专题 07 旋转问题中作辅助线的技巧（两种技巧精讲精练+过关检测）

题型归纳

★ 旋转问题中作辅助线的技巧

- ❶ 利用旋转构成等边三角形
- ❷ 利用旋转构成轴对称图形

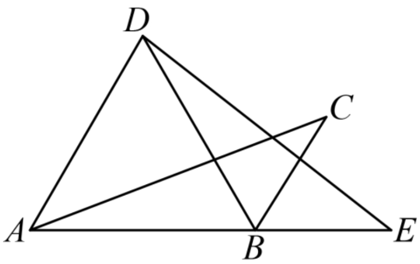
精讲精练

题型 01 利用旋转构成等边三角形

【典例分析】

【例 1-1】（23-24 九年级上·天津河西·期末）

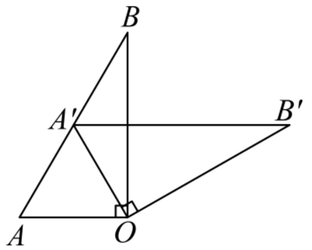
1．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=120°$，将$\triangle ABC$绕点B顺时针旋转$60°$得$\triangle DBE$，其中点A，C的对应点分别是D，E，连接AD．下列结论一定正确的是（　）



A．$\angle ABD=\angle E$　　B．$\angle CBE=\angle C$　　C．$AD=BC$　　D．$AD\parallel BC$

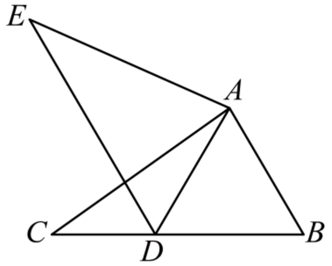
【例 1-2】（22-23 九年级上·云南昭通·阶段练习）

2．如图，在$\triangle AOB$中，$\angle AOB=90°$，$\angle B=30°$，$\triangle A'OB'$是由$\triangle AOB$绕点 O 顺时针旋转$\alpha\left(\alpha<180°\right)$角度得到的，若点$A'$在$AB$上，则$\angle A'OB=$____．



【例 1-3】（22-23 九年级上·山东）

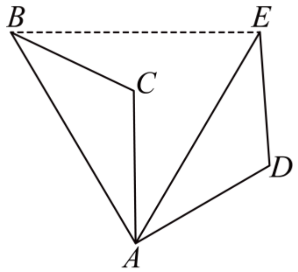
3． 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=20$，$BC=36$，$\angle B$=60°，将$\triangle ABC$绕点A按顺时针旋转一定角度得到$\triangle ADE$，当点B的对应点D恰好落在BC边上时，求CD的长．



【变式演练】

【变式 1-1】（23-24 九年级上·贵州黔东南·阶段练习）

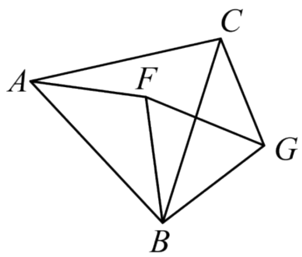
4．如图所示，将$\triangle ABC$绕点A顺时针旋转$60°$得到$\triangle AED$，若线段$AB=3$，则BE等于（ ）



A．3　　　B．4　　　C．6　　　D．9

【变式 1-2】（23-24 九年级上·广东东莞·期末）

5．如图，点F是等边三角形ABC内一点，$BF=3$．将$\triangle ABF$绕点B顺时针旋转$60°$得$\triangle CBG$，连接FG，$FG=$______．



【变式 1-3】（22-23 八年级下·陕西西安·阶段练习）

6．旋转是一种重要的图形变换，当图形中有一组邻边相等时，往往可以通过旋转解决问题，如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=CD$，$\angle ABC=120^\circ$，$\angle ADC=60^\circ$，$AB=2$，$BC=1$．

