专题05 轴对称图形与等腰三角形（5个考点清单+8种题型解读）

考点清单

目录

【知识点01】轴对称图形

1．轴对称图形

（1）定义：如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做轴对称图形，这条直线就是它的对称轴．这时，我们也说这个图形关于这条直线（成轴）对称．

（2）判断一个图形是不是轴对称图形，可利用轴对称图形的定义，将图形对折，看是否能够完全重合，若能够完全重合，则这个图形是轴对称图形，否则这个图形不是轴对称图形．

【注意】

（1）对称轴是一条直线，而不是射线或线段．

（2）一个轴对称图形的对称轴可以有1条，也可以有多条，还可以有无数条．

（3）轴对称图形是对于一个图形而言的，它表示具有一定特性（轴对称性）的某一类图形．

2．轴对称

把一个图形沿着某一条直线折叠，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形关于这条直线（成轴）对称，这条直线叫做对称轴，折叠后重合的点是对应点，叫做对称点．

轴对称和轴对称图形的区别与联系

<table>
<tr><td colspan="2">名称
关系</td><td>轴对称</td><td>轴对称图形</td></tr>
<tr><td rowspan="4">区别</td><td>意义不同</td><td>两个图形之间的特殊位置关系</td><td>一个形状特殊的图形</td></tr>
<tr><td>图形个数</td><td>两个图形</td><td>一个图形</td></tr>
<tr><td>对称轴的位置不同</td><td>可能在两个图形的外部，也可能经过两个图形的内部或它们的公共边（点）</td><td>一定经过这个图形</td></tr>
<tr><td>对称轴的数量</td><td>只有一条</td><td>有一条或多条</td></tr>
<tr><td colspan="2">联系</td><td colspan="2">（1）如果把成轴对称的两个图形看成一个整体，那么它就是一个轴对称图形
（2）如果把一个轴对称图形沿对称轴分成两个图形，那么这两个图形成轴对称</td></tr>
</table>

3．轴对称和轴对称图形的性质

（1）两个图形成轴对称的性质：如果两个图形关于某条直线对称，那么对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线．

（2）轴对称图形的性质：轴对称图形的对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线．
（3）轴对称图形（或关于某条直线对称的两个图形）的对应线段（对折后重合的线段）相等，对应角（对折后重合的角）相等．
（4）成轴对称的两个图形全等；轴对称图形被对称轴分成的两部分也全等，但全等的两个图形不一定是轴对称图形．

4．轴对称变换

一个图形与其关于直线 l 对称后的图形之间的关系
（1）由一个平面图形可以得到与它关于一条直线 l 对称的图形，这个图形与原图形的形状、大小完全相同．
（2）新图形上的每一点都是原图形上的某一点关于直线 l 的对称点．
（3）连接任意一对对应点的线段被对称轴垂直平分．

【注意】

（1）成轴对称的两个图形中，任何一个图形都可以看成是由另一个图形经过轴对称变换得到的．
（2）一个轴对称图形也可以看成是以它的一部分为基础经过轴对称变换而得到的．

5．画轴对称图形

几何图形都可以看作由点组成，对于某些图形，我们只要画出图形中的一些特殊点（如线段端点）关于对称轴的对称点，连接这些对称点，就可以得到原图形的轴对称图形．
画轴对称图形的方法：
（1）找——在原图形上找特殊点（如线段的端点）；
（2）画——画各个特殊点关于对称轴对称的点；
（3）连——依次连接各对称点．

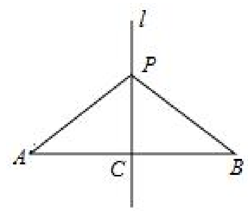
6．用坐标表示轴对称

关于坐标轴对称的点的坐标特点：
（1）点（x，y）关于 x 轴对称的点的坐标为（x，$-y$）；
（2）点（x，y）关于 y 轴对称的点的坐标为（$-x$，y）．
已知两个点的坐标分别为 P_1（x_1，y_1），P_2（x_2，y_2），若 $x_1=x_2$，$y_1+y_2=0$，则点 P_1，P_2 关于 x 轴对称；若 $x_1+x_2=0$，$y_1=y_2$，则点 P_1，P_2 关于 y 轴对称．反之也成立．
在坐标系中画轴对称图形的方法：
（1）计算——计算对称点的坐标；
（2）描点——根据对称点的坐标描点；
（3）连接——依次连接所描各点得到成轴对称的图形．

【知识点 02】线段垂直平分线

1．线段垂直平分线的定义及其性质

（1）线段垂直平分线的定义：经过线段中点并且垂直于这条线段的直线，叫做这条线段的垂直平分线．
（2）性质：线段垂直平分线上的点与这条线段两个端点的距离相等．书写格式：如图所示，点 P 在线段 AB 的垂直平分线上，则 $PA=PB$．

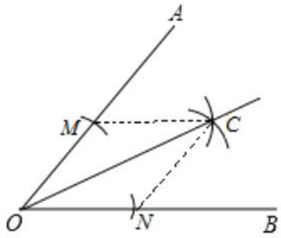


（3）判定：与线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上．书写格式：如图所示，若 $PA=PB$，则点 P 在线段 AB 的垂直平分线上．

【知识点 03】等腰三角形

1．等腰三角形的性质
性质 1：等腰三角形的两个底角相等（简写成“等边对等角”）.
性质 2：等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合（简写成“三线合一”）.
等腰三角形的其他性质：
（1）等腰三角形两腰上的中线、高分别相等.
（2）等腰三角形两底角的平分线相等.
（3）等腰三角形底边上任意一点到两腰的距离之和等于一腰上的高.
（4）当等腰三角形的顶角为 90° 时，此等腰三角形为等腰直角三角形，它的两条直角边相等，两个锐角都是 45°．
2．等腰三角形的判定
判定等腰三角形的方法：
（1）定义法：有两边**相等**的三角形是等腰三角形；
（2）如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等（简写成“等角对**等边**”).
数学语言：在△ABC 中，∵∠B=∠C，∴AB=AC（等角对等边).
【注意】
(1)“等角对等边”不能叙述为：如果一个三角形有两个底角相等，那么它的两腰也相等．因为在没有判定出它是等腰三角形之前，不能用“底角”“腰”这些名词，只有等腰三角形才有“底角”“腰”.
(2)“等角对等边”与“等边对等角”的区别：由两边相等得出它们所对的角相等，是等腰三角形的性质；由三角形有两角相等得出它是等腰三角形，是等腰三角形的判定.
3．等边三角形及其性质
等边三角形的概念：三边都相等的三角形是等边三角形.
等边三角形的性质：等边三角形的三个内角都相等，并且每一个角都等于 60° .
【注意】
（1）等边三角形是轴对称图形，它有三条对称轴；
（2）等边三角形是特殊的等腰三角形，它具有等腰三角形的一切性质.
4．等边三角形的判定
定等边三角形的方法：
（1）定义法：三边都相等的三角形是等边三角形.
（2）三个角都相等的三角形是等边三角形.
（3）有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形.
5．含 30° 角的直角三角形的性质
一在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半.
【注意】
（1）该性质是含 30° 角的特殊直角三角形的性质，一般的直角三角形或非直角三角形没有这个性质，更不能应用.
（2）这个性质主要应用于计算或证明线段的倍分关系.
（3）该性质的证明出自于等边三角形，所以它与等边三角形联系密切.
（4）在有些题目中，若给出的角是 15° 时，往往运用一个外角等于和它不相邻的两个内角的和将 15° 的角转化后，再利用这个性质解决问题.
【知识点 04】角的平分线的性质
1．作已知角的平分线
用尺规作已知角的平分线．已知：∠AOB，求作：∠AOB 的平分线.
作法：（1）以点 O 为圆心，适当长为半径画弧，交 OA 于点 M，交 OB 于点 N.
（2）分别以点 M，N 为圆心，大于 1/2MN 的长为半径画弧，两弧在∠AOB 的内部相交于点 C.

