

专题 23 解析几何解答题分类练

一、圆锥曲线方程与轨迹方程的确定

1. (2024 届广东省江门市部分学校高三上学期 9 月联考) 在直角坐标系 xOy 中, 动点 P 到直线 $x=4$ 的距离是它到点 $M(1,0)$ 的距离的 2 倍, 设动点 P 的轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 直线 $l: x=my-1$ 与曲线 C 交于 A, B 两点, 求 $\triangle MAB$ 面积的最大值.

【解析】(1) 设 $P(x, y)$, 因为点 P 到直线 $x=4$ 的距离是它到点 $M(1,0)$ 的距离的 2 倍,

所以 $|x-4|=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$, 则 $x^2-8x+16=4x^2-8x+4+4y^2$,

整理得 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, 故曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

联立方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \\ x=my-1, \end{cases}$ 整理得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$,

则 $\Delta=(-6m)^2+36(3m^2+4)=144(m^2+1)>0$,

$y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$, $y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$.

因为 $l: x=my-1$ 过点 $(-1,0)$,

所以 $S_{\triangle MAB}=\frac{1}{2}\times 2\times|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\frac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}=\frac{12}{3\sqrt{m^2+1}+\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}}$.

令 $t=\sqrt{m^2+1}$, $t\geq 1$, $f(t)=3t+\frac{1}{t}$,

则 $f'(t)=3-\frac{1}{t^2}>0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立, $f(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,

则当 $t=1$ 时, $f(t)_{\min}=f(1)=4$, 则 $S_{\triangle MAB}$ 的最大值为 3.

故 $\triangle MAB$ 面积的最大值为 3.

专题 23 解析几何解答题分类练

一、圆锥曲线方程与轨迹方程的确定

1. (2024 届广东省江门市部分学校高三上学期 9 月联考) 在直角坐标系 xOy 中, 动点 P 到直线 $x=4$ 的距离是它到点 $M(1,0)$ 的距离的 2 倍, 设动点 P 的轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 直线 $l: x=my-1$ 与曲线 C 交于 A, B 两点, 求 $\triangle MAB$ 面积的最大值.

【解析】(1) 设 $P(x, y)$, 因为点 P 到直线 $x=4$ 的距离是它到点 $M(1,0)$ 的距离的 2 倍,

所以 $|x-4|=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$, 则 $x^2-8x+16=4x^2-8x+4+4y^2$,

整理得 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, 故曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

联立方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \\ x=my-1, \end{cases}$ 整理得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$,

则 $\Delta=(-6m)^2+36(3m^2+4)=144(m^2+1)>0$,

$y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$, $y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$.

因为 $l: x=my-1$ 过点 $(-1,0)$,

所以 $S_{\triangle MAB}=\frac{1}{2}\times 2\times|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

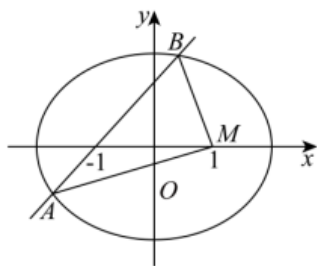
$=\frac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}=\frac{12}{3\sqrt{m^2+1}+\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}}$.

令 $t=\sqrt{m^2+1}$, $t\geq 1$, $f(t)=3t+\frac{1}{t}$,

则 $f'(t)=3-\frac{1}{t^2}>0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立, $f(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,

则当 $t=1$ 时, $f(t)_{\min}=f(1)=4$, 则 $S_{\triangle MAB}$ 的最大值为 3.

故 $\triangle MAB$ 面积的最大值为 3.



2. (2023 届四川省成都市蓉城名校联盟高三第一次联考) 已知椭圆 C 的对称中心为坐标原点, 对称轴为坐标轴, 焦点在 y 轴上, 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 且过点 $P(3, 2)$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若直线 l 与椭圆交于 A, B 两点, 且直线 PA, PB 的倾斜角互补, 判断直线 AB 的斜率是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

【解析】(1) 设椭圆 C 的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,

由题意知 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, $\therefore a = 2c, b = \sqrt{3}c$,

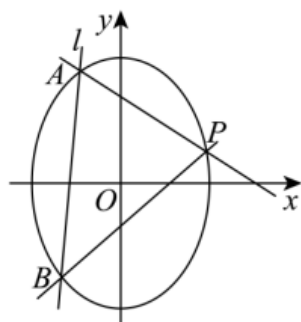
故椭圆的标准方程又为 $\frac{x^2}{3c^2} + \frac{y^2}{4c^2} = 1$, 即 $4x^2 + 3y^2 = 12c^2$,

