

特训 04 第 8-9 章压轴题 (题型归纳)

一、解答题

1. 找规律: 观察算式

$$1^3=1$$

$$1^3+2^3=9$$

$$1^3+2^3+3^3=36$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3=100$$

...

(1) 按规律填空)

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+10^3=$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+n^3=$$

(2) 由上面的规律计算: $11^3+12^3+13^3+14^3+\dots+50^3$ (要求: 写出计算过程)

(3) 思维拓展: 计算: $2^3+4^3+6^3+\dots+98^3+100^3$ (要求: 写出计算过程)

2. 阅读下列材料: 小明为了计算 $1+2+2^2+\dots+2^{2020}+2^{2021}$ 的值, 采用以下方法:

$$\text{设 } S=1+2+2^2+\dots+2^{2020}+2^{2021} \quad \textcircled{1}$$

$$\text{则 } 2S=2+2^2+\dots+2^{2021}+2^{2022} \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2}-\textcircled{1} \text{ 得, } 2S-S=S=2^{2022}-1.$$

请仿照小明的方法解决以下问题:

$$(1) 2+2^2+\dots+2^{20}=$$

$$(2) \text{ 求 } 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{50}}=$$

$$(3) \text{ 求 } (-2)+(-2)^2+\dots+(-2)^{100} \text{ 的和; (请写出计算过程)}$$

$$(4) \text{ 求 } a+2a^2+3a^3+\dots+na^n \text{ 的和 (其中 } a \neq 0 \text{ 且 } a \neq 1 \text{)}. \text{ (请写出计算过程)}$$

3. 观察下面三行单项式:

$$x, 2x^2, 4x^3, 8x^4, 16x^5, 32x^6, \dots; \quad \textcircled{1}$$

$$-2x, 4x^2, -8x^3, 16x^4, -32x^5, 64x^6, \dots; \quad \textcircled{2}$$

$$2x^2, -3x^3, 5x^4, -9x^5, 17x^6, -33x^7, \dots; \quad \textcircled{3}$$

根据你发现的规律, 解答下列问题:

$$(1) \text{ 第 } \textcircled{1} \text{ 行的第 } 8 \text{ 个单项式为}$$

$$(2) \text{ 第 } \textcircled{2} \text{ 行的第 } 9 \text{ 个单项式为}; \text{ 第 } \textcircled{3} \text{ 行的第 } 10 \text{ 个单项式为}$$

$$(3) \text{ 取每行的第 } 9 \text{ 个单项式, 令这三个单项式的和为 } A. \text{ 当 } x=\frac{1}{2} \text{ 时, 求 } 512\left(A+\frac{1}{4}\right) \text{ 的值.}$$

4. 阅读下列材料: 一般地, n 个相同的因数 a 相乘 $a \cdot a \dots$, 记为 a^n . 如 $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$, 此时, 3 叫做以 2 为底 8 的对数, 记为 $\log_2 8$ (即 $\log_2 8 = 3$). 一般地, 若 $a^n = b$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$, $b > 0$), 则 n 叫做以 a 为底 b 的对数, 记为 $\log_a b$ (即 $\log_a b = n$. 如 $3^4 = 81$, 则 4 叫做以 3 为底 81 的对数, 记为 $\log_3 81$ (即 $\log_3 81 = 4$)).

$$(1) \text{ 计算以下各对数的值: } \log_2 4 =, \log_2 16 =, \log_2 64 =.$$

(2) 写出 (1) $\log_2 4$ 、 $\log_2 16$ 、 $\log_2 64$ 之间满足的关系式_____.

(3) 由 (2) 的结果, 请你能归纳出一个一般性的结论: $\log_a M + \log_a N = \underline{\hspace{2cm}}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$).

(4) 设 $a^n = N$, $a^m = M$, 请根据幂的运算法则以及对数的定义说明上述结论的正确性.

5. 阅读材料: 3^1 的末尾数字是 3, 3^2 的末尾数字是 9, 3^3 的末尾数字是 7, 3^4 的末尾数字是 1, 3^5 的末尾数字是 3,, 观察规律, $3^{4n+1} = (3^4)^n \times 3$, $\therefore 3^4$ 的末尾数字是 1, $\therefore (3^4)^n$ 的末尾数字是 1, $\therefore (3^4)^n \times 3$ 的末尾数字是 3, 同理可知, 3^{4n+2} 的末尾数字是 9, 3^{4n+3} 的末尾数字是 7. 解答下列问题:

(1) 3^{2021} 的末尾数字是_____, 14^{2022} 的末尾数字是_____;

(2) 求 2^{2022} 的末尾数字;

(3) 求证: $12^{2024} + 37^{2018}$ 能被 5 整除.

6. (1) 填空: $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$;

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1;$$

$$(x-1)(x^3+x^2+x+1) = \underline{\hspace{2cm}};$$

(2) 猜想: $(x-1)(xn+xn^{l-1}+\dots+x+1) = \underline{\hspace{2cm}}$ (n 为大于 3 的正整数), 并证明你的结论;

(3) 运用 (2) 的结论计算 $(3^{2019}+3^{2018}+3^{2017}+\dots+3^2+3+1) - (3^{1050 \times 2})^2 \div (8 \times 3^{80})$;

(4) $3^{2019} - 3^{2018} + 3^{2017} - 3^{2016} + \dots + 3^5 - 3^4 + 3^3 - 3^2 + 3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 已知: $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ $(x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1$

$$(x-1)(x^3+x^2+x+1) = x^4 - 1 \qquad (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = x^5 - 1$$

.....

(1) 当 $x=3$ 时, $(3-1) \times (3^3+3^2+3+1) = 3^4 - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 试求: $2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$ 的值.

(3) 判断 $2^{2010} + 2^{2009} + 2^{2008} + \dots + 2^2 + 2 + 1$ 的值的个位数是_____.

8. 好学的小东同学, 在学习多项式乘以多项式时发现: $\left(\frac{1}{2}x+4\right)(2x+5)(3x-6)$ 的结果是一个多项式, 并且

最高次项为: $\frac{1}{2}x \cdot 2x \cdot 3x = 3x^3$, 常数项为: $4 \times 5 \times (-6) = -120$, 那么一次项是多少呢? 要解决这个问题, 就

是要确定该一次项的系数. 根据尝试和总结他发现: 一次项系数就是:

$$\frac{1}{2} \times 5 \times (-6) + 2 \times (-6) \times 4 + 3 \times 4 \times 5 = -3, \text{ 即一次项为 } -3x.$$

请你认真领会小东同学解决问题的思路, 方法, 仔细分析上面等式的结构特征. 结合自己对多项式乘法法则的理解, 解决以下问题.