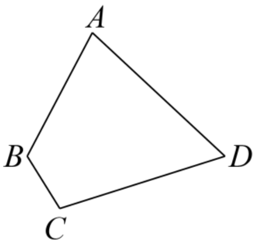


图1

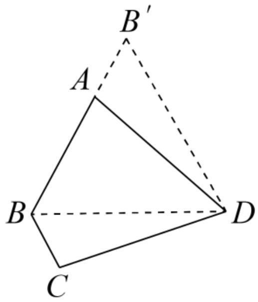


图2

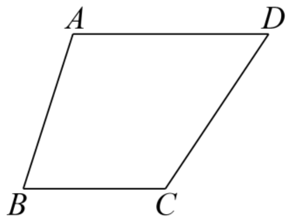


图 3

(1)如图 2，在图 1 的基础上连接 BD，由于 $AD=CD$，所以可将$\triangle DCB$绕点 D 顺时针方向旋转60°，得到$\triangle DAB'$，则$\triangle BDB'$的形状是______，四边形 $ABCD$ 的面积是_____．

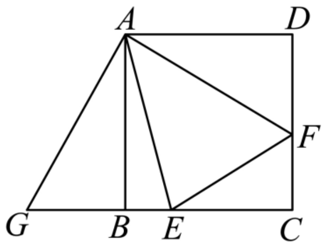
(2)如图 3，四边形 $ABCD$ 中，$AD=CD$，$\angle ABC=75^\circ$，$\angle ADC=60^\circ$，$AB=2$，$BC=\sqrt{2}$，求四边形 $ABCD$ 的面积．

题型 02 利用旋转构成轴对称图形

【典例分析】

【例 2-1】（22-23 八年级下·江苏常州·期中）

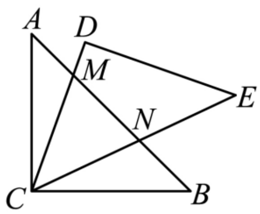
7．如图，在边长为 6 的正方形 $ABCD$ 内作$\angle EAF=45^\circ$，AE 交 BC 于点 E，AF 交 CD 于点 F，连接 EF，将$\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转90°得到$\triangle ABG$．若 $DF=3$，则 BE 的长为（　）



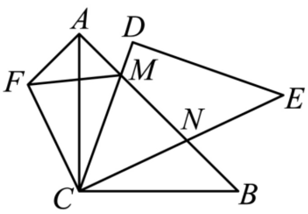
A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

【例 2-2】（22-23 九年级上·天津滨海新·期中）

8．将两块斜边长度相等的等腰直角三角形板如图①摆放，如果把图①中的$\triangle BCN$绕点 C 逆时针旋转90°得$\triangle ACF$，连接 MF，如图②．下列结论错误的是（　）



图①



图②

A．$\triangle ABC\cong\triangle CED$　B．$\triangle BCN\cong\triangle ACF$　C．$\triangle AMC\cong\triangle BCN$　D．$\triangle MFC\cong\triangle MNC$

【例 2-3】（20-21 九年级上·河南安阳·期中）

9．将两块斜边长相等的等腰直角三角尺按如图①摆放，斜边 AB 分别交 CD，CE 于 M，N 点．

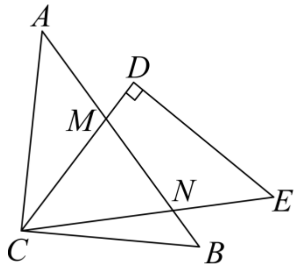


图1

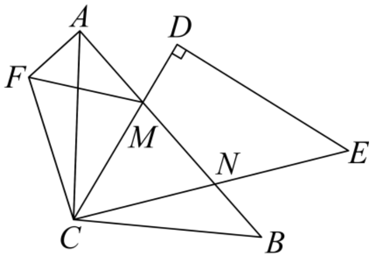


图2

(1)如果把图①中的 ΔBCN 绕点 C 逆时针旋转 $90°$ 得到 ΔACF，连接 FM，如图②．求证：$\Delta CMF \cong \Delta CMN$；