又椭圆过点 $(3, 2)$, $\therefore 36 + 12 = 12c^2$, $\therefore c^2 = 4$,

$\therefore$ 椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{12} = 1$;

(2) 由题意可知直线 l 的斜率存在且不过点 $P(3, 2)$,

设直线 l 的方程为 $y = kx + m, (3k + m - 2 \neq 0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,



由 $\begin{cases} y = kx + m \\ 4x^2 + 3y^2 = 48 \end{cases}$, 消去 y 整理得 $(3k^2 + 4)x^2 + 6kmx + 3m^2 - 48 = 0$,

需满足 $\Delta = 48(12k^2 + 16 - m^2) > 0$, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{6km}{3k^2 + 4}$, $x_1x_2 = \frac{3m^2 - 48}{3k^2 + 4}$,

直线 PA, PB 的倾斜角互补, $\therefore k_{PA} + k_{PB} = \frac{y_1 - 2}{x_1 - 3} + \frac{y_2 - 2}{x_2 - 3} = 0$,

$$\therefore \frac{kx_1 + m - 2}{x_1 - 3} + \frac{kx_2 + m - 2}{x_2 - 3} = 2k + (3k + m - 2)\left(\frac{1}{x_1 - 3} + \frac{1}{x_2 - 3}\right) = 0,$$

$$\therefore 2k + (3k + m - 2) \cdot \frac{x_1 + x_2 - 6}{x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9} = 0,$$

$$\text{将 } x_1 + x_2 = -\frac{6km}{3k^2 + 4}, \quad x_1 x_2 = \frac{3m^2 - 48}{3k^2 + 4} \text{ 代入得 } 2k + (3k + m - 2) \cdot \frac{-\frac{6km}{3k^2 + 4} - 6}{\frac{3m^2 - 48}{3k^2 + 4} + 3 \cdot \frac{6km}{3k^2 + 4} + 9} = 0,$$

整理得 $(k - 2)(3k + m - 2) = 0$ ，而 $3k + m - 2 \neq 0$ ，

$$\therefore k = 2,$$

所以直线 AB 的斜率为定值，其定值为 2.

3. (2024 届安徽省皖东智校协作联盟高三上学期 10 月联考) 平面直角坐标系 xOy 中， P 为动点， PA 与直线 $x = \sqrt{3}y$ 垂直，垂足 A 位于第一象限， PB 与直线 $x = -\sqrt{3}y$ 垂直，垂足 B 位于第四象限， $\angle APB > 90^\circ$ 且

$$|AP||BP| = \frac{3}{4}, \text{ 记动点 } P \text{ 的轨迹为 } C.$$

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知点 $M(-2, 0)$ ， $N(2, 0)$ ，设点 T 与点 P 关于原点 O 对称， $\angle MTN$ 的角平分线为直线 l ，过点 P 作 l 的垂线，垂足为 H ，交 C 于另一点 Q ，求 $\frac{|PH|}{|QH|}$ 的最大值.

【解析】(1) 由题意设 $P(x_0, y_0)$ ，由点到直线距离公式得

$$|AP| = \frac{|x_0 - \sqrt{3}y_0|}{2}, \quad |BP| = \frac{|x_0 + \sqrt{3}y_0|}{2},$$

$$\therefore |AP||BP| = \frac{|x_0 - \sqrt{3}y_0|}{2} \cdot \frac{|x_0 + \sqrt{3}y_0|}{2} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore |x_0^2 - 3y_0^2| = 3, \text{ 又 } \because \text{垂足 } A \text{ 位于第一象限,}$$

垂足 B 位于第四象限， $\angle APB > 90^\circ$ ，

$$\therefore C \text{ 的轨迹方程为 } \frac{x^2}{3} - y^2 = 1 (x > 0).$$

(2) 解：由对称性，不妨设 P 在第一象限，设 $P(x_0, y_0)$ ，则 $T(-x_0, -y_0)$ ，

设直线 l 的斜率为 k ，记 $\vec{\alpha} = (1, k)$ ，由 l 为 $\angle MTN$ 的角平分线，

$$\text{则有 } \frac{\vec{TM} \cdot \vec{\alpha}}{|\vec{TM}|} = \frac{\vec{TN} \cdot \vec{\alpha}}{|\vec{TN}|},$$