(1) 计算 $(x+2)(3x+1)(5x-3)$ 所得多项式的一次项系数为_____.

(2) 若计算 $(x^2+x+1)(x^2-3x+a)(2x-1)$ 所得多项式不含一次项, 求 a 的值;

(3) 若 $(x+1)^{2021} = a_0x^{2021} + a_1x^{2020} + a_2x^{2019} + \dots + a_{2020}x + a_{2021}$, 则 $a_{2020} = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 你能求 $(x-1)(x^{99}+x^{98}+x^{97}+\dots+x+1)$ 的值吗?

遇到这样的问题,我们可以先思考一下,从简单的情形入手,分别计算下列各式的值.

$$(1) (x-1)(x+1) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) (x-1)(x^2+x+1) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) (x-1)(x^3+x^2+x+1) = \underline{\hspace{2cm}};$$

...

由此我们可以得到:

$$(4) (x-1)(x^{99}+x^{98}+x^{97}+\dots+x+1) = \underline{\hspace{2cm}},$$

请你利用上面的结论,完成下列的计算:

$$(5) 2^{99}+2^{98}+2^{97}+\dots+2+1;$$

10. 观察下列各式:

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1$$

$$(x-1)(x^3+x^2+x+1) = x^4 - 1$$

.....

$$(1) \text{按以上等式的规律填空: } (x-1)(\underline{\hspace{2cm}}) = x^5 - 1;$$

$$(2) \text{根据规律可得 } (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = \underline{\hspace{2cm}} \text{ (其中 } n \text{ 为正整数)};$$

(3)利用上面的结论,完成下面两题的计算:

$$\textcircled{1} (3-1)(3^{50} + 3^{49} + 3^{48} + \dots + 3^2 + 3 + 1)$$

$$\textcircled{2} (-2)^{2022} + (-2)^{2021} + (-2)^{2020} + \dots + (-2)^3 + (-2)^2 + (-2) + 1$$

11. 李狗蛋同学在学习整式乘法公式这一节时,发现运用乘法公式在进行一些计算时特别简便,这激发了李狗蛋同学的学习兴趣,他想再探究一些有关整式乘法的公式,便主动查找资料进行学习,以下是他找来的资料题,请你一同跟李狗蛋同学探究一下:

$$(1) \text{探究: } (a-b)(a+b) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \text{猜想: } (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1}) = \underline{\hspace{2cm}} \text{ (} n \text{ 为正整数, 且 } n \geq 2 \text{)};$$

$$(3) \text{利用上述猜想的结论计算: } 2^9 - 2^8 + 2^7 - \dots + 2^3 - 2^2 + 2 - 1 \text{ 的值.}$$

12. 观察并验证下列等式:

$$1^3 + 2^3 = (1+2)^2 = 9$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2 = 36$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1+2+3+4)^2 = 100$$

(1)续写等式 $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=$ _____.

(2)根据上述等式中所体现的规律,猜想结论

$$1^3+2^3+3^3+\text{L}+(n-1)^3+n^3=$$

(3)利用(2)中的结论计算:

① $3^3+6^3+9^3+\text{L}+54^3+57^3$

② $1^3+3^3+5^3+7^3+\text{L}+(2n-1)^3$

13. 已知 $x \neq 1, (1+x)(1-x)=1-x^2, (1-x)(1+x+x^2)=1-x^3, (1-x)(1+x+x^2+x^3)=1-x^4$.

(1)根据以上式子计算:

① $(1-2)(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)$;

② $2+2^2+2^3+\dots+2^n$ (n 为正整数);

③ $(x-1)(x^{99}+x^{98}+x^{97}+\dots+x^2+x+1)$.

(2)通过以上计算,请你进行下面的探索:

① $(a-b)(a+b)=$ _____;

② $(a-b)(a^2+ab+b^2)=$ _____;

③ $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=$ _____.

14. 阅读并思考:

计算 47^2 时,山桂娜同学发现了一个简单的口算方法,具体步骤如下:

第一步:47 接近整十数 50, $50-47=3$;

第二步:取 50 的一半 25, $25-3=22$;

第三步: $3^2=9$

第四步:把第二、三步综合起来, $47^2=(25-3)\times 100+3^2=2209$.

(1)依此方法计算 49:

第一步:49 接近整十数 50, $50-49=1$;

第二步:取 50 的一半 25, $25-1=24$;

第三步: $1^2=1$

第四步:把第二、三步综合起来, $49^2=(\underline{\quad}-\underline{\quad})\times 100+\underline{\quad}^2=2401$.

(2)请你根据山桂娜同学的方法,填写出一个正确的计算公式.

$$(50-n)^2=(\underline{\quad}-\underline{\quad})\times 100+\underline{\quad}^2.$$

(3)利用乘法运算说明第(2)小题中这个公式的正确性.

(4)写出利用这个公式计算 $56^2=3136$ 的过程.

(5)计算 63×67 也有一个简单的口算方法,具体步骤如下:

第一步: $6\times(6+1)=42$;

第二步: $3\times 7=21$;

第三步：前面两步的结果综合起来， 63×67 的结果是 4221.

写出上述过程所依据的计算公式_____.

(6)利用乘法运算说明第(5)小题中这个公式的正确性.

15. 阅读材料：把形如 $ax^2 + bx + c$ 的二次三项式(或其一部分)配成完全平方式的方法叫做配方法. 配方法基本形式是完全平方公式的逆写，即 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

例如： $(x-1)^2 + 3$ 、 $(x-2)^2 + 2x$ 、 $(\frac{1}{2}x-2)^2 + \frac{3}{4}x^2$ 是 $x^2 - 2x + 4$ 的三种不同形式的配方(即“余项”分别是常数项、一次项、二次项).