（3）画射线 OC．射线 OC 即为所求．
如图所示：



★作图依据：构造△OMC≌△ONC（SSS）．

2．角的平分线的性质

内容：**角的平分线上的点到角的两边的距离相等．**

【提示】

（1）这里的距离指的是点到角的两边垂线段的长；
（2）该性质可以独立作为证明两条线段相等的依据，不需要再用全等三角形；
（3）使用该结论的前提条件是图中有角平分线、有垂直；
（4）运用角的平分线时常添加的辅助线：由角的平分线上的已知点向两边作垂线段，利用其相等来推导其他结论．

3．角的平分线的判定

（1）内容：角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上．
（2）角的平分线的判定的前提条件是指在角的内部的点到角两边的距离相等时，它才是在角的平分线上，角的外部的点不会在角的平分线上．

【知识点 05】最短路问题

（1）求直线异侧的两点到直线上一点距离的和最小的问题，只要连接这两点，所得线段与直线的交点即为所求的位置．
（2）求直线同侧的两点到直线上一点距离的和最小的问题，只要找到其中一个点关于这条直线的对称点，连接对称点与另一个点，所得线段与该直线的交点即为所求的位置．

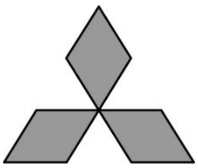
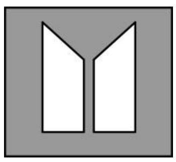
题型清单

【考点题型一】轴对称图形的识别

【例 1】（24-25 八年级上·云南曲靖·期末）下列图形中为轴对称图形的是（　　）

A．　B．　C．　D．

【变式 1-1】（24-25 八年级上·全国·期末）下列图案中，不是轴对称图形的是（ ）

A．　B．　C．　D．

【变式 1-2】（24-25 七年级上·全国·期末）青花瓷是我国四大名瓷之首，又称白地青花瓷，简称青花，代表着中国人纯粹、淡泊、通透、富有水墨意味的东方审美．下图中是四个青花瓷图案，其中不是轴对称图形

的是（　　）

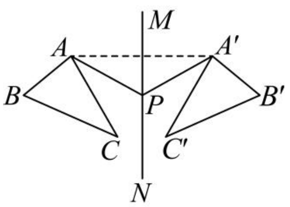
A． B． C． D．

【变式 1-3】（23-24 八年级上·黑龙江齐齐哈尔·期末）王老师给全班同学留了一个特色寒假作业，画一张有关兔子的图画，以下四个图形是开学后收上来的图画中的一部分，其中是轴对称图形的是（　　）

A． B． C． D．

【考点题型二】根据成轴对称图形的特征进行判断或求解

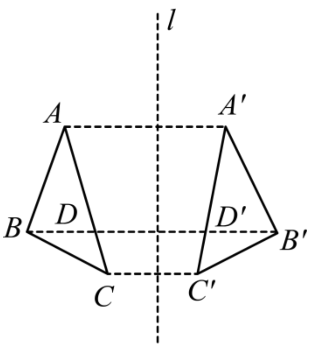
【例 2】（24-25 七年级上·全国·期末）如图，V ABC 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 MN 对称，P 为 MN 上任一点（P 不与 AA' 共线），下列结论中错误的是（　　）



A．$\triangle AA'P$ 是等腰三角形　　B．MN 垂直平分 AA'

C．V ABC 与 $\triangle A'B'C'$ 的面积相等　　D．直线 AB，$A'B'$ 的交点不一定在 MN 上

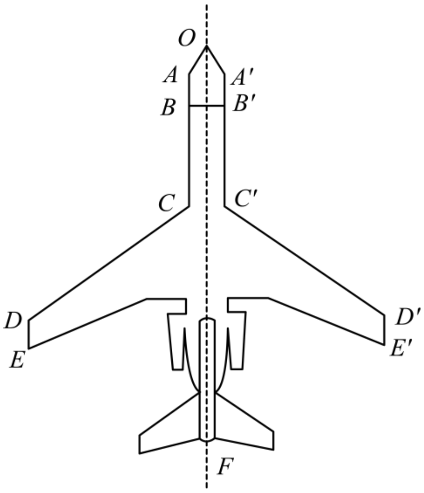
【变式 2-1】（23-24 八年级上·四川南充·期末）如图，V ABC 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，连接 AA'，BB'，CC'，其中 BB' 分别交 AC，$A'C'$ 于点 D，D¢，下列结论：① $AA' \,//\, BB'$；② $\angle ADB = \angle A'D'B'$；③直线 l 垂直平分 AA'；④直线 AB 与 $A'B'$ 的交点不一定在直线 l 上．其中正确的是（　　）



A．①②③　　B．②③④　　C．①②④　　D．①③④

【变式 2-2】（23-24 七年级下·山西晋中·期末）如图是一款运输机的平面示意图，它是一个轴对称图形，直

线 OF 是其对称轴．下列结论不正确的是（　）



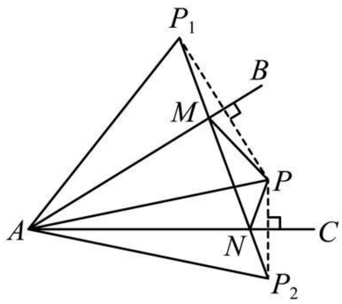
A． $BC=B'C'$　　　　B． $\angle D=\angle D'$

C． OF 平分 $\angle AOA'$　　　　D． BB' 垂直平分 OF

【变式 2-3】（23-24 七年级下·四川乐山·期末）如图，P 是 $\angle BAC$ 内部一点，P 关于 AB，AC 的对称点分别是点 P_1，点 P_2，连结 P_1P_2 分别与 AB，AC 交于点 M，点 N，连结 PM，PN，下列结论：

①$\triangle P_1P_2A$ 是等边三角形；　②$\angle P_1AP_2=2\angle BAC$；

③$\triangle PMN$ 的周长等于线段 P_1P_2 的长；　④$2\angle BAC+\angle MPN=180°$；



正确的个数为：

A．1 个　　　B．2 个　　　C．3 个　　　D．4 个

【考点题型三】坐标与图形变化--轴对称

【例 3】（24-25 八年级上·甘肃定西·期末）点 $P(-3,6)$ 关于 y 轴对称点的坐标是（　　）

A．$(3,6)$　　B．$(-2,-6)$　　C．$(2,-6)$　　D．$(6,-2)$

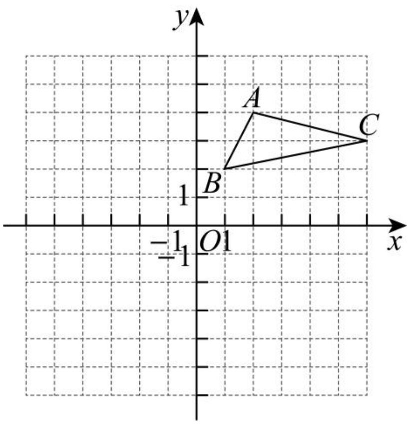
【变式 3-1】（24-25 八年级上·全国·期末）若点 P 的坐标为 $(-4,3)$，则点 P 关于 y 轴对称的点的坐标是（　）

A．$(-3,4)$　　B．$(4,3)$　　C．$(-3,-4)$　　D．$(4,-3)$

【变式 3-2】（24-25 八年级上·全国·期末）在平面直角坐标系中，点$A(a,-6)$与点$B(2,b)$关于y轴对称，则$ab=$______．

【变式 3-3】（23-24 八年级上·福建厦门·期末）若点$P(1,a)$与$Q(b,2)$关于x轴对称，则代数式$a+b$的值为______．

【变式 3-4】（23-24 八年级上·辽宁大连·期末）如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$的三个顶点都在格点上，点A的坐标为$(2,4)$．