其中 $\frac{x_0^2}{3} - y_0^2 = 1$, $x_0 \geq \sqrt{3}$, $\overline{TM} = (x_0 - 2, y_0)$, $\overline{TN} = (x_0 + 2, y_0)$,

$$\therefore |\overline{TM}| = \sqrt{(-2 + x_0)^2 + y_0^2} = \sqrt{(-2 + x_0)^2 + \frac{x_0^2}{3} - 1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}x_0 - \sqrt{3},$$

同理得: $|\overline{TN}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}x_0 + \sqrt{3}$, 代入 $\frac{\overline{TM} \cdot \overline{u}}{|\overline{TM}|} = \frac{\overline{TN} \cdot \overline{u}}{|\overline{TN}|}$ 中,

$$\therefore \frac{(x_0 - 2, y_0) \cdot (1, k)}{\frac{2\sqrt{3}}{3}x_0 - \sqrt{3}} = \frac{(x_0 + 2, y_0) \cdot (1, k)}{\frac{2\sqrt{3}}{3}x_0 + \sqrt{3}}, \text{ 化简得: } x_0 = 3ky_0.$$

将 $x_0 = 3ky_0$ 代入 $\frac{x_0^2}{3} - y_0^2 = 1$, $x_0 \geq \sqrt{3}$ 中,

$$\text{解得: } x_0 = \frac{3k}{\sqrt{3k^2 - 1}}, y_0 = \frac{1}{\sqrt{3k^2 - 1}},$$

$$\therefore P\left(\frac{3k}{\sqrt{3k^2 - 1}}, \frac{1}{\sqrt{3k^2 - 1}}\right), T\left(-\frac{3k}{\sqrt{3k^2 - 1}}, -\frac{1}{\sqrt{3k^2 - 1}}\right),$$

设直线 l 的方程为 $y = kx + n$, 将 $T\left(-\frac{3k}{\sqrt{3k^2 - 1}}, -\frac{1}{\sqrt{3k^2 - 1}}\right)$ 代入,

$$\text{解得: } n = \sqrt{3k^2 - 1},$$

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y = kx + \sqrt{3k^2 - 1}$, $k > \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\text{由点到直线距离公式得: } |PH| = \frac{\left|\frac{3k^2 - 1}{\sqrt{3k^2 - 1}} + \sqrt{3k^2 - 1}\right|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{2\sqrt{3k^2 - 1}}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

由直线 PQ 的斜率为 $-\frac{1}{k}$, 设直线 PQ 的方程为 $x = -ky + m$,

$$\text{将 } P\left(\frac{3k}{\sqrt{3k^2 - 1}}, \frac{1}{\sqrt{3k^2 - 1}}\right) \text{ 点代入, 解得: } m = \frac{4k}{\sqrt{3k^2 - 1}},$$

$\therefore$ 直线 PQ 的方程为 $x = -ky + \frac{4k}{\sqrt{3k^2 - 1}}$, 将其与 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1 (x > 0)$ 联立得:

$$(k^2 - 3)y^2 - \frac{8k^2}{\sqrt{3k^2 - 1}}y + \frac{7k^2 + 3}{3k^2 - 1} = 0,$$

$$\text{设 } Q(x_1, y_1), \text{ 则 } y_0 + y_1 = \frac{8k^2}{(k^2 - 3)\sqrt{3k^2 - 1}}, y_0 y_1 = \frac{7k^2 + 3}{(k^2 - 3)(3k^2 - 1)},$$

$$\text{由 } y_0 y_1 < 0 \text{ 可知 } k \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right), |PQ| = \sqrt{1 + k^2} |y_0 - y_1| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(y_0 + y_1)^2 - 4y_0 y_1} = \frac{6(k^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{(3 - k^2)\sqrt{3k^2 - 1}},$$

由均值不等式, $\frac{|PQ|}{|PH|} = \frac{3(k^2+1)^2}{(3-k^2)(3k^2-1)} \geq \frac{3(k^2+1)^2}{(k^2+1)^2} = 3$,

当且仅当 $3-k^2=3k^2-1$, 即 $k^2=1$ 时, 等号成立,

$\therefore k \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right)$, 故 $k=1$,

$\therefore \frac{|PH|}{|QH|} = \frac{1}{\frac{|PQ|}{|PH|} + 1} \leq \frac{1}{4}$, 当且仅当 $k=1$ 时, 等号成立.