请根据阅读材料解决下列问题：

(1)比照上面的例子，写出 $x^2 - 4x + 9$ 三种不同形式的配方；

(2)已知 $z - x + 2y = 4$ ， $zx + 2xy + y^2 - 6y + 13 = 0$ ，求 $(-y)^x$ 的值；

(3)当 x ， y 何值时，代数式 $5x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 25$ 取得最小值，最小值为多少？

16. 先阅读后解题：

若 $m^2 + 2m + n^2 - 6n + 10 = 0$ ，求 m 和 n 的值.

解：等式可变形为： $m^2 + 2m + 1 + n^2 - 6n + 9 = 0$

即 $(m+1)^2 + (n-3)^2 = 0$ ，

因为 $(m+1)^2 \geq 0$ ， $(n-3)^2 \geq 0$ ，

所以 $m+1=0$ ， $n-3=0$

即 $m=-1$ ， $n=3$.

像这样将代数式进行恒等变形，使代数式中出现完全平方式的方法叫做“配方法”.

请利用配方法，解决下列问题：

(1)已知 $\triangle ABC$ 的三边长 a ， b ， c 都是正整数，且满足 $a^2 + 2b^2 - 2a - 16b + 33 = 0$ ，则 $\triangle ABC$ 的周长是_____；

(2)求代数式 $a^2 + 4b^2 + 4ab - 4a - 8b + 7$ 的最小值是多少？并求出此时 a ， b 满足的数量关系；

(3)请比较多项式 $x^2 + 3x - 4$ 与 $2x^2 + 2x - 3$ 的大小，并说明理由.

17. 方法探究：

已知二次多项式 $x^2 - 4x - 21$ ，我们把 $x = -3$ 代入多项式，发现 $x^2 - 4x - 21 = 0$ ，由此可以推断多项式中有因式 $(x+3)$. 设另一个因式为 $(x+k)$ ，多项式可以表示成 $x^2 - 4x - 21 = (x+3)(x+k)$ ，则有

$x^2 - 4x - 21 = x^2 + (k+3)x + 3k$ ，因为对应项的系数是对应相等的，即 $k+3 = -4$ ，解得 $k = -7$ ，因此多项式分

解因式得： $x^2 - 4x - 21 = (x+3)(x-7)$. 我们把以上分解因式的方法叫“试根法”.

问题解决：

(1)对于二次多项式 $x^2 - 4$ ，我们把 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 代入该式，会发现 $x^2 - 4 = 0$ 成立；

(2)对于三次多项式 $x^3 - x^2 - 3x + 3$ ，我们把 $x = 1$ 代入多项式，发现 $x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0$ ，由此可以推断多项式中有因式 $(x-1)$ ，设另一个因式为 $(x^2 + ax + b)$ ，多项式可以表示成 $x^3 - x^2 - 3x + 3 = (x-1)(x^2 + ax + b)$ ，

试求出题目中 a ， b 的值；

(3)对于多项式 $x^3 + 4x^2 - 3x - 18$ ，用“试根法”分解因式.

18. 教科书中这样写道：“我们把多项式 $a^2 + 2ab + b^2$ 及 $a^2 - 2ab + b^2$ 叫做完全平方式”，如果一个多项式不是完全平方式，我们常做如下变形：先添加一个适当的项，使式子中出现完全平方式，再减去这个项，使整个式子的值不变，这种方法叫做配方法，配方法是一种重要的解决问题的数学方法，不仅可以将一个看似不能分解的多项式分解因式，还能解决一些与非负数有关的问题或求代数式最大值，最小值等问题。

例如：分解因式 $x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4 = (x + 1)^2 - 4 = (x + 1 + 2)(x + 1 - 2) = (x + 3)(x - 1)$

求代数式 $2x^2 + 4x - 6$ 的最小值， $2x^2 + 4x - 6 = 2(x^2 + 2x - 3) = 2(x + 1)^2 - 8$.

当 $x = -1$ 时， $2x^2 + 4x - 6$ 有最小值，最小值是 -8 ，

根据阅读材料用配方法解决下列问题：

(1) 分解因式： $x^2 - 4x - 5 =$ _____.

(2) 当 x 为何值时，多项式 $-2x^2 - 4x + 3$ 有最大值？并求出这个最大值.

(3) 若 $\frac{1}{2}a^2 - 2ab + \frac{7}{3}b^2 - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3} = 0$ ，求出 a, b 的值.

19. 已知 $a + b = 1$, $ab = -1$ ，设 $S_1 = a + b$, $S_2 = a^2 + b^2$, $S_3 = a^3 + b^3$, ..., $S_n = a^n + b^n$

(1) 计算 S_2 和 S_4

(2) 已知 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ ，求 S_3 并猜想 S_{n-2} , S_{n-1} , S_n 三者之间的数量关系（不需要证明）；

(3) 若 $M = (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{99})(S_2 + S_3 + \dots + S_{100})$, $N = (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{100})(S_2 + S_3 + \dots + S_{99})$ 判断 M, N 的大小，并说明理由.

20. 阅读材料：若 $m^2 - 2mn + 2n^2 - 4n + 4 = 0$ ，求 m, n 的值.

解： $\because m^2 - 2mn + 2n^2 - 4n + 4 = 0, \therefore (m^2 - 2mn + n^2) + (n^2 - 4n + 4) = 0$,

$\therefore (m - n)^2 + (n - 2)^2 = 0, \therefore (m - n)^2 = 0, (n - 2)^2 = 0, \therefore n = 2, m = 2$.

根据你的观察，探究下面的问题：

(1) 已知 $x^2 + 2y^2 - 2xy + 8y + 16 = 0$ ，则 $x =$ _____, $y =$ _____;

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的三边长 a, b, c 都是正整数，且满足 $2a^2 + b^2 - 4a - 8b + 18 = 0$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长.

21. 我们已经学过将一个多项式分解因式的方法有提公因式法和运用公式法，其实分解因式的方法还有分组分解法、拆项法、十字相乘法等等.

①分组分解法：将一个多项式适当分组后，可提公因式或运用公式继续分解的方法叫作分组分解法. 例如：

$x^2 - 2xy + y^2 - 4 = (x^2 - 2xy + y^2) - 4 = (x - y)^2 - 2^2 = (x - y - 2)(x - y + 2)$.