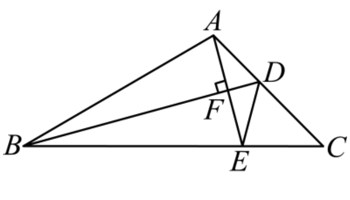
(1)画出$\triangle ABC$关于y轴对称的$\triangle A_1B_1C_1$；

(2)直接写出点A关于x轴的对称点A_2的坐标为______；

(3)在x轴上找到一点P，使$PB+PC$的和最小（标出点P即可，不用求点P的坐标）

【考点题型四】利用垂直平分线的性质求解

【例 4】（23-24 八年级下·甘肃张掖·期末）如图，在$\triangle ABC$中，点E是BC边上的一点，连接AE，BD垂直平分AE，垂足为F，交AC于点D．连接DE．

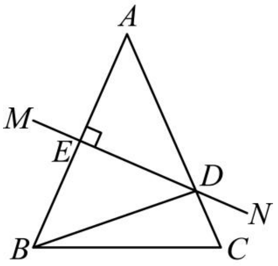


(1)若$\triangle ABC$的周长为19，$\triangle DEC$的周长为7，求AB的长；

(2)若$\angle ABC=30^\circ$，$\angle C=45^\circ$，求$\angle CDE$的度数．

【变式 4-1】（23-24 八年级上·湖南郴州·期末）如图所示：线段AB的垂直平分线MN交AC于点D，交AB

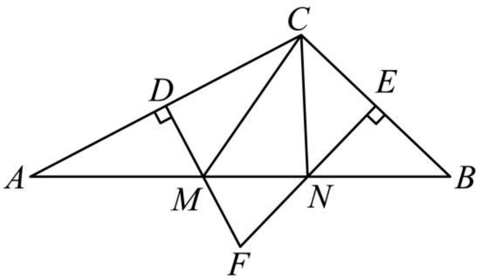
于点 E.



(1)若 $AB=AC=8$，$\triangle ADB$ 的周长是 18，求 DC 的长；

(2)若$\triangle BDC$的周长为 18，$BC=8$，$AB=AC$，求 AE 的长.

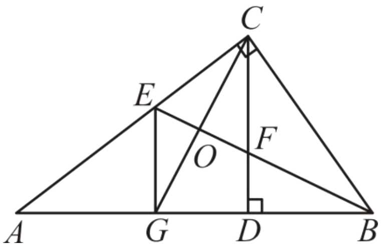
【变式 4-2】（22-23 八年级上·广西贵港·期末）如图，在$\triangle ABC$中，DM，EN 分别垂直平分边 AC 和边 BC，交边 AB 于 M、N 两点，DM 与 EN 相交于点 F.



(1)若 $AB=3\text{cm}$，求$\triangle CMN$的周长.

(2)若 $\angle MFN=80^\circ$，求 $\angle MCN$ 的度数.

【变式 4-3】（23-24 七年级下·四川成都·期末）如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$ 于点 D，BE 平分$\angle ABC$交 AC 于点 E，交 CD 于点 F，点 G 是线段 AD 上一点，且满足 $\angle A+\angle AEG=90^\circ$，连接 CG 交 BE 于点 O.



(1)请判断 CD 与 EG 的位置关系，并说明理由；

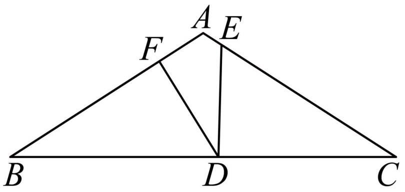
(2)求证：$BC=BG$；

(3)若 $GC=8$，$S_{\text{四边形}BCEG}=40$，求 EB 的长.

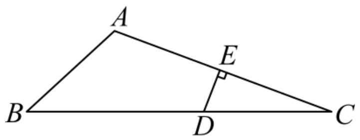
【考点题型五】利用等腰（等边）三角形的性质求解

【例 5】（23-24 八年级上·四川眉山·期末）如图，在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C$，D，E，F 分别是边 BC，AC，

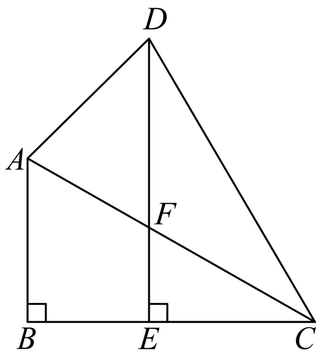
AB上的点，且 $BF=CD$， $BD=CE$．若 $\angle A=114°$，则 $\angle EDF$ 的度数为______°.



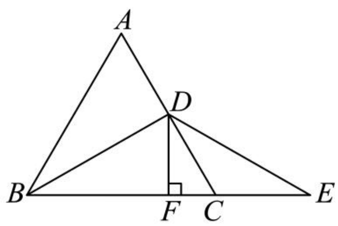
【变式 5-1】(24-25 八年级上·浙江杭州·期末)如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle B=2\angle C$，点 E 为边 AC 的中点，$DE\perp AC$，交 BC 于点 D，若 $AB=5$， $BC=13$，则 BD 的长为_____.



【变式 5-2】（24-25 八年级上·全国·期末）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=90°$， $DE\parallel AB$交 BC 于点 E，交 AC 于点 F， $\angle CDE=\angle ACB=30°$， $BC=DE$，则 $\angle ADF=$_____.



【变式 5-3】（23-24 八年级上·辽宁大连·期末）如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形， BD是中线，延长 BC 至点 E，使 $CE=CD$.

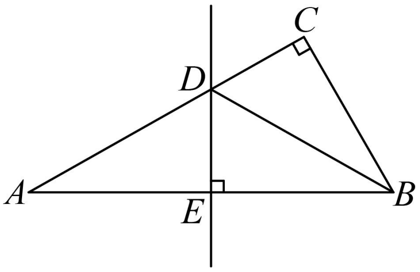


(1)求证：$DB=DE$；

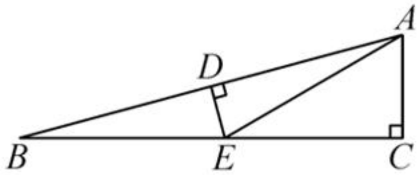
(2)过点 D 作 DF 垂直于 BE，垂足为 F，若 $CF=3$，求$\triangle ABC$ 的周长.

【考点题型六】含 30° 的直角三角形性质的应用

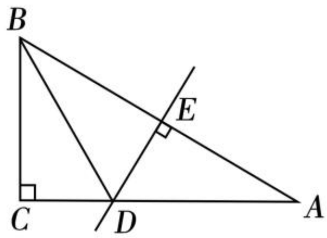
【例 6】（23-24 八年级上·广东广州·期末）如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中 $\angle C=90°$， $\angle A=30°$，线段 AB 的垂直平分线分别交 AC 、 AB 于点 D、E、连接 BD、若 $CD=2$，则 AD 的长为_______ .



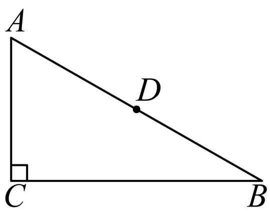
【变式 6-1】(23-24 八年级下·贵州贵阳·期末)如图,在$\triangle ABC$中,$\angle ACB=90°$,$\angle B=15°$,DE 垂直平分 AB,交 BC 于点 E,$BE=6\text{cm}$,则 AC 的值为____cm.



【变式 6-2】(23-24 八年级上·河南郑州·期末)如图,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ABC=60°$,DE 垂直平分 AB,垂足为点 E,交 AC 于点 D,连接 BD,若 $AD=4$,则 DC 的长为______.