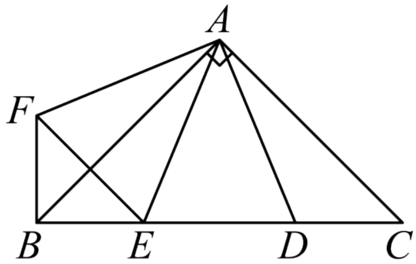
(2)将 ΔCED 绕点 C 旋转，当点 M、N 在 AB 上（不与 A、B 重合）时，线段 AM、MN、NB 之间有一个不变的关系式，请你写出这个关系式，并说明理由．

【变式演练】

【变式 2-1】（23-24 九年级上·浙江台州·阶段练习）

10．如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，D、E 是斜边 BC 上两点，且 $\angle DAE = 45°$，将 $\triangle ADC$ 绕点 A 顺时针 $90°$ 旋转后，得到 $\triangle AFB$，连接 EF．下列结论中正确的个数有（　　）

① $\angle EAF = 45°$；② EA 平分 $\angle CEF$；③ $BE^2 + DE^2 = DE^2$．



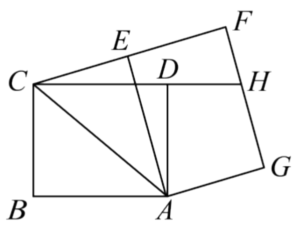
A．1个　　　　B．2个　　　　C．3个　　　　D．4个

【变式 2-2】（22-23 八年级下·安徽六安·期末）

11．如图，将矩形 $ABCD$ 绕点 A 旋转，得到矩形 $AEFG$，使 C，E，F 在一条直线上，已知 $AB = 4$，$BC = 3$．请完成下列填空：

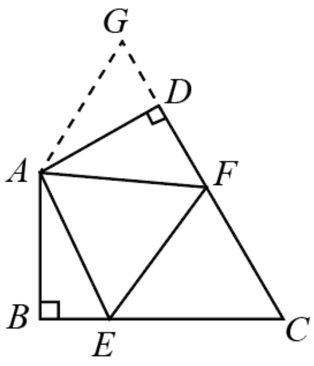
（1）线段 CE 的长是________．

（2）若 CD 的延长线交 FG 于 H，则 $FH =$________．

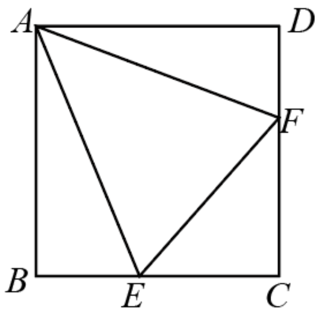


【变式 2-3】(21-22 九年级上·山东济南·期中)

12．问题背景：在解决“半角模型”问题时，旋转是一种常用方法．如图①，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle BAD=120^\circ$，$\angle B=\angle ADC=90^\circ$，点 E，F 分别是 BC，CD 上的点，且 $\angle EAF=60^\circ$，连接 EF，探究线段 BE，EF，DF 之间的数量关系．



图①



图②

(1)探究发现：小明同学的方法是将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 120°至 $\triangle ADG$ 的位置，使得 AB 与 AD 重合，然后证明 $\triangle AGF\cong\triangle AEF$，从而得出结论：____________；

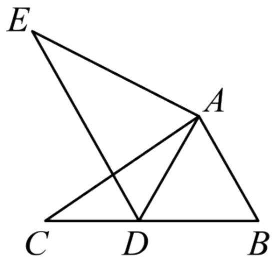
(2)拓展延伸：如图②，在正方形 $ABCD$ 中，E、F 分别在边 BC、CD 上，且 $\angle EAF=45^\circ$，连接 EF，(1) 中的结论是否仍然成立？若成立，请写出证明过程，若不成立，请说明理由．

(3)尝试应用：在 (2) 的条件下，若 $BE=3$，$DF=2$，求正方形 $ABCD$ 的边长．

一、单选题

(23-24 九年级上·河南安阳·期末)