$\therefore \frac{|PH|}{|QH|}$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

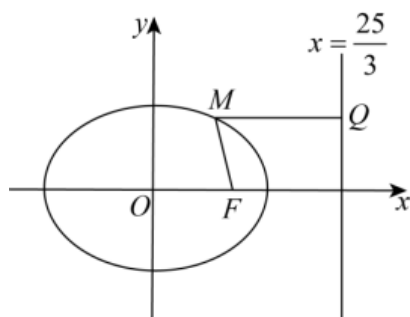
二、长度与周长问题

4. (2024 届云南省三校高三联考) 已知点 M 到定点 $F(3,0)$ 的距离和它到直线 $l: x = \frac{25}{3}$ 的距离的比是常数 $\frac{3}{5}$.

(1) 求点 M 的轨迹 C 的方程;

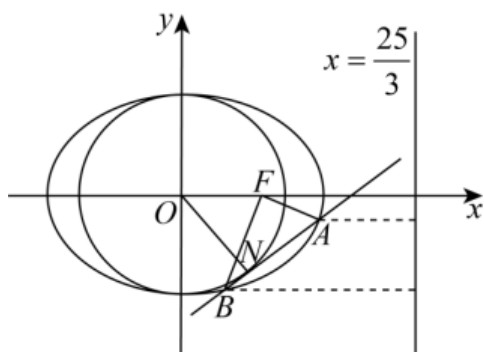
(2) 若直线 $l: y = kx + m$ 与圆 $x^2 + y^2 = 16$ 相切, 切点 N 在第四象限, 直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 求证: $\triangle FAB$ 的周长为定值.

【解析】(1)



设 $M(x, y)$, 由条件可知: $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \frac{3}{5} \left| \frac{25}{3} - x \right|$, 等号的两边平方, 整理后得: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$;

(2)



由 (1) 的结论知: 曲线 C 是方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的椭圆, 设 $N(p, t)$, 依题意有:

$$t^2 + p^2 = 16, p \in (0, 4), t \in (-4, 0),$$

则 $k_{ON} = \frac{t}{p}$, $\therefore k_{AB} = -\frac{p}{t}$, 所以直线 l 的方程为: $y - t = -\frac{p}{t}(x - p), y = \frac{-px + 16}{t}$,

联立方程: $\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \\ y = \frac{16 - px}{t} \end{cases}$, 得: $\left(\frac{1}{25} + \frac{p^2}{16t^2}\right)x^2 - \frac{2p}{t^2}x + \frac{p^2}{t^2} = 0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{\frac{2p}{t^2}}{\frac{1}{25} + \frac{p^2}{16t^2}} = \frac{2p}{\frac{t^2}{25} + \frac{p^2}{16}} = \frac{2p}{\frac{16 - p^2}{25} + \frac{p^2}{16}} = \frac{2 \times 25 \times 16p}{16^2 + 9p^2}$,

$$x_1 x_2 = \frac{\frac{p^2}{t^2}}{\frac{1}{25} + \frac{p^2}{16t^2}} = \frac{p^2}{\frac{t^2}{25} + \frac{p^2}{16}} = \frac{p^2}{\frac{16 - p^2}{25} + \frac{p^2}{16}} = \frac{25 \times 16p^2}{16^2 + 9p^2},$$

$$|AB| = \sqrt{1 + k_{AB}^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + \frac{p^2}{t^2}} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{4}{|t|} \sqrt{\frac{2 \times 5 \times 3 \times 4 \sqrt{16p^2 - p^4}}{16^2 + 9p^2}}$$

$$= \frac{30 \times 16p}{16^2 + 9p^2},$$

由条件可知: $|BF| = \frac{3}{5} \left(\frac{25}{3} - x_2 \right), |AF| = \frac{3}{5} \left(\frac{25}{3} - x_1 \right), \therefore |AF| + |BF| = 10 - \frac{3}{5}(x_1 + x_2) = 10 - \frac{30 \times 16p}{16^2 + 9p^2}$,

$\triangle ABF$ 的周长 $= |AB| + |BF| + |AF| = 10$, 即定值为 10;

综上, 曲线 C 的方向为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $\triangle ABF$ 的周长 $= 10$.

