = \square_{\square-\square\square\square\square}$ ，两三棱锥高相等，故 $\square_{\square\square\square\square} = \square_{\square\square\square\square}$ ，

故 $\square'\square = \square\square$ ，故 $\square$ 为 $\square\square'$ 中点.

故选： $\square$.

【点睛】

本题考查了二面角，等体积法，意在考查学生的计算能力和空间想象能力.

7、C

【解析】

根据组合几何体的三视图还原出几何体，几何体是圆柱中挖去一个三棱柱，从而解得几何体的体积.

【详解】

由几何体的三视图可得，

几何体的结构是在一个底面半径为 1 的圆、高为 2 的圆柱中挖去一个底面腰长为 $\sqrt{2}$ 的等腰直角三角形、高为 2 的棱柱，

故此几何体的体积为圆柱的体积减去三棱柱的体积，

$$\text{即 } V = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = 2\pi - 2,$$

故选 C.

【点睛】

本题考查了几何体的三视图问题、组合几何体的体积问题，解题的关键是要能由三视图还原出组合几何体，然后根据几何体的结构求出其体积.

8、D

【解析】

先对图表数据的分析处理，再结简单的合情推理一一检验即可

【详解】

由折线图易知 A 、 C 正确；2019 年 3 月份及 6 月份的全国居民消费价格环比是负的，所以 B 错误；设 2018 年 12 月份，

2018 年 11 月份，2017 年 12 月份的全国居民消费价格分别为 a, b, c ，由题意可知， $b = a$ ， $\frac{a-c}{c} = 1.9\%$ ，则有

$$c = \frac{a}{1+1.9\%} < a = b, \text{ 所以 } D \text{ 正确.}$$

故选：D

【点睛】

此题考查了对图表数据的分析处理能力及进行简单的合情推理，属于中档题.

9、D

【解析】

根据复数运算，求得 z ，再求其对应点即可判断.

【详解】

$$Q \ z = \frac{5}{1+2i} = 1-2i, \text{ 故其对应点的坐标为 } (1, -2).$$

其位于第四象限.

故选：D.

【点睛】

本题考查复数的运算，以及复数对应点的坐标，属综合基础题.

10、D

【解析】

中位数指一串数据按从小（大）到大（小）排列后，处在最中间的那个数，平均数指一串数据的算术平均数.

【详解】

由茎叶图知，甲的中位数为 $80+x=86$ ，故 $x=6$ ；

$$\text{乙的平均数为 } \frac{78+82+80+y+89+91+93+97}{7} = 88,$$

解得 $y=6$ ，所以 $x+y=12$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/155011043043011200>