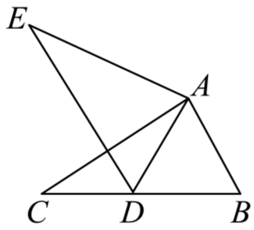
13．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=1$，$BC=2.6$，$\angle B=60^\circ$，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转得到 $\triangle ADE$，当点 B 的对应点 D 恰好落在 BC 边上时，则 CD 的长为（　　）



A．1　　　　　　B．1.6　　　　　　C．2　　　　　　D．2.6

（23-24 九年级上·浙江宁波·期末）

14．如图，将$\triangle ABC$绕点A顺时针旋转$60°$得到$\triangle ADE$，此时点B的对应点D恰好落在BC边上，则$\angle EDC$的度数为（　　）



A．30°　　　　　　B．45°　　　　　　C．60°　　　　　　D．70°

二、填空题

（22-23 九年级上·广东广州·期中）

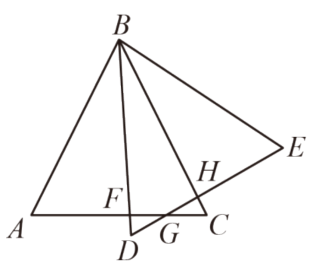
15．如图，已知$\triangle ABC$中，$AB=BC$，将$\triangle BAC$绕点B沿逆时针方向旋转$n^{\circ}\left(0<n<\angle ABC\right)$得到$\triangle BDE$，$BD$交$AC$于点$F$，$DE$交$AC$、$BC$于点$G$、$H$，则以下结论正确的是________.

①$\triangle BAF\cong\triangle BEH$；

②连接BG，FH，则$BG\perp FH$

③当$BD\perp AC$时，DF的长度最大；

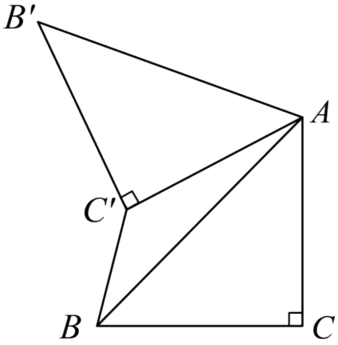
④当点H是DE的中点时，四边形$BFGH$的面积等于$BF\times GH$.



（23-24 九年级上·天津和平·阶段练习）

16．如图，已知$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=BC=2\sqrt{2}$，将$\triangle ABC$绕点A顺时针方向旋转$60°$

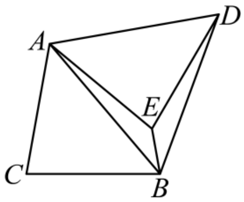
到$\triangle AB'C'$的位置，连接$C'B$，则$C'B$的长为____.



三、解答题

（23-24九年级上·福建福州·期末）

17．如图，在$\triangle ABC$中，$AC=BC$，将$\triangle ABC$绕点A逆时针旋转$60°$，得到$\triangle ADE$，连接BD，BE.

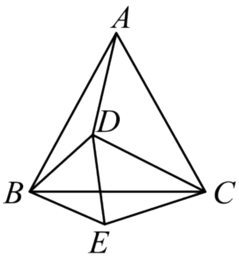


(1)判断$\triangle ABD$的形状；

(2)求证：BE平分$\angle ABD$.

（23-24九年级上·福建厦门·期末）

18．如图，点D是$\triangle ABC$内一点，把$\triangle ABD$绕点B顺时针方向旋转$60°$得到$\triangle CBE$，若$AD=4$，$BD=3$，$CD=5$.



(1)判断$\triangle DEC$的形状，并说明理由；

(2)求$\angle ADB$的度数.

1．D

【分析】本题考查了旋转的性质，等边三角形的判定和性质，平行线的判定，根据旋转的性质，等边三角形的判定和性质，平行线的判定进行判断即可，熟练掌握旋转的性质是解题的关键.