5. (2023 届福建省厦门第一中学高三四模) 已知 A, B 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点和上顶点, $|AB| = \sqrt{5}$, 直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 直线 $l \parallel AB$, 与 x, y 轴分别交于点 M, N , 与椭圆相交于点 C, D .

(i) 求 $\triangle OCM$ 的面积与 $\triangle ODN$ 的面积之比;

(ii) 证明: $|CM|^2 + |MD|^2$ 为定值.

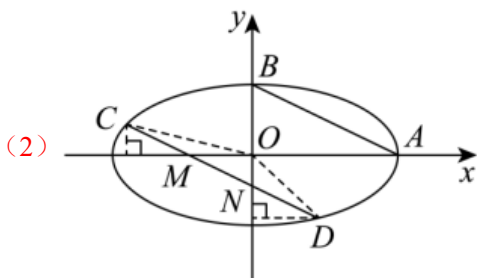
【解析】(1) $\because A, B$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个顶点, 且 $|AB| = \sqrt{5}$,

直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 由 $A(a, 0), B(0, b)$, 得 $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$,

又 $k = \frac{b - 0}{0 - a} = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$,

解得 $a=2$, $b=1$,

∴ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;



设直线 l 的方程为 $y = -\frac{1}{2}x + m$, 则 $M(2m, 0)$, $N(0, m)$,

联立方程
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + m \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$$
 消去 y ,

整理得 $x^2 - 2mx + 2m^2 - 2 = 0$, $\Delta = 4m^2 - 8(m^2 - 4) = 32 - 4m^2 > 0$, 得 $m^2 < 8$

设 $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$, $\therefore x_1 + x_2 = 2m$, $x_1 x_2 = 2m^2 - 2$.

(i) $S_{\triangle OCM} = \frac{1}{2}|2m||y_1|$, $S_{\triangle ODN} = \frac{1}{2}|m||x_2|$,

$\therefore \frac{S_{\triangle OCM}}{S_{\triangle ODN}} = \frac{|2y_1|}{|x_2|} = \frac{|2m - x_1|}{|x_2|} = \frac{|x_2|}{|x_2|} = 1$,

∴ $\triangle OCM$ 的面积与 $\triangle ODN$ 的面积之比为 1;

(ii) 证明: $|CM|^2 + |MD|^2 = (x_1 - 2m)^2 + y_1^2 + (x_2 - 2m)^2 + y_2^2$
 $= x_1^2 - 4mx_1 + 4m^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1 + m\right)^2 + x_2^2 - 4mx_2 + 4m^2 + \left(-\frac{1}{2}x_2 + m\right)^2$
 $= \frac{5}{4}(x_1 + x_2)^2 - \frac{5}{2}x_1 x_2 - 5m(x_1 + x_2) + 10m^2$
 $= 5m^2 - \frac{5}{2}(2m^2 - 2) - 10m^2 + 10m^2 = 5$

综上, $|CM|^2 + |MD|^2 = 5$.

三、面积问题

6. (2023 届四川省南充高级中学高三下学期第三次模拟) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点

为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$. 点 P 是椭圆 C 上不同于顶点的任意一点, 射线 PF_1, PF_2 分别与椭圆 C 交于点 A, B ,

$\triangle PF_1 B$ 的周长为 8.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)设 $\triangle PF_1F_2$, $\triangle PF_1B$, $\triangle PAB$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 . 求证: $\frac{S_2}{S_3 - S_2} + \frac{S_1}{S_2 - S_1}$ 为定值.

【解析】(1) 因为 $\triangle PF_1B$ 的周长为 8, 即 $|PF_1| + |PF_2| + |BF_1| + |BF_2| = 2a + 2a = 8$

所以 $4a = 8$, 可得 $a = 2$,

由椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 可得 $c = 1$, 从而 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$,

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 证明: 设 $P(x_0, y_0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$,

可设直线 PA 的方程为 $x = my - 1$, 其中 $m = \frac{x_0 + 1}{y_0}$,

$$\text{联立方程} \begin{cases} x = my - 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{整理得 } (3m^2 + 4)y^2 - 6my - 9 = 0,$$

$$\text{则 } y_0 y_1 = \frac{-9}{3m^2 + 4} = \frac{-9}{3\left(\frac{x_0 + 1}{y_0}\right)^2 + 4},$$