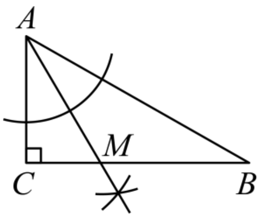


【变式 6-3】(24-25 八年级上·甘肃定西·期末)在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\angle B=30°$,$BC=6$,D 为 AB 的中点,P 为 BC 上一动点,连接 AP,DP,则 $AP+DP$ 的最小值是 _____.

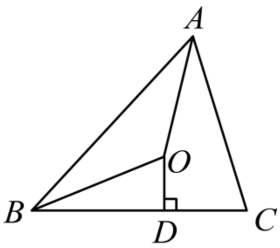


【考点题型七】利用角平分线的性质求解

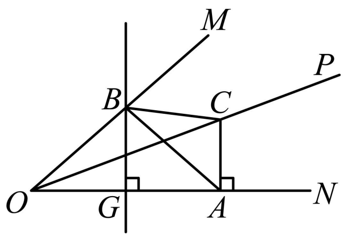
【例 7】(23-24 八年级上·内蒙古兴安盟·期末)如图,在$\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,$\angle CAB=2\angle B$,按如图所示的方式作射线 AM 交 BC 于点 M,若 $S_{\triangle ABM}=6$,则 $S_{\triangle ABC}=$______.



【变式 7-1】（23-24 七年级下·陕西榆林·期末）如图，在V ABC 中， BO 平分 $\angle ABC$ ， $OD\perp BC$ 于点 D ，连接 OA ，若 $OD=3$ ， $AB=12$ ，则V AOB 的面积是 ______.



【变式 7-2】（23-24 八年级上·全国·期末）如图， OP 平分 $\angle MON$ ，点 C 为 OP 上的任意一点， $CA\perp ON$ ，垂足为 A，线段 OA 的垂直平分线 BG 交 OM 于点 B ，交 OA 于点 G ，已知 $AB=6$ ， $AC=3$ ，则△OBC 的面积为________.



【变式 7-3】（23-24 七年级下·山东威海·期末）如图，在四边形 $ABCD$ 中，AC 平分 $\angle BAD$ ，且 $\angle B+\angle D=180°$.

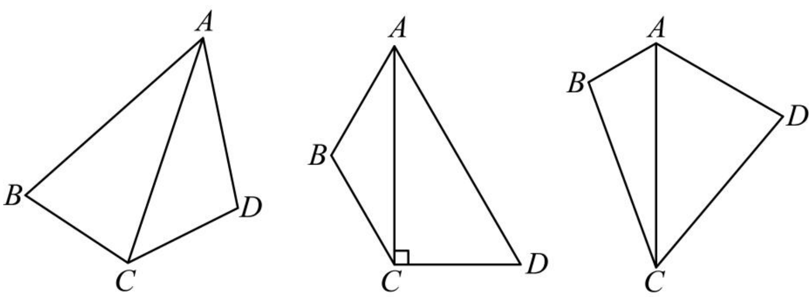


图1　　图2　　图3

(1)求证： $CB=CD$ ；

(2)如图 2，其余条件不变，若 $\angle ACD=90°, AB=CD, \angle D=$ ______°.

(3)如图 3，其余条件不变，若 $\angle BAD=120°$ ，判断 AB, AD, AC 的数量关系，并说明理由.

【变式 7-4】（23-24 七年级下·甘肃兰州·期末）已知：点 P 是 $\angle MON$ 平分线上一点，点 A 在射线 OM 上，作 $\angle APB+\angle MON=180°$ ，交直线 ON 于点 B ，作 $PC\perp ON$ 于点 C .

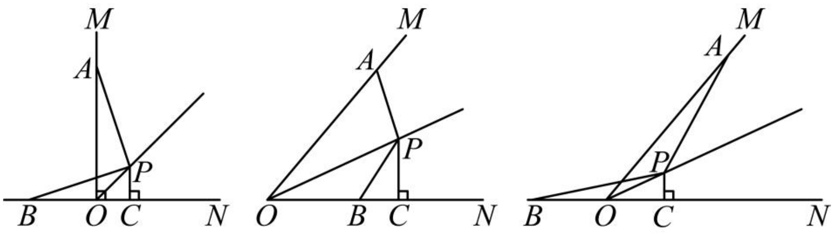


图1　　　　图2　　　　图3

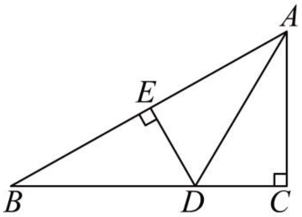
(1)观察猜想：如图1，当$\angle MON=90^{\circ}$时，写出PA和PB的数量关系，并说明理由．

(2)探究证明：如图2，当$\angle MON=50^{\circ}$时，写出OA，OC和BC之间的等量关系，并说明理由．

(3)拓展延伸：如图3，当$\angle MON=\alpha$，点B在射线ON的反向延长线上时，请直接写出线段OA、OC和BC之间的数量关系．

【考点题型八】垂直平分线于角平分线的综合问题

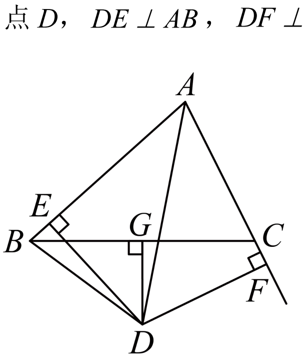
【例 8】（23-24 八年级上·山东滨州·期末）在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中$\angle C=90^{\circ}$，AD是$\angle BAC$的平分线，DE是线段AB的垂直平分线．



(1)求$\angle B$的大小；

(2)求证：$BC=3DC$．

【变式 8-1】（23-24 八年级上·江苏盐城·期中）已知：如图，$\angle BAC$角平分线与BC的垂直平分线DG交于点D，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为E、F．

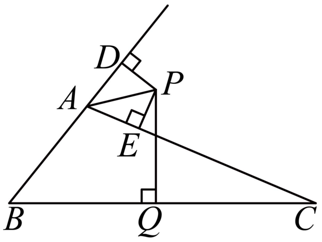


(1)求证：$BE=CF$；

(2)若$AB=8$，$AC=6$，求BE的长．

【变式 8-2】（23-24 八年级下·四川巴中·期末）如图，$\triangle ABC$的外角$\angle DAC$的平分线交BC边的垂直平分线

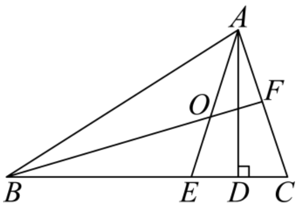
于 P 点，$PD \perp AB$ 于 D，$PE \perp AC$ 于 E.



(1)求证：$BD = CE$；

(2)若 $AB = 6\text{cm}$，$AC = 10\text{cm}$，求 AD 的长.

【变式 8-3】（23-24 八年级上·江西赣州·期末）如图，在$\triangle ABC$中，AD 是高，AE，BF 是角平分线，AE 交 BF 于点 O，$\angle BAC = 80°$，$\angle C = 70°$.

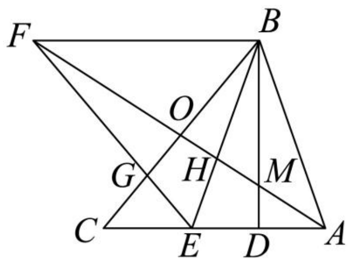


(1) $\angle AOB =$ ______°；

(2)若 $CD = 2$，$AD = 5$，求$\triangle AEC$ 的面积；

(3)作图：在线段 AD 上求作一点 P，使得 $PO + PE$ 最小（保留作图痕迹).