②拆项法：将一个多项式的某一项拆成两项后，可提公因式或运用公式继续分解的方法叫作拆项法. 例如：

$x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1 - 4 = (x + 1)^2 - 2^2 = (x + 1 - 2)(x + 1 + 2) = (x - 1)(x + 3)$

③十字相乘法：十字相乘法能用于二次三项式的分解因式. 分解步骤：1. 分解二次项，所得结果分别写在十字交叉线的左上角和左下角；2. 分解常数项，所得结果分别写在十字交叉线的右上角和右下角；3. 交叉相乘，求代数和，使其等于一次项；4. 观察得出原二次三项式的两个因式，并表示出分解结果. 这种分解方法叫作十字相乘法.

观察得出：两个因式分别为 $(x + 7)$ 与 $(x - 1)$

例如： $x^2 + 6x - 7$

分析：

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 6x - 7 \\
 \begin{array}{r}
 x \quad +7 \\
 x \quad -1 \\
 \hline
 -x + 7x = 6x
 \end{array}
 \end{array}$$

解：原式 = $(x+7)(x-1)$

(1) 仿照以上方法，按照要求分解因式：

① (分组分解法) $4x^2 + 4x - y^2 + 1$

② (拆项法) $x^2 - 6x + 8$

③ $x^2 - 5x + 6 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 已知： a 、 b 、 c 为 $\triangle ABC$ 的三条边， $a^2 + b^2 + c^2 - 4a - 4b - 6c + 17 = 0$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长.

22. 我国古代数学的许多发现都曾位居世界前列，如图1的“杨辉三角”就是其中的一例. 如图2，某同学发现杨辉三角给出了 $(a+b)^n$ (n 为正整数)的展开式 (按 a 的次数由大到小的顺序排列)的系数规律. 例如，

在三角形中第三行的三个数1, 2, 1, 恰好对应 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 展开式中各项的系数；第四行的四个数1, 3, 3, 1, 恰好对应着 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 展开式中各项的系数等等.

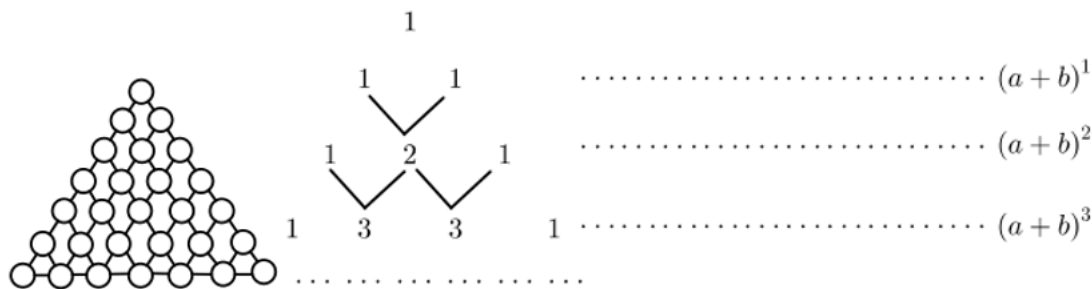


图 1

图 2

(1) 填出 $(a+b)^4$ 展开式中共有_____项，第三项是_____.

(2) 直接写出 $(1-2y)^5$ 的展开式.

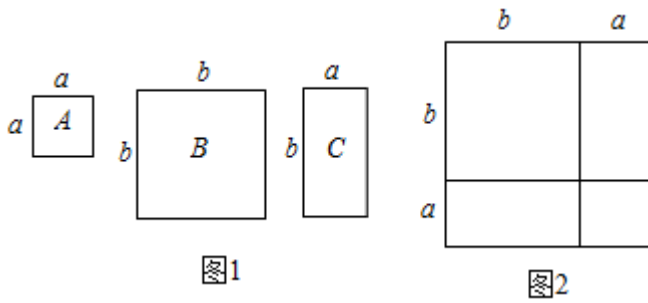
(3) 推断多项式 $(a+b)^n$ (n 为正整数)的展开式的各项系数之和 S .

(4) 利用上面的规律计算：

$$2^6 + 6 \times 2^5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 15 \times 2^4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 20 \times 2^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 15 \times 2^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 6 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^5 + \left(-\frac{1}{2}\right)^6 - 1.$$

23. 乘法公式的探究及应用.

数学活动课上，刘老师准备了若干个如图1的三种纸片，A种纸片边长为 a 的正方形，B种纸片是边长为 b 的正方形，C种纸片长为 a 、宽为 b 的长方形并用A种纸片一张，B种纸片一张，C种纸片两张拼成如图2的大正方形.

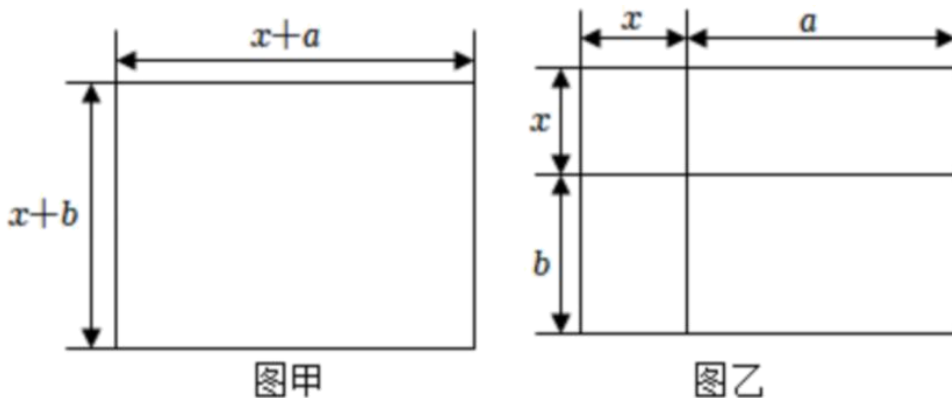


- (1) 观察图2，请写出下列三个代数式： $(a+b)^2$ ， a^2+b^2 ， ab 之间的等量关系_____；
- (2) 若要拼出一个面积为 $(a+2b)(a+b)$ 的矩形，则需要A号卡片1张，B号卡片2张，C号卡片_____张。

(3) 根据(1)题中的等量关系，解决如下问题：

- ①已知： $a+b=6$ ， $a^2+b^2=14$ ，求 ab 的值；
- ②已知 $(x-2018)^2+(x-2020)^2=4$ ，求 $(x-2019)^2$ 的值。