$$\text{同理可得, } y_0 y_2 = \frac{-9}{3\left(\frac{x_0 - 1}{y_0}\right)^2 + 4}.$$

$$\text{因为 } \frac{S_2}{S_3 - S_2} + \frac{S_1}{S_2 - S_1} = \frac{S_{\triangle PF_1 B}}{S_{\triangle AF_1 B}} + \frac{S_{\triangle PF_2 F_1}}{S_{\triangle BF_2 F_1}} = \frac{\frac{1}{2}|PF_1| \cdot |F_1 B| \sin \angle PF_1 B}{\frac{1}{2}|AF_1| \cdot |F_1 B| \sin \angle AF_1 B} + \frac{\frac{1}{2}|PF_2| \cdot |F_1 F_2| \sin \angle PF_2 F_1}{\frac{1}{2}|BF_2| \cdot |F_1 F_2| \sin \angle BF_2 F_1} = \frac{|PF_1|}{|AF_1|} + \frac{|PF_2|}{|BF_2|},$$

$$\text{所以 } \frac{S_2}{S_3 - S_2} + \frac{S_1}{S_2 - S_1} = \frac{|PF_1|}{|AF_1|} + \frac{|PF_2|}{|BF_2|} = \frac{y_0}{-y_1} + \frac{y_0}{-y_2} = -y_0 \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} \right)$$

$$= \frac{y_0^2 \left[3\left(\frac{x_0 + 1}{y_0}\right)^2 + 4 + 3\left(\frac{x_0 - 1}{y_0}\right)^2 + 4 \right]}{9} = \frac{3(x_0 + 1)^2 + 3(x_0 - 1)^2 + 8y_0^2}{9} = \frac{6x_0^2 + 8y_0^2 + 6}{9} = \frac{24 + 6}{9} = \frac{10}{3},$$

所以 $\frac{S_2}{S_3 - S_2} + \frac{S_1}{S_2 - S_1}$ 是定值.

7. (2023 届河北省唐山市迁西县第一中学高三二模) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 连接 E 的四个顶点

所得四边形的面积为 4, $M\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 是 E 上一点.

(1)求椭圆 E 的方程;

(2)设斜率为 k 的直线 l 与椭圆 E 交于 A, B 两点, D 为线段 AB 的中点, O 为坐标原点, 若 E 上存在点 C , 使得 $\vec{OC} + 2\vec{OD} = \vec{0}$, 求三角形 ABC 的面积.

【解析】(1) 由题意知连接 E 的四个顶点所得四边形的面积为 $2ab$,

$$\text{又点 } M\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ 在 } E \text{ 上, 得 } \begin{cases} 2ab = 4 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1, \\ a > b \end{cases}$$

解得 $a = 2, b = 1$,

故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设直线 l 的方程为 $y = kx + m$,

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 得 } (4k^2 + 1)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0,$$

$$\text{又 } \Delta = 64m^2k^2 - 4(4k^2 + 1)(4m^2 - 4) > 0,$$

得 $4k^2 + 1 > m^2$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, 则

$$x_1 + x_2 = -\frac{8km}{4k^2 + 1}, \quad y_1 + y_2 = kx_1 + m + kx_2 + m = \frac{2m}{4k^2 + 1}.$$

由 $\vec{OC} + 2\vec{OD} = \vec{0}$, 可得 O 为三角形 ABC 的重心,

所以 $S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle OAB}$, 且 $\vec{OC} = -2\vec{OD} = -(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_3, y_3)$,

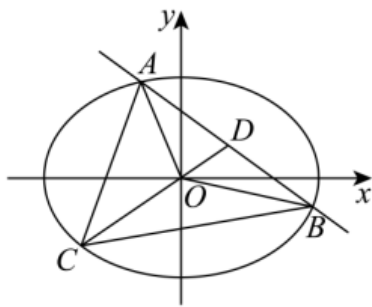
$$x_3 = -(x_1 + x_2) = \frac{8mk}{4k^2 + 1}, \quad y_3 = -(y_1 + y_2) = -\frac{2m}{4k^2 + 1},$$

故由 $C(x_3, y_3)$ 在椭圆 E 上, 得 $\frac{\left(\frac{8km}{4k^2 + 1}\right)^2}{4} + \left(\frac{2m}{4k^2 + 1}\right)^2 = 1$, 得 $4m^2 = 4k^2 + 1$,

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{1+k^2} |x_2 - x_1| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{\left(\frac{8km}{1+4k^2}\right)^2 - \frac{4(4m^2-4)}{1+4k^2}} \\ &= \sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{16(1+4k^2-m^2)}}{1+4k^2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{4m^2-m^2}}{m^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{1}{|m|}, \end{aligned}$$

又原点 O 到直线 l 的距离为 $d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$,

所以 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times |AB| \times d = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 $S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle OAB} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.