【变式 8-4】（23-24 七年级下·陕西榆林·期末）如图，在$\triangle ABC$中，BD 是边 AC 上的高，BE 为$\angle CBD$ 的角平分线，且 $AD = DE$，AO 是$\triangle ABC$ 的中线，延长 AO 到点 F，使得 $BF \parallel AC$，连接 EF，EF 交 BC 于点 G，AF 交 BE 于点 H，交 BD 于点 M.



(1)试说明：$BF = CD + DE$；

(2)若 $\angle C = 45°$，试说明：$EF \perp BC$.

专题 05 轴对称图形与等腰三角形（5 个考点清单+8 种题型解读）

考点清单

目录

【知识点 01】轴对称图形

1．轴对称图形

（1）定义：如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做轴对称图形，这条直线就是它的对称轴．这时，我们也说这个图形关于这条直线（成轴）对称．

（2）判断一个图形是不是轴对称图形，可利用轴对称图形的定义，将图形对折，看是否能够完全重合，若能够完全重合，则这个图形是轴对称图形，否则这个图形不是轴对称图形．

【注意】

（1）对称轴是一条直线，而不是射线或线段．

（2）一个轴对称图形的对称轴可以有 1 条，也可以有多条，还可以有无数条．

（3）轴对称图形是对于一个图形而言的，它表示具有一定特性（轴对称性）的某一类图形．

2．轴对称

把一个图形沿着某一条直线折叠，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形关于这条直线（成轴）对称，这条直线叫做对称轴，折叠后重合的点是对应点，叫做对称点．

轴对称和轴对称图形的区别与联系

<table>
<tr><td colspan="2">名称
关系</td><td>轴对称</td><td>轴对称图形</td></tr>
<tr><td rowspan="4">区别</td><td>意义不同</td><td>两个图形之间的特殊位置关系</td><td>一个形状特殊的图形</td></tr>
<tr><td>图形个数</td><td>两个图形</td><td>一个图形</td></tr>
<tr><td>对称轴的位置不同</td><td>可能在两个图形的外部，也可能经过两个图形的内部或它们的公共边（点）</td><td>一定经过这个图形</td></tr>
<tr><td>对称轴的数量</td><td>只有一条</td><td>有一条或多条</td></tr>
<tr><td colspan="2">联系</td><td colspan="2">（1）如果把成轴对称的两个图形看成一个整体，那么它就是一个轴对称图形
（2）如果把一个轴对称图形沿对称轴分成两个图形，那么这两个图形成轴对称</td></tr>
</table>

3．轴对称和轴对称图形的性质

（1）两个图形成轴对称的性质：如果两个图形关于某条直线对称，那么对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线．

（2）轴对称图形的性质：轴对称图形的对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线．
（3）轴对称图形（或关于某条直线对称的两个图形）的对应线段（对折后重合的线段）相等，对应角（对折后重合的角）相等．
（4）成轴对称的两个图形全等；轴对称图形被对称轴分成的两部分也全等，但全等的两个图形不一定是轴对称图形．

4．轴对称变换

一个图形与其关于直线 l 对称后的图形之间的关系
（1）由一个平面图形可以得到与它关于一条直线 l 对称的图形，这个图形与原图形的形状、大小完全相同．
（2）新图形上的每一点都是原图形上的某一点关于直线 l 的对称点．
（3）连接任意一对对应点的线段被对称轴垂直平分．

【注意】

（1）成轴对称的两个图形中，任何一个图形都可以看成是由另一个图形经过轴对称变换得到的．
（2）一个轴对称图形也可以看成是以它的一部分为基础经过轴对称变换而得到的．

5．画轴对称图形

几何图形都可以看作由点组成，对于某些图形，我们只要画出图形中的一些特殊点（如线段端点）关于对称轴的对称点，连接这些对称点，就可以得到原图形的轴对称图形．
画轴对称图形的方法：
（1）找——在原图形上找特殊点（如线段的端点）；
（2）画——画各个特殊点关于对称轴对称的点；
（3）连——依次连接各对称点．

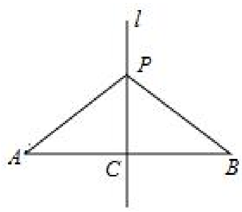
6．用坐标表示轴对称

关于坐标轴对称的点的坐标特点：
（1）点（x，y）关于 x 轴对称的点的坐标为（x，$-y$）；
（2）点（x，y）关于 y 轴对称的点的坐标为（$-x$，y）．
已知两个点的坐标分别为 P_1（x_1，y_1），P_2（x_2，y_2），若 $x_1=x_2$，$y_1+y_2=0$，则点 P_1，P_2 关于 x 轴对称；若 $x_1+x_2=0$，$y_1=y_2$，则点 P_1，P_2 关于 y 轴对称．反之也成立．
在坐标系中画轴对称图形的方法：
（1）计算——计算对称点的坐标；
（2）描点——根据对称点的坐标描点；
（3）连接——依次连接所描各点得到成轴对称的图形．

【知识点 02】线段垂直平分线

1．线段垂直平分线的定义及其性质

（1）线段垂直平分线的定义：经过线段中点并且垂直于这条线段的直线，叫做这条线段的垂直平分线．
（2）性质：线段垂直平分线上的点与这条线段两个端点的距离相等．书写格式：如图所示，点 P 在线段 AB 的垂直平分线上，则 $PA=PB$．



（3）判定：与线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上．书写格式：如图所示，若 $PA=PB$，则点 P 在线段 AB 的垂直平分线上．

【知识点 03】等腰三角形

1．**等腰三角形的性质**

性质 1：等腰三角形的两个底角相等（简写成“等边对等角”).

性质 2：等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合（简写成“三线合一”).

等腰三角形的其他性质：

（1）等腰三角形两腰上的中线、高分别相等．

（2）等腰三角形两底角的平分线相等．

（3）等腰三角形底边上任意一点到两腰的距离之和等于一腰上的高．

（4）当等腰三角形的顶角为 90° 时，此等腰三角形为等腰直角三角形，它的两条直角边相等，两个锐角都是 45°．

2．**等腰三角形的判定**

判定等腰三角形的方法：

（1）定义法：有两边**相等**的三角形是等腰三角形；

（2）如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等（简写成“等角对**等边**”).

数学语言：在△ABC 中，∵∠B=∠C，∴AB=AC（等角对等边).

【注意】

(1)“等角对等边”不能叙述为：如果一个三角形有两个底角相等，那么它的两腰也相等．因为在没有判定出它是等腰三角形之前，不能用“底角”“腰”这些名词，只有等腰三角形才有“底角”“腰”.

(2)“等角对等边”与“等边对等角”的区别：由两边相等得出它们所对的角相等，是等腰三角形的性质；由三角形有两角相等得出它是等腰三角形，是等腰三角形的判定．

3．**等边三角形及其性质**

等边三角形的概念：三边都相等的三角形是等边三角形．

等边三角形的性质：等边三角形的三个内角都相等，并且每一个角都等于 60°．

【注意】

（1）等边三角形是轴对称图形，它有三条对称轴；

（2）等边三角形是特殊的等腰三角形，它具有等腰三角形的一切性质．

4．**等边三角形的判定**

定等边三角形的方法：

（1）定义法：三边都相等的三角形是等边三角形．

（2）三个角都相等的三角形是等边三角形．

（3）有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形．

5．**含 30° 角的直角三角形的性质**

一在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半．

【注意】

（1）该性质是含 30° 角的特殊直角三角形的性质，一般的直角三角形或非直角三角形没有这个性质，更不能应用．

（2）这个性质主要应用于计算或证明线段的倍分关系．

（3）该性质的证明出自于等边三角形，所以它与等边三角形联系密切．

（4）在有些题目中，若给出的角是 15° 时，往往运用一个外角等于和它不相邻的两个内角的和将 15° 的角转化后，再利用这个性质解决问题．

【知识点 04】角的平分线的性质

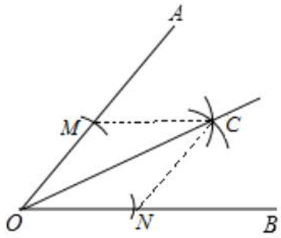
1．**作已知角的平分线**

用尺规作已知角的平分线．已知：∠AOB，求作：∠AOB 的平分线．

作法：（1）以点 O 为圆心，适当长为半径画弧，交 OA 于点 M，交 OB 于点 N.

（2）分别以点 M，N 为圆心，大于 1/2MN 的长为半径画弧，两弧在∠AOB 的内部相交于点 C.

（3）画射线 OC．射线 OC 即为所求．
如图所示：



★作图依据：构造△OMC≌△ONC（SSS）．

2．角的平分线的性质

内容：**角的平分线上的点到角的两边的距离相等.**

【提示】

（1）这里的距离指的是点到角的两边垂线段的长；

（2）该性质可以独立作为证明两条线段相等的依据，不需要再用全等三角形；

（3）使用该结论的前提条件是图中有角平分线、有垂直；

（4）运用角的平分线时常添加的辅助线：由角的平分线上的已知点向两边作垂线段，利用其相等来推导其他结论．

3．角的平分线的判定

（1）内容：角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上．

（2）角的平分线的判定的前提条件是指在角的内部的点到角两边的距离相等时，它才是在角的平分线上，角的外部的点不会在角的平分线上．

【知识点 05】最短路问题

（1）求直线异侧的两点到直线上一点距离的和最小的问题，只要连接这两点，所得线段与直线的交点即为所求的位置．

（2）求直线同侧的两点到直线上一点距离的和最小的问题，只要找到其中一个点关于这条直线的对称点，连接对称点与另一个点，所得线段与该直线的交点即为所求的位置．

题型清单

【考点题型一】轴对称图形的识别

【例 1】（24-25 八年级上·云南曲靖·期末）下列图形中为轴对称图形的是（　　）

A． 　B． 　C． 　D． 

【答案】D

【知识点】轴对称图形的识别

【分析】本题主要考查了轴对称图形的识别，根据轴对称图形的定义进行逐一判断即可：如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做轴对称图形，这条直线就叫做对称轴．

【详解】解：A、不是轴对称图形，故此选项不符合题意；

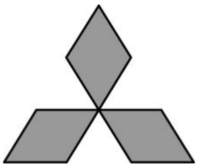
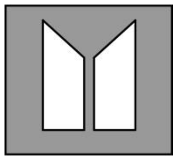
B、不是轴对称图形，故此选项不符合题意；

C、不是轴对称图形，故此选项不符合题意；

D、是轴对称图形，故此选项符合题意；

故选：D.

【变式 1-1】（24-25 八年级上·全国·期末）下列图案中，不是轴对称图形的是（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【知识点】轴对称图形的识别

【分析】本题考查了轴对称图形的定义，根据轴对称图形的定义逐项分析即可，一个图形的一部分，沿着一条直线对折后两部分能够互相重合，那么这个图形就叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴.

【详解】解：选项 A、C、D 均能找到这样的一条直线，使图形沿该直线对折后直线两旁的部分能够完全重合，所以是轴对称图形，

选项 B 不能找到这样的一条直线，使图形沿该直线对折后直线两旁的部分能够完全重合，所以不是轴对称图形.

故选 B.

【变式 1-2】（24-25 七年级上·全国·期末）青花瓷是我国四大名瓷之首，又称白地青花瓷，简称青花，代表着中国人纯粹、淡泊、通透、富有水墨意味的东方审美．下图中是四个青花瓷图案，其中不是轴对称图形的是（　　）

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【知识点】轴对称图形的识别

【分析】本题主要考查了轴对称图形的相关知识，掌握轴对称图形的性质是解题的关键； 把一个图形沿着某一条直线折叠，如果直线两旁的部分能够互相重合，那么称这个图形是轴对称图形.

【详解】解：A．是轴对称图形，故本选项不符合题意；

B．是轴对称图形，故本选项不符合题意；

C．不是轴对称图形，故本选项符合题意；

D．是轴对称图形，故本选项不符合题意；

故选：C．

【变式1-3】（23-24八年级上·黑龙江齐齐哈尔·期末）王老师给全班同学留了一个特色寒假作业，画一张有关兔子的图画，以下四个图形是开学后收上来的图画中的一部分，其中是轴对称图形的是（　　）

A． B． C． D．

【答案】C

【知识点】轴对称图形的识别

【分析】本题考查了轴对称图形的定义，理解定义："将图形沿某一条直线对折，直线两边的图形能完全重合的图形是轴对称图形．"是解题的关键．

【详解】解：A、不符合轴对称图形定义，故此项不符合题意；

B、不符合轴对称图形定义，故此项不符合题意；

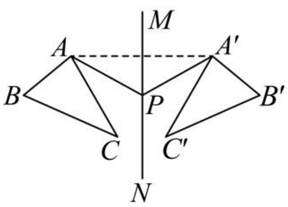
C、符合轴对称图形定义，故此项符合题意；

D、不符合轴对称图形定义，故此项不符合题意；

故选：C．

【考点题型二】根据成轴对称图形的特征进行判断或求解

【例2】（24-25七年级上·全国·期末）如图，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$关于直线MN对称，P为MN上任一点（P不与AA'共线），下列结论中错误的是（　　）



A．$\triangle AA'P$是等腰三角形　　B．MN垂直平分AA'

C．$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的面积相等　　D．直线AB，$A'B'$的交点不一定在MN上

【答案】D

【知识点】根据成轴对称图形的特征进行判断

【分析】该题主要考查了轴对称的性质，解题的关键是掌握轴对称的性质．

根据轴对称的性质解答即可；

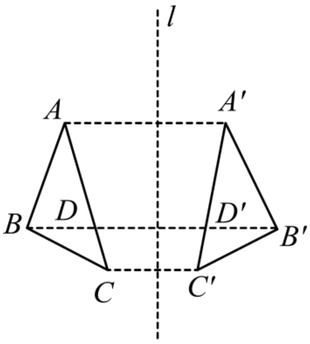
【详解】解：∵$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$关于直线MN对称，P为MN上任意一点，

∴$\triangle AA'P$是等腰三角形，MN垂直平分AA'，CC'，这两个三角形的面积相等，A、B、C选项正确；

直线AB，$A'B'$关于直线MN对称，因此交点一定在MN上．D错误；

故选：D．

【变式2-1】（23-24八年级上·四川南充·期末）如图，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$关于直线l对称，连接AA'，BB'，CC'，其中BB'分别交AC，$A'C'$于点D，D'，下列结论：①$AA' \parallel BB'$；②$\angle ADB = \angle A'D'B'$；③直线$l$垂直平分$AA'$；④直线$AB$与$A'B'$的交点不一定在直线$l$上．其中正确的是（　　）



A．①②③　　B．②③④　　C．①②④　　D．①③④

【答案】A

【知识点】根据成轴对称图形的特征进行判断、根据成轴对称图形的特征进行求解

【分析】本题考查的是轴对称的性质，熟知如果两个图形关于某直线对称，那么对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线是解题的关键．

根据轴对称的性质对各结论进行逐一分析即可．

【详解】解：∵$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$关于直线l对称，

∴$AA' \parallel BB'$，故①正确，

∵$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$关于直线l对称，点D与点D'关于直线l对称的对称点，

∴$\angle ADB = \angle A'D'B'$，故②正确；

∵$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$关于直线l对称，

∴线段AA'、BB'、CC'被直线l垂直平分，

∴直线l垂直平分AA'，故③正确；

∵$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$关于直线l对称，

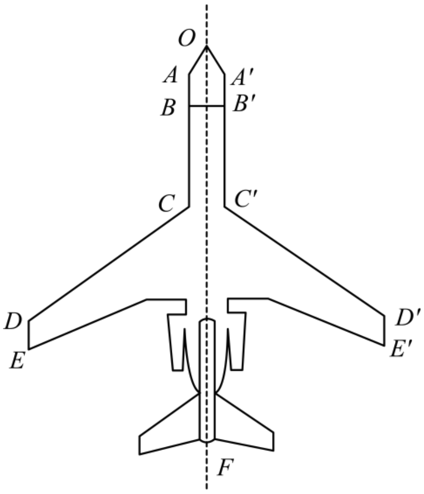
∴线段AC、$A'C'$所在直线的交点一定在直线l上，故④错误，

∴正确的有①②③，

故选：A．

【变式2-2】（23-24七年级下·山西晋中·期末）如图是一款运输机的平面示意图，它是一个轴对称图形，直

线 OF 是其对称轴．下列结论不正确的是（　）



A． $BC = B'C'$　　　　B． $\angle D = \angle D'$

C． OF 平分 $\angle AOA'$　　　　D． BB' 垂直平分 OF

【答案】D

【知识点】根据成轴对称图形的特征进行判断

【分析】本题考查轴对称的性质，解题的关键是掌握轴对称的性质：①关于某条直线对称的两个图形是全等形；②如果两个图形关于某直线对称，那么对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线；两个图形关于某直线对称，如果它们的对应线段或对应线段的延长线相交，那么交点在对称轴上．据此分析即可．

【详解】解：如图是一个轴对称图形，直线 OF 是其对称轴，

A． ∵ BC 与 $B'C'$ 是一组对应边，

∴ $BC = B'C'$，故此选项不符合题意；

B． ∵ $\angle D$ 与 $\angle D'$ 是一组对应角，

∴ $\angle D = \angle D'$，故此选项不符合题意；

C． ∵ $\angle AOF$ 与 $\angle A'OF$ 是一组对应角，

∴ OF 平分 $\angle AOA'$，故此选项不符合题意；

D． ∵直线 OF 是对称轴，

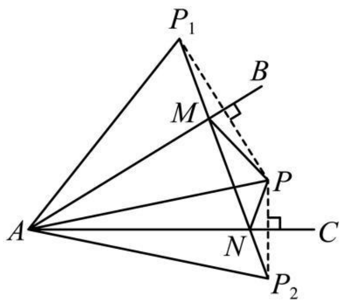
∴ OF 垂直平分 BB'，故此选项符合题意．

故选：D．

【变式 2-3】（23-24 七年级下·四川乐山·期末）如图，P 是 $\angle BAC$ 内部一点，P 关于 AB，AC 的对称点分别是点 P_1，点 P_2，连结 P_1P_2 分别与 AB，AC 交于点 M，点 N，连结 PM，PN，下列结论：

①$\triangle P_1P_2A$ 是等边三角形；　②$\angle P_1AP_2 = 2\angle BAC$；

③$\triangle PMN$ 的周长等于线段 P_1P_2 的长；　④$2\angle BAC+\angle MPN=180°$；



正确的个数为：

A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

【答案】C

【知识点】线段垂直平分线的性质、根据成轴对称图形的特征进行求解、三角形的外角的定义及性质、等边对等角

【分析】此题考查了轴对称的性质，以及线段垂直平分线的性质，利用了转化的思想，熟练掌握线段垂直平分线性质是解本题的关键．由题意得 $\angle P_1AP=2\angle PAB,\angle P_2AP=2\angle PAC,$ 从而得出 $\angle P_1AP_2=2\angle PAB+2\angle PAC=2(\angle PAB+\angle PAC)=2\angle BAC,$ 可判断②，由 $\angle P_1AP_2=2\angle BAC$ 且 $\angle BAC$ 的大小没有确定，可得出 $\angle P_1AP_2$ 的大小没有确定，可判断①，由对称性可得 AB 为线段 PP_1 的垂直平分线，AC 为线段 PP_2 的垂直平分线，从而得出 $MP=MP_1,NP=NP_2,$ 从而得出 $\triangle PMN$ 的周长 $=PM+PN+MN=MP_1+MP_2+MN=P_1P_2$，可判断③，由题意得 $\angle AEP=\angle AFP=90°$，可得 $\angle BAC+\angle EPF=180°$，从而得出 $\angle BAC+\angle MPN+\angle MPP_1+\angle NPP_2=180°$，即得出 $MP=MP_1,NP=NP_2,$ 所以 $\angle MPP_1=\angle MP_1P,\angle NPP_2=\angle NP_2P$，再求解即可判断④.

【详解】解：$\because P$ 关于 AB，AC 的对称点分别是点 P_1，点 P_2，

$\therefore \angle P_1AP=2\angle PAB,\angle P_2AP=2\angle PAC,$

$\therefore \angle P_1AP_2=2\angle PAB+2\angle PAC=2(\angle PAB+\angle PAC)=2\angle BAC,$

故②正确，

$\because \angle P_1AP_2=2\angle BAC$，$\angle BAC$ 的大小没有确定，

$\therefore \angle P_1AP_2$ 的大小没有确定，

$\therefore \triangle P_1P_2A$ 不一定是等边三角形，

故①错误，

$\because$ P 关于 AB ，AC 的对称点分别是点 P_1，点 P_2，

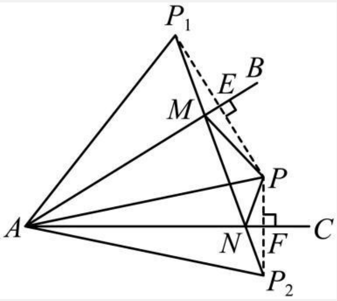
$\therefore AB$ 为线段 PP_1 的垂直平分线，AC 为线段 PP_2 的垂直平分线，

$\therefore MP = MP_1, NP = NP_2$,

$\therefore \triangle PMN$ 的周长 $= PM + PN + MN = MP_1 + MP_2 + MN = P_1P_2$，

故③正确，

如图，设 AB 与 PP_1 交于点 E，AC 与 PP_2 交于点 F，



由题意得 $\angle AEP = \angle AFP = 90°$，

$\therefore \angle BAC + \angle EPF = 180°$，

$\therefore \angle BAC + \angle MPN + \angle MPP_1 + \angle NPP_2 = 180°$，

$\because MP = MP_1, NP = NP_2$,

$\therefore \angle MPP_1 = \angle MP_1P, \angle NPP_2 = \angle NP_2P$，

$\because \angle MPP_1 + \angle MP_1P + \angle NPP_2 + \angle NP_2P + \angle MPN = 180°$，

$\because \angle MPP_1 + \angle NPP_2 = 90° - \frac{1}{2}\angle MPN$，

$\therefore \angle BAC + \angle MPN + 90° - \frac{1}{2}\angle MPN = 180°$ ，

$\therefore 2\angle BAC + \angle MPN = 180°$

故④正确，

故选：C.

【考点题型三】坐标与图形变化--轴对称

【例 3】（24-25 八年级上·甘肃定西·期末）点 $P(-3,6)$ 关于 y 轴对称点的坐标是（　　）

A．$(3,6)$　　　B．$(-2,-6)$　　　C．$(2,-6)$　　　D．$(6,-2)$

【答案】A

【知识点】坐标与图形变化——轴对称

【分析】本题考查了关于 y 轴对称的点的坐标，解决本题的关键是掌握好对称点的坐标规律：关于 x 轴对称的点，横坐标相同，纵坐标互为相反数；关于 y 轴对称的点，纵坐标相同，横坐标互为相反数；关于原点对称的点，横坐标与纵坐标都互为相反数．

利用平面直角坐标系内两点关于 y 轴对称时：纵坐标不变，横坐标互为相反数，进行求解．

【详解】解：点 $P(-3,6)$ 关于 y 轴对称点的坐标是 $(3,6)$，

故选：A．

【变式 3-1】（24-25 八年级上·全国·期末）若点 P 的坐标为 $(-4,3)$，则点 P 关于 y 轴对称的点的坐标是（　）

A．$(-3,4)$　　　B．$(4,3)$　　　C．$(-3,-4)$　　　D．$(4,-3)$

【答案】B

【知识点】坐标与图形变化——轴对称

【分析】本题考查关于 y 轴对称的点的坐标的特点，解决本题的关键是掌握好对称点的坐标规律：关于 y 轴对称的点，纵坐标相同，横坐标互为相反数．

根据“关于 y 轴对称的点，纵坐标相同，横坐标互为相反数”即可求解．

【详解】解：∵关于 y 轴对称的点，纵坐标相同，横坐标互为相反数，点 P 的坐标为 $(-4,3)$，

∴点 P 关于 y 轴对称的点的坐标是 $(4,3)$．

故选：B．

【变式 3-2】（24-25 八年级上·全国·期末）在平面直角坐标系中，点 $A(a,-6)$ 与点 $B(2,b)$ 关于 y 轴对称，则 $ab=$______．

【答案】12

【知识点】坐标与图形变化——轴对称

【分析】本题考查了关于 y 轴对称的点的坐标规律，根据“关于 y 轴对称的点，纵坐标相同，横坐标互为相反数”求解，解题的关键是熟记，关于 x 轴对称的点，横坐标相同，纵坐标互为相反数；关于 y 轴对称的点，

纵坐标相同，横坐标互为相反数．

【详解】解：∵点 $A(a,-6)$ 与点 $B(2,b)$ 关于 y 轴对称，

∴ $a=-2$， $b=-6$，

∴ $ab=-2\times(-6)=12$，

故答案为：12．

【变式 3-3】（23-24 八年级上·福建厦门·期末）若点 $P(1,a)$ 与 $Q(b,2)$ 关于 x 轴对称，则代数式 $a+b$ 的值为______．

【答案】-1

【知识点】坐标与图形变化——轴对称

【分析】本题考查坐标与轴对称，根据关于 x 轴对称的点的横坐标相同，纵坐标互为相反数，求出 a,b 的值，进而求出代数式的值即可．

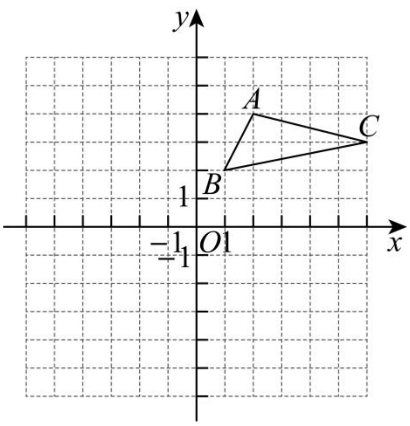
【详解】解：∵点 $P(1,a)$ 与 $Q(b,2)$ 关于 x 轴对称，

∴ $b=1,a=-2$，

∴ $a+b=-2+1=-1$；

故答案为：-1．

【变式 3-4】（23-24 八年级上·辽宁大连·期末）如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 的三个顶点都在格点上，点 A 的坐标为 $(2,4)$．



(1)画出$\triangle ABC$ 关于 y 轴对称的 $\triangle A_1B_1C_1$；

(2)直接写出点 A 关于 x 轴的对称点 A_2 的坐标为_______；

(3)在 x 轴上找到一点 P，使 $PB+PC$ 的和最小（标出点 P 即可，不用求点 P 的坐标）

【答案】(1)见解析

(2)$(2,-4)$

(3)见解析

【知识点】坐标与图形变化——轴对称、最短路径问题

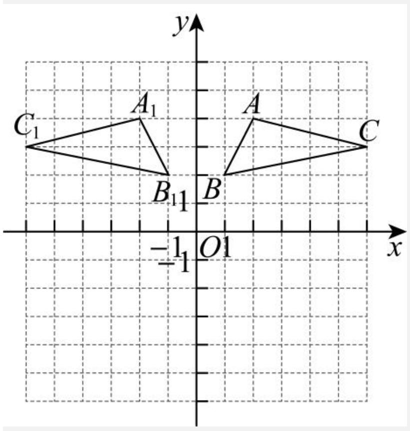
【分析】本题考查了图形的轴对称变换等知识，得出变换后对应点坐标位置及是解题关键.

（1）根据关于 y 轴对称的点的坐标特点得出各对应点坐标，顺次连接即可；

（2）根据关于 x 轴对称的点的坐标特点求解即可；

（3）根据关于 x 轴对称的点的坐标特点得出点 B 关于 x 轴对称的点 B'，连接 CB'，交 x 轴于点 P，即可得答案.

【详解】（1）解：如图，$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求，

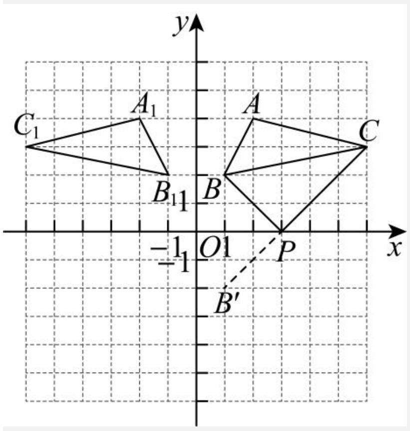


；

（2）解：点 $A(2,4)$ 关于 x 轴的对称点 A_2 坐标为 $(2,-4)$，

故答案为：$(2,-4)$；

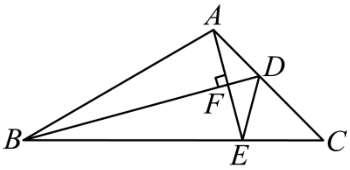
（3）解：如图，点 P 即为所求，



.

【考点题型四】利用垂直平分线的性质求解

【例 4】（23-24 八年级下·甘肃张掖·期末）如图，在$\triangle ABC$中，点E是BC边上的一点，连接AE，BD垂直平分AE，垂足为F，交AC于点D．连接DE．



(1)若$\triangle ABC$的周长为19，$\triangle DEC$的周长为7，求AB的长；

(2)若$\angle ABC=30°$，$\angle C=45°$，求$\angle CDE$的度数．

【答案】(1)6

(2)$60°$

【知识点】全等三角形综合问题、三角形内角和定理的应用、三角形的外角的定义及性质、线段垂直平分线的性质

【分析】本题考查的是线段的垂直平分线的性质，全等三角形的判定与性质，三角形的内角和定理的应用，三角形的外角的性质，掌握全等三角形的性质和判定是解本题的关键．

（1）先证明$AB=BE$，$AD=DE$，结合$\triangle ABC$的周长为19，$\triangle DEC$的周长为7，可得$AB+BE=19-7=12$，从而可得答案；

（2）先求解$\angle BAC=180°-30°-45°=105°$，证明$\triangle BAD\cong\triangle BED$，再利用三角形全等的性质可得答案；

【详解】（1）解：$\because$ BD是线段AE的垂直平分线，

$\therefore AB=BE$，$AD=DE$，

$\because\triangle ABC$的周长为19，$\triangle DEC$的周长为7，

$\therefore AB+BE+CE+CD+AD=19$，$CD+EC+DE=CD+CE+AD=7$，

$\therefore AB+BE=19-7=12$，

$\therefore AB=BE=6$；

（2）$\because\angle ABC=30°$，$\angle C=45°$，

$\therefore\angle BAC=180°-30°-45°=105°$，

在$\triangle BAD$和$\triangle BED$中，

$$\begin{cases} BA=BE \\ BD=BD \\ DA=DE \end{cases},$$