24. 做一做计算：探究归纳，如图甲、图乙是两个长和宽都相等的长方形，其中长为 $(x+a)$ ，宽为 $(x+b)$ 。



(1)根据图甲、图乙的特征用不同的方法计算长方形的面积，得到关于字母 x 的系数是1的两个一次式相乘的计算规律，用数学式表达式为_____。

尝试运用，利用因式分解与整式乘法的关系，我们可以利用上述表达式得到一些二次三项式的因式分解。

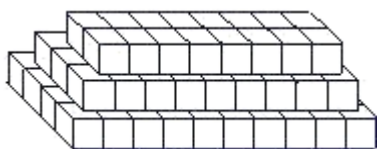
(2)若 $x^2-7x+m=(x-9)(x+2)$ ，则 $m=_____$ 。

(3)若 x^2+px-4 可以分解成关于 x 的两个一次式乘积的形式，则整数 p 的值一定是_____。

(4)若 x^2-4x+q 可以分解成关于 x 的两个一次式乘积的形式，则整数 q 的值一定是_____。

A. 4 B. 0 C. 有限个 D. 有无数个

25. 探索、研究：仪器箱按如图方式堆放（自下而上依次为第1层、第2层、...），受堆放条件限制，堆放时应符合下列条件：每层堆放仪器箱的个数 an 与层数 n 之间满足关系式 $an=n^2-32n+247$ ， $1\leq n<16$ ， n 为整数。



(1)例如，当 $n=2$ 时， $a^2=2^2-32\times 2+247=187$ ，则 $a^5=$ _____， $a^6=$ _____；

(2)第 n 层比第 $(n+1)$ 层多堆放多少个仪器箱；（用含 n 的代数式表示）

(3)假设堆放时上层仪器箱的总重量会对下一层仪器箱产生同样大小的压力，压力单位是牛顿，设每个仪器箱重 54 牛顿，每个仪器箱能承受的最大压力为 160 牛顿，并且堆放时每个仪器箱承受的压力是均匀的.

①若仪器箱仅堆放第 1、2 两层，求第 1 层中每个仪器箱承受的平均压力；

②再确保仪器箱不被损坏的情况下，仪器箱最多可以堆放几层，为什么？

26.

(1)【阅读与思考】

整式乘法与因式分解是方向相反的变形. 如何把二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 分解因式呢？我们已经知道：

$$(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)=a_1a_2x^2+a_1c_2x+a_2c_1x+c_1c_2=a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2. \text{ 反过来，就得到：}$$

$$a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2). \text{ 我们发现，二次三项式 } ax^2+bx+c(a\neq 0) \text{ 的二次项的系数 } a$$

分解成 a_1a_2 ，常数项 c 分解成 c_1c_2 ，并且把 a_1 ， a_2 ， c_1 ， c_2 ，如图 1 所示摆放，按对角线交叉相乘再相加，

就得到 $a_1c_2+a_2c_1$ ，如果 $a_1c_2+a_2c_1$ 的值正好等于 ax^2+bx+c 的一次项系数 b ，那么 ax^2+bx+c 就可以分解为

$(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$ ，其中 a_1 ， c_1 位于图的上一行， a_2 ， c_2 位于下一行. 像这种借助画十字交叉图分解系数，

从而帮助我们二次三项式分解因式的方法，通常叫做“十字相乘法”.

例如，将式子 x^2-x-6 分解因式的具体步骤为：首先把二次项的系数 1 分解为两个因数的积，即 $1=1\times 1$ ，

把常数项 -6 也分解为两个因数的积，即 $-6=2\times (-3)$ ；然后把 1，1，2， -3 按图 2 所示的摆放，按对角线交

叉相乘再相加的方法，得到 $1\times (-3)+1\times 2=-1$ ，恰好等于一次项的系数 -1 ，于是 x^2-x-6 就可以分解为

$$(x+2)(x-3).$$

请同学们认真观察和思考，尝试在图 3 的虚线方框内填入适当的数，并用“十字相乘法”分解因式：

$$x^2+x-6=_____.$$

(2)【理解与应用】

请你仔细体会上述方法并尝试对下面两个二次三项式进行分解因式：

① $2x^2+5x-7=_____$ ；

② $6x^2-7xy+2y^2=_____$.

(3)【探究与拓展】

对于形如 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ 的关于 x ， y 的二元二次多项式也可以用“十字相乘法”来分解，如图

4. 将 a 分解成 mn 乘积作为第一列， c 分解成 pq 乘积作为第二列， f 分解成 jk 乘积作为第三列，如果 $mq+np=b$ ， $pk+pj=e$ ， $mk+nj=d$

，即第 1，2 列、第 2，3 列和第 1，3 列都满足十字相乘规则，则原式 $= (mx + py + j)(nx + qy + k)$ ，请你认真阅读上述材料并尝试挑战下列问题：

① 分解因式 $3x^2 + 5xy - 2y^2 + x + 9y - 4 =$ _____；

② 若关于 x, y 的二元二次式 $x^2 + 7xy - 18y^2 - 5x + my - 24$ 可以分解成两个一次因式的积，求 m 的值。

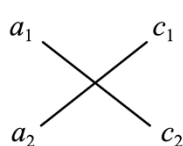


图1

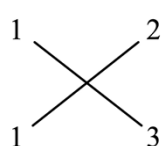


图2

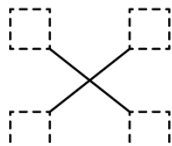


图3

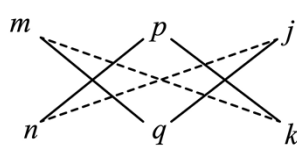


图4

27. 数形结合思想是根据数与形之间的对应关系，通过数与形的相互转化来解决数学问题的思想．我们常利用数形结合思想，借助形的几何直观性来阐明数之间某种关系，如：探索整式乘法的一些法则和公式．