8. (2023 届新疆伊犁州伊宁县第三中学高三上学期诊断) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点

$P\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, O 为坐标原点, 若直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 M , 直线 l 与直线 OM 的斜率乘积为 $-\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若四边形 $OAPB$ 为平行四边形, 求四边形 $OAPB$ 的面积.

【解析】(1) 由题意可设: 直线 $l: y = kx + m$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$,

可得: 直线 l 的斜率 $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, 直线 OM 的斜率 $k_{OM} = \frac{\frac{y_1 + y_2}{2}}{\frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$,

因为 A, B 两点在椭圆 C 上, 则 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases}$,

两式相减得整理得 $\frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1^2 - x_2^2} = -\frac{b^2}{a^2}$, 即 $k \cdot k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2}$,

所以 $-\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{2}$, 可得 $a^2 = 2b^2$,

又因为点 $P\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ 在椭圆 C 上, 则 $\begin{cases} a^2 = 2b^2 \\ \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a^2 = \frac{4}{3} \\ b^2 = \frac{2}{3} \end{cases}$,

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{\frac{4}{3}} + \frac{y^2}{\frac{2}{3}} = 1$.

(2) 因为四边形 $OAPB$ 为平行四边形, 则 M 为 OP 的中点, 可得 $M\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$,

则 $k_{OM} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{2}} = 1$ ，可得直线 l 的斜率 $k = -\frac{1}{2}$ ，

所以直线 l 的方程为 $y + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right)$ ，即 $x + 2y + 1 = 0$ ，

可得点 $O(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

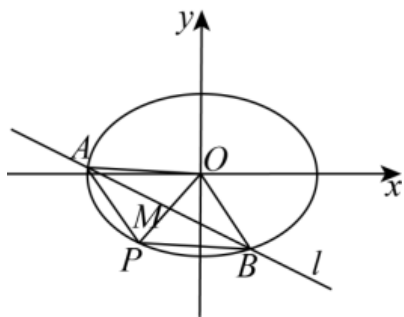
由 (1) 可知：椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{\frac{4}{3}} + \frac{y^2}{\frac{2}{3}} = 1$ ，即 $3x^2 + 6y^2 = 4$ ，

联立方程 $\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ 3x^2 + 6y^2 = 4 \end{cases}$ ，消去 y 得 $9x^2 + 6x - 5 = 0$ ，

可得 $\Delta = 36 - 4 \times 9 \times (-5) = 216 > 0$ ，且 $x_1 + x_2 = -\frac{2}{3}$ ， $x_1 x_2 = -\frac{5}{9}$ ，

则 $|AB| = \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{5}{9}\right)} = \frac{\sqrt{30}}{3}$ ，

所以四边形 $OAPB$ 的面积 $S_{OAPB} = 2 \times \frac{1}{2} \times d \times |AB| = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{30}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 。



四、斜率问题

9. (2024 届陕西省商洛市部分学校高三上学期 10 月测试) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(2,3)$ ，且 C 的右焦点为 $F(2,0)$ 。

(1) 求 C 的离心率；

(2) 过点 F 且斜率为 1 的直线与 C 交于 M, N 两点， P 直线 $x=8$ 上的动点，记直线 PM, PN, PF 的斜率分别为 k_{PM}, k_{PN}, k_{PF} ，证明： $k_{PM} + k_{PN} = 2k_{PF}$ 。

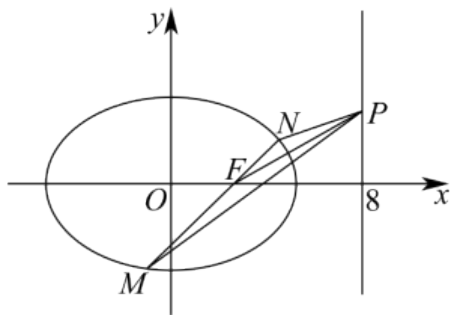
【解析】(1) 由 $F(2,0)$ 得 C 的半焦距为 $c=2$ ，所以 $a^2 = b^2 + 4$ ，

又 C 过点 $(2, 3)$ ，所以 $\frac{4}{b^2+4} + \frac{9}{b^2} = 1$ ，解得 $b^2 = 12$ ，

所以 $a^2 = 16$ ， $a = 4$ 。

故 C 的离心率为 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ 。

(2)