【详解】解：$\because$将$\triangle ABC$绕点B顺时针旋转$60°$得$\triangle DBE$，

$\therefore \angle ABD=\angle CBE=60°$， $AB=BD$，故A、B、C选项不一定正确，

$\therefore \triangle ABD$是等边三角形，

$\therefore \angle DAB=60°$，

$\therefore \angle DAB=\angle CBE$，

$\therefore AD\parallel BC$，

故选：D.

2．30°##30度

【分析】本题主要考查了旋转的性质，等边三角形的性质与判定， 三角形内角和定理，根据旋转的性质得出$OA=OA'$，得出$\triangle OAA'$是等边三角形．则$\angle AOA'=60°$，则可得出答案.

【详解】解：$\because \angle AOB=90°$，$\angle B=30°$，

$\therefore \angle A=60°$.

$\because \triangle A'OB'$是由$\triangle AOB$绕点O顺时针旋转$\alpha\left(\alpha<180°\right)$角度得到的，

$\therefore OA=OA'$.

$\therefore \triangle OAA'$是等边三角形.

$\therefore \angle AOA'=60°$，

$\therefore \angle A'OB=\angle AOB-\angle AOA'=30°$

故答案为：$30°$.

3．$CD=16$

【分析】本题考查了旋转的性质，等边三角形的性质与判定，掌握等边三角形的性质与判定是解题的关键．根据题意得出$\triangle ADB$是等边三角形，进而根据$CD=BC-BD$即可求解.

【详解】解：$\because$将$\triangle ABC$绕点A按顺时针旋转一定角度得到$\triangle ADE$，

$\therefore AD=AB$，

又$\because \angle B=60°$，

$\therefore \triangle ADB$ 是等边三角形，

$\therefore AB=AD=BD=20$，

$\therefore CD=BC-BD=16$．

4．A

【分析】本题考查了旋转的性质，等边三角形的判定与性质，根据旋转的性质可得 $AB=AE$，$\angle BAE=60^{\circ}$，然后判断出 $\triangle AEB$ 是等边三角形，再根据等边三角形的三条边都相等可得 $BE=AB$，熟练掌握其性质是解决此题的关键．

【详解】$\because \triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle AED$，

$\therefore AB=AE$，$\angle BAE=60^{\circ}$，

$\therefore \triangle AEB$ 是等边三角形，

$\therefore BE=AB$，

$\because AB=3$，

$\therefore BE=3$．

故选：A．

5．3

【分析】本题考查等边三角形的判定与性质，旋转的性质，全等三角形的性质，得到 $\triangle BFG$ 是等边三角形是解决问题的关键．

根据已知条件可得到 $\triangle BFG$ 是等边三角形，从而得到 $BF=FG=3$．

【详解】解：$\because$ 将 $\triangle ABF$ 绕点 B 顺时针方向旋转 60° 得到 $\triangle CBG$，

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CBG$

$\therefore \angle ABF=\angle CBG$，$BF=BG$

$\therefore \angle ABF+FBC=\angle CBG+FBC$

$\therefore \angle ABC=\angle FBG=60^{\circ}$

$\therefore \triangle BFG$ 是等边三角形，

$\therefore BF=FG=3$，

故答案为：3．

6．(1)等边三角形，$\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

(2)$\dfrac{5\sqrt{3}}{2}-1$

【分析】（1）首先证明 $\triangle BCD \cong \triangle B'AD$，则 $BD=DB'$，$\angle BDB'=60^{\circ}$，所以 $\triangle BDB'$ 是等边三

角形；知等边三角形的边长为 3，求出 $S_{\triangle BDB'}$ 即可；

（2）类比（1），连接 BD，由于 $AD=CD$，所以可将 $\triangle BCD$ 绕点 D 顺时针方向旋转 $60°$，得到 $\triangle DAB'$，连接 BB'，延长 BA，作 $B'E\perp BE$；证 $\triangle AFB'$ 是等腰直角三角形，$\triangle AEB$ 是等腰直角三角形，利用勾股定理计算 $AE=B'E=1$，$BB'=\sqrt{10}$，求 $\triangle ABB'$ 和 $\triangle BDB'$ 的面积和即可．