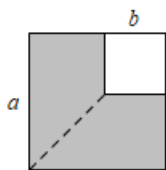


图1

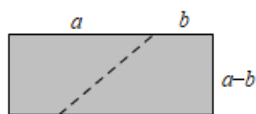


图2

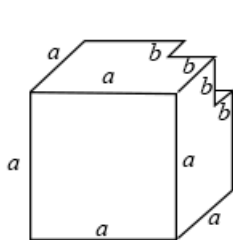


图3

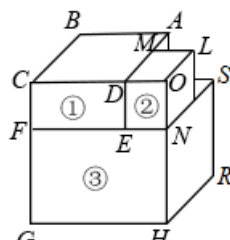


图4

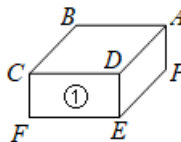


图5

(1)探究一：

将图 1 的阴影部分沿虚线剪开后，拼成图 2 的形状，拼图前后图形的面积不变，因此可得一个多项式的分解因式_____。

(2)探究二：类似地，我们可以借助一个棱长为 a 的大正方体进行以下探索：

在大正方体一角截去一个棱长为 b ($b < a$) 的小正方体，如图 3 所示，则得到的几何体的体积为_____；

(3)将图 3 中的几何体分割成三个长方体①、②、③，如图 4、图 5 所示， $\because BC = a, AB = a - b, CF = b$ ， $\therefore$ 长方体①的体积为 $ab(a - b)$ ．类似地，长方体②的体积为_____，长方体③的体积为_____；（结果不需要化简）

(4)用不同的方法表示图 3 中几何体的体积，可以得到的恒等式（将一个多项式因式分解）为_____。

(5)问题应用：利用上面的结论，解决问题：已知 $a - b = 6, ab = 2$ ，求 $a^3 - b^3$ 的值。

(6)类比以上探究，尝试因式分解： $a^3 + b^3 =$ _____。

28. 把图 1 的长方形看成一个基本图形，用若干相同的基本图形进行拼图（重合处无缝隙）。

(1)如图 2，将四个基本图形进行拼图，得到正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFGH$

，用两种不同的方法计算图中阴影部分的面积（用含 a, b 的代数式表示），并写出一个等式；

(2)如图 3，将四个基本图形进行拼图，得到四边形 $MNPQ$ ，求阴影部分的面积（用含 a, b 的代数式表示）；

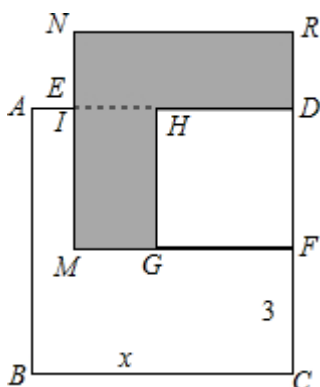
(3)如图 4，将图 3 的上面两个基本图形作为整体图形向左运动 x 个单位，再向上运动 $2b$ 个单位后得到一个长方形图形，若 $AB = b$ ， BC 把图中阴影部分分割成两部分，这两部分的面积分别记为 S_1, S_2 ，若 $m = S_1 - S_2$ ，求证： m 与 x 无关.

29. 若 x 满足 $(9-x)(x-4)=4$ ，求 $(9-x)^2 + (x-4)^2$ 的值.

解：设 $9-x=a$ ， $x-4=b$ ，则 $(9-x)(x-4)=ab=4$ ， $a+b=(9-x)+(x-4)=5$

$\therefore (9-x)^2 + (x-4)^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 5^2 - 2 \times 4 = 17$

请仿照上面的方法求解下面问题：



(1)若 x 满足 $(x-10)(x-20)=15$ ，求 $(x-10)^2 + (x-20)^2$ 的值；

(2)若 x 满足 $(x-2021)^2 + (x-2022)^2 = 33$ ，求 $(x-2021)(x-2022)$ 的值；

(3)已知正方形 $ABCD$ 的边长为 x ， E, F 分别是 AD, DC 上的点，且 $AE=1, CF=3$ ，长方形 $EMFD$ 的面积是 48，分别以 MF, DF 为边长作正方形 $MFRN$ 和正方形 $GFDH$ ，求阴影部分的面积.

30. 数形结合是一种非常重要的数学思想，它包含两个方面，第一种是“以数解形”，第二种是“以形助数”，我国著名数学家华罗庚曾说过：“数无形时少直觉，形少数时难入微”. 请你使用数形结合这种思想解决下面问题：

图 1 是一个长为 $2a$ ，宽为 $2b$ 的长方形，沿图中虚线用剪刀均分为四块完成相同的小长方形，然后按照图 2 的形状拼成一个正方形.

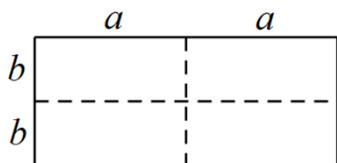


图1

(1)观察图 2，用两种方法计算阴影部分的面积，可以得到一个等式，请使用代数式 $(a+b)^2$ ， $(a-b)^2$ ， ab 写出这个等式_____.

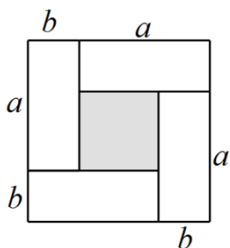


图2

(2)运用你所得到的公式，计算：若 m 、 n 为实数，且 $mn = -3$ ， $m - n = 4$ ，试求 $(m+n)^2$ 的值.

(3)如图 3，点 C 是线段 AB 上的一点，以 AC 、 BC 为边向两边作正方形，设 $AB = 8$ ，两正方形的面积和 $S_1 + S_2 = 38$ ，求图中阴影部分的面积.

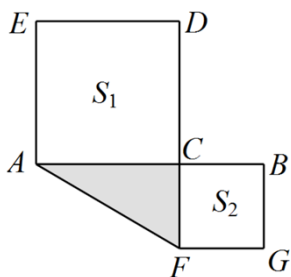


图3

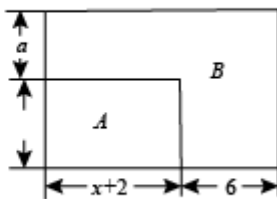
31. 我们学过单项式除以单项式、多项式除以单项式，那么多项式除以多项式该怎么计算呢？我们也可以利用竖式进行类似演算，即先把被除式、除式按某个字母的指数从大到小依次排列项的顺序，并把所缺的项用零补齐，再类似数的竖式除法求出商式和余式，其中余式为 0 或余式的次数低于除式的次数.

例：计算 $(8x^2 + 6x + 1) \div (2x + 1)$ ，可依照 $672 \div 21$ 的计算方法用竖式进行计算.因此

$$(8x^2 + 6x + 1) \div (2x + 1) = 4x + 1.$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 21 \overline{) 672} \\ \underline{63} \\ 42 \\ \underline{42} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x+1 \\ 2x+1 \overline{) 8x^2+6x+1} \\ \underline{8x^2+4x} \\ 2x+1 \\ \underline{2x+1} \\ 0 \end{array}$$



(1) $(x^3 + 4x^2 + 5x - 6) \div (x + 2)$ 的商是_____，余式是_____.

(2)利用上述方法解决：若多项式 $2x^4 + 4x^3 + ax^2 + 8x - b$ 能被 $x^2 - x + 1$ 整除，求 a^b 值.

(3)已知一个长为 $(x+2)$ ，宽为 $(x-2)$ 的长方形 A ，若将它的长增加 6，宽增加 a 就得到一个长方形 B ，此时长方形 B 的周长是 A 周长的 2 倍（如图）.另有长方形 C 的一边长为 $(x+10)$ ，若长方形 B 的面积比 C

的面积大 76，求长方形 C 的另一边长.

32. 数学中的许多规律不仅可以通过数的运算发现，也可以通过图形的面积发现.

(1)填表：【数的角度】

a	b	$a+b$	$a-b$	a^2-b^2
2	1	3	1	3
3	-2	1	5	_____
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	_____	$\frac{5}{36}$

(2)【形的角度】如图①，在边长为 a 的正方形纸片上剪去一个边长为 b ($b < a$) 的小正方形，怎样计算图中阴影部分的面积？小明和小红分别用不同的方法计算图中阴影部分的面积. 小明的方法：若阴影部分看成大正方形与小正方形的面积差，则阴影部分的面积用代数式表示为_____；小红的方法：若沿图①中的虚线将阴影部分剪开拼成新的长方形（图②），则阴影部分的面积用代数式表示为_____.

(3)【发现规律】猜想： $a+b$ 、 $a-b$ 、 a^2-b^2 这三个代数式之间的等量关系是_____.

(4)【运用规律】运用上述规律计算： $50^2-49^2+48^2-47^2+46^2-45^2\ldots+2^2-1$.

33. 完全平方公式： $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 适当的变形，可以解决很多的数学问题

例如：若 $a+b=3$ ， $ab=1$ ，求 a^2+b^2 的值

解： $\because a+b=3$

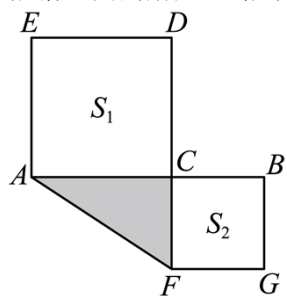
$$\therefore (a+b)^2 = 9$$

$$\text{即 } a^2 + 2ab + b^2 = 9$$

$$\because ab=1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 7$$

根据上面的解题思路与方法，解决下列问题



(1)若 $x+y=8$ ， $x^2+y^2=40$ ，则 $xy=$ _____

(2)填空

①若 $(4-x)x=3$ ，则 $(4-x)^2+x^2=$ _____

②若 $(4-x)(5-x)=8$ ，则 $(4-x)^2+(5-x)^2=$ _____

(3)如图，点 C 是线段 AB 上的一点，以 AC 、 BC 为边向两边作正方形，设 $AB=6$ ，两正方形的面积和 $S_1+S_2=18$ ，求图中阴影部分的面积

34. 如图 1 的两个长方形可以按不同的形式拼成图 2 和图 3 两个图形.

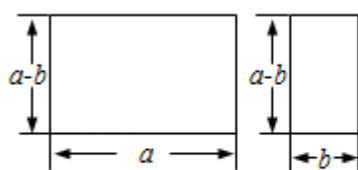


图 1

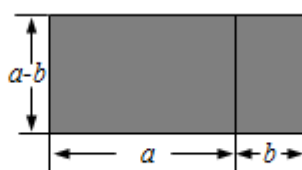


图 2

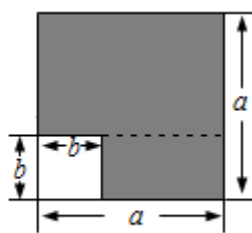


图 3

(1) 在图 2 中的阴影部分的面积 S_1 可表示为_____；（写成多项式乘法的形式）；在图 3 中的阴影部分的面积 S_2 可表示为_____；（写成两数平方差的形式）；

(2) 比较图 2 与图 3 的阴影部分面积，可以得到的等式是_____；

A. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

B. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

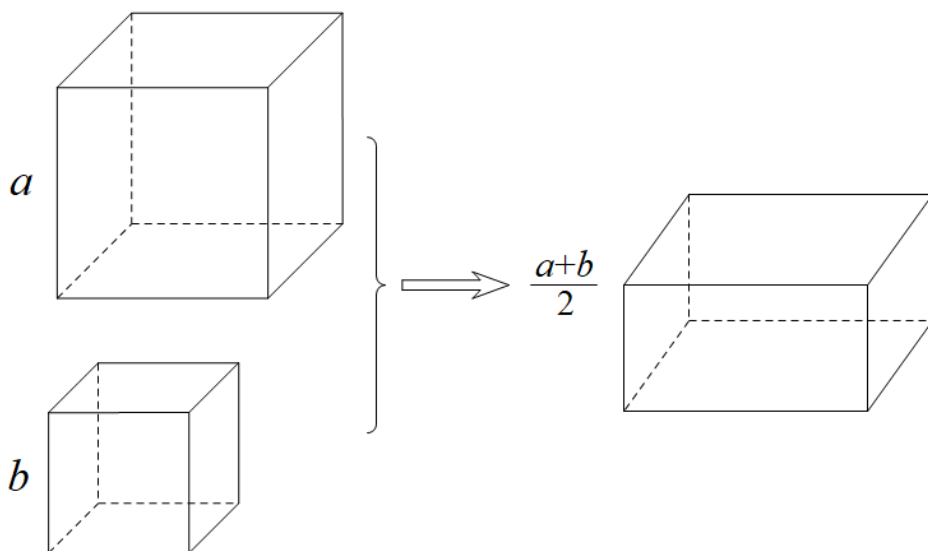
C. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(3) 请利用所得等式解决下面的问题：

① 已知 $4m^2 - n^2 = 12$, $2m + n = 4$, 则 $2m - n =$ _____；

② 计算 $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) \times \dots \times (2^{32}+1) + 1$ 的值，并直接写出该值的个位数字是多少。

35. 学习了平方差、完全平方公式后，小聪同学对学习和运用数学公式非常感兴趣，他通过上网查阅，发现还有很多数学公式，如立方和公式： $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$ ，他发现，运用立方和公式可以解决很多数学问题，请你也来试试利用立方和公式解决以下问题：



(1) 【公式理解】公式中的字母可以代表任何数、字母或式子

① 化简： $(a-b)(a^2+ab+b^2) =$ _____；

② 计算： $(99^3+1) \div (99^2-99+1) =$ _____；

(2) 【公式运用】已知： $\frac{1}{x} + x = 5$, 求 $\left[\left(\frac{1}{x} \right)^2 + x \right] \div \left(\frac{1}{x} + 1 \right)$ 的值：

(3) 【公式应用】如图，将两块棱长分别为 a 、 b 的实心正方体橡皮泥揉合在一起，重新捏成一个高为 $\frac{a+b}{2}$ 的实心长方体，问这个长方体有无可能是正方体，若可能， a 与 b

应满足什么关系？若不可能，说明理由。

36. 【阅读材料】“数形结合”是一种非常重要的数学思想方法。比如：在学习“整式的乘法”时，我们通过构造几何图形，用“等积法”直观地推导出了完全平方和公式： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ （如图1）。利用“数形结合”的思想方法，可以从代数角度解决图形问题，也可以用图形关系解决代数问题。

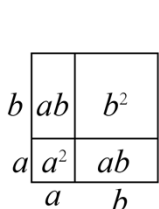


图1

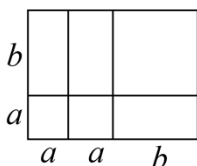


图2

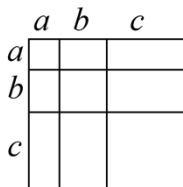


图3

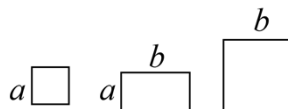


图4

【方法应用】根据以上材料提供的方法，完成下列问题：

- (1)由图2可得等式：_____；由图3可得等式：_____；
- (2)利用图3得到的结论，解决问题：若 $a+b+c=15$ ， $ab+ac+bc=35$ ，则 $a^2+b^2+c^2=_____$ ；
- (3)如图4，若用其中 x 张边长为 a 的正方形， y 张边长为 b 的正方形， z 张边长分别为 a 、 b 的长方形纸片拼出一个面积为 $(2a+b)(a+2b)$ 长方形（无空隙、无重叠地拼接），则 $x+y+z=_____$ ；
- (4)如图4，若有3张边长为 a 的正方形纸片，4张边长分别为 ab 的长方形纸片，5张边长为 b 的正方形纸片。从中取出若干张纸片，每种纸片至少取一张。把取出的这些纸片拼成一个正方形（无空隙、无重叠地拼接），则拼成的正方形的边长最长可以为_____。

【方法拓展】

- (5)已知正数 a, b, c 和 m, n, l ，满足 $a+m=b+n=c+l=k$ 。试通过构造边长为 k 的正方形，利用图形面积来说明 $al+bm+cn < k^2$ 。

37. 如图1是一个长为 $4a$ 、宽为 b 的长方形，沿图1中虚线用剪刀平均分成四块小长方形，然后用四块小长方形拼成的一个“回形”正方形（如图2）。

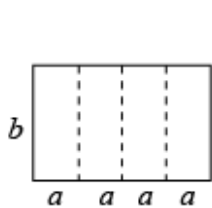


图1

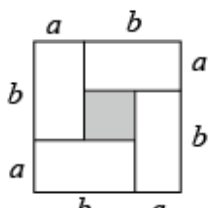


图2

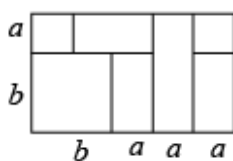


图3

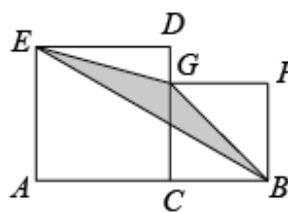


图4

- (1)图2中的阴影部分的面积为：_____（用 a, b 的代数式表示）；
- (2)观察图2，请你写出 $(a+b)^2$ 、 $(a-b)^2$ 、 ab 之间的等量关系是_____；
- (3)利用(2)中的结论，若 $x+y=5$ ， $x \cdot y = \frac{9}{4}$ ，求 $(x-y)^2$ 的值_____；
- (4)实际上通过计算图形的面积可以探求相应的等式。如图3，请你写出这个等式_____。
- (5)如图4，点 C 是线段 AB 上的一点，分别以 AC 、 BC 为边在 AB 的同侧作正方形 $ACDE$ 和正方形 $CBFG$ ，连接 EG 、 BG 、 BE ，当 $BC=1$ 时， $\triangle BEG$ 的面积记为 S_1 ，当 $BC=2$ 时， $\triangle BEG$ 的面积记为 S_2 ，...，以此类推，当 $BC=n$ 时， $\triangle BEG$ 的面积记为 S_n ，计算 $S_{2020} - S_{2019} + S_{2018} - S_{2017} + \cdots + S_2 - S_1$ 的值。

38. 一个四位正整数 J ，将千位上的数字和十位上的数字交换，百位上的数字和个位上的数字交换，得到 $P = \overline{abcd}$ ，我们称这个数 P 为原数的“披荆数”，并规定 $S(P) = |(a+d) - (b+c)|$ ；将千位上的数字和个位上的数字交换，百位上的数字和十位上的数字交换，得到 $Z = \overline{efgh}$ ，我们称这个数 Z 为原数的“斩棘数”，规定

$$T(Z) = |(e+f) - (g+h)|, \text{ 且 } F(J) = \frac{T(Z)}{S(P)} \text{ (分母为 0 时舍去)}.$$

如：2147 的“披荆数”为 $P = 4721$ ， $S(P) = |(4+1) - (7+2)| = 4$ ，2147 的“斩棘数”为 $Z = 7412$ ，

$$T(Z) = |(7+