由 (1) 可知 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 。

设 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ， $P(8, y_0)$ 。

由题意可得直线 MN 的方程为 $y = x - 2$ ，

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \\ y = x - 2 \end{cases}$ ，消去 y 可得 $7x^2 - 16x - 32 = 0$ ，

则 $x_1 + x_2 = \frac{16}{7}$ ， $x_1 x_2 = -\frac{32}{7}$ ，

则 $k_{PM} + k_{PN} = \frac{y_0 - y_1}{8 - x_1} + \frac{y_0 - y_2}{8 - x_2} = \frac{(y_0 - x_1 + 2)(8 - x_2) + (y_0 - x_2 + 2)(8 - x_1)}{(8 - x_1)(8 - x_2)}$

$= \frac{16y_0 + 32 + 2x_1 x_2 - (y_0 + 10)(x_1 + x_2)}{64 + x_1 x_2 - 8(x_1 + x_2)}$

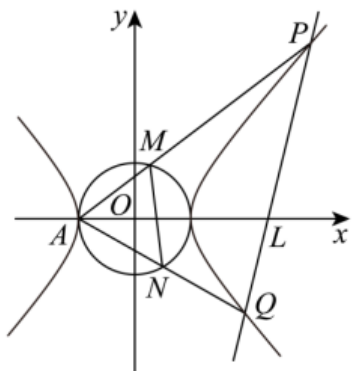
$= \frac{16y_0 + 32 + 2\left(-\frac{32}{7}\right) - \frac{16}{7}(y_0 + 10)}{64 - \frac{32}{7} - 8 \times \frac{16}{7}} = \frac{y_0}{3}$ ，

又 $k_{PF} = \frac{y_0 - 0}{8 - 2} = \frac{y_0}{6}$ ，

因此 $k_{PM} + k_{PN} = 2k_{PF}$ 。

10. (2024 届山东省金科大联考高三上学期 9 月质量检测) 如图，已知点 $T_1(3, -\sqrt{5})$ 和点 $T_2(-5, \sqrt{21})$

在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上，双曲线 C 的左顶点为 A ，过点 $L(a^2, 0)$ 且不与 x 轴重合的直线 l 与双曲线 C 交于 P, Q 两点，直线 AP, AQ 与圆 $O: x^2 + y^2 = a^2$ 分别交于 M, N 两点。



(1) 求双曲线 C 的标准方程；

(2) 设直线 AP, AQ 的斜率分别为 k_1, k_2 ，求 $k_1 k_2$ 的值；

(3) 证明：直线 MN 过定点。

【解析】(1) 因为点 $T_1(3, -\sqrt{5})$ 和点 $T_2(-5, \sqrt{21})$ 在双曲线上，

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{9}{a^2} - \frac{5}{b^2} = 1 \\ \frac{25}{a^2} - \frac{21}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 4 \end{cases}, \text{ 所以双曲线 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

(2) 由题可知，直线 l 的斜率不等于零，故可设直线 l 的方程为 $x = my + 4$ ，

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ，

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = my + 4 \end{cases}, \text{ 整理得 } (m^2 - 1)y^2 + 8my + 12 = 0,$$

若 $m^2 = 1$ ，即 $m = \pm 1$ ，直线 l 的斜率为 ± 1 ，与渐近线 $y = \pm x$ 平行，

此时直线 l 与双曲线有且仅有一个交点，不满足题意，所以 $m^2 \neq 1$ ，

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = \frac{-8m}{m^2 - 1}, y_1 y_2 = \frac{12}{m^2 - 1},$$

$$x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 8 = \frac{-8m^2}{m^2 - 1} + \frac{8m^2 - 8}{m^2 - 1} = \frac{-8}{m^2 - 1},$$

$$x_1 x_2 = m^2 y_1 y_2 + 4m(y_1 + y_2) + 16 = \frac{12m^2}{m^2 - 1} + \frac{-32m^2}{m^2 - 1} + \frac{16m^2 - 16}{m^2 - 1} = \frac{-4m^2 - 16}{m^2 - 1},$$

$$\text{因为 } A(-2, 0), \text{ 所以 } k_1 k_2 = k_{AP} k_{AQ} = \frac{y_1}{x_1 + 2} \times \frac{y_2}{x_2 + 2} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/155034304304011303>