【详解】（1）如图 2，连接 BD，由于 $AD=CD$，所以可将 $\triangle DCB$ 绕点 D 顺时针方向旋转 $60°$，得到 $\triangle DAB'$，

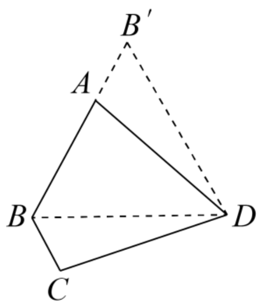


图2

$\because \triangle BCD \cong \triangle B'AD$

$\therefore BD=B'D$，$\angle BDB'=60°$，

$\therefore \triangle BDB'$ 是等边三角形，

$\because \angle ABC=120°, \angle ADC=60°$

$\therefore \angle C+\angle BAD=180°$，

$\therefore \angle BAD+\angle DAB'=180°$，

$\therefore$ 点 B, A, B' 三点在同一直线上，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积 = 等边三角形 BDB' 的面积，

$\because BC=AB'=1$

$\therefore BB'=AB+AB'=2+1=3$，

$S_{\text{四边形}ABCD}=S_{\triangle BOB'}=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$；

（2）如图 3，连接 BD，由于 $AD=CD$，所以可将 $\triangle BCD$ 绕点 D 顺时针方向旋转 $60°$，得到 $\triangle DAB'$，

连接 BB'，延长 BA，作 $B'E\perp BE$；

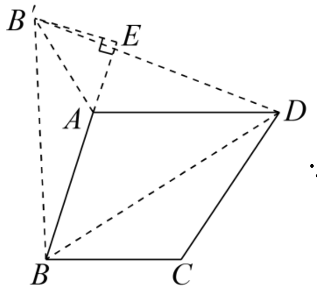


图 3

$\because \begin{cases} AD = CD \\ \angle CDB = \angle ADB' \\ BD = B'D \end{cases}$，

$\therefore \triangle BCD \cong \triangle B'AD$

$\therefore \angle C = \angle B'AD$，

$\therefore S_{四边形ABCD} = S_{四边形BDB'A}$，

$\because \angle ABC = 75^\circ$，$\angle ADC = 60^\circ$，

$\therefore \angle C + \angle BAD = 360^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 225^\circ$，

$\therefore \angle BAB' = 360^\circ - \angle BAD - \angle B'AD = 135^\circ$

$\therefore \angle B'AE = 45^\circ$，

$\because B'A = BC = \sqrt{2}$，

$\therefore B'E = AE = 1$，

$\therefore BE = AB + AE = 2 + 1 = 3$，

$\therefore BB' = \sqrt{10}$，等边 $\Delta DBB'$，BB' 上的高 $= \sqrt{10} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{2}$，

$\therefore S_{\Delta ABB'} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot B'E = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$，

$\therefore S_{\vartriangle BDB'} = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \frac{\sqrt{30}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore S_{四边形ABCD} = S_{四边形BDB'A} = S_{\vartriangle BDB'} - S_{\vartriangle ABB'} = \frac{5\sqrt{3}}{2} - 1$.

【点睛】本题考查了图形的旋转变换，三角形全等，勾股定理，等积代换思想，类比思想等．构造直角三角形，求出三角形的高是解决问题的关键．

7．B

【分析】本题考查旋转的性质、全等三角形的判定和性质、勾股定理，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答．

根据旋转的性质得到 $\triangle ADF \cong \triangle ABG$，即 $DF = BG, \angle DAF = \angle BAG$，然后根据题目中的条件，可以得到 $\triangle EAG \cong \triangle EAF$，再根据 $DF = 3$，$AB = 6$ 和勾股定理，可以求出 BE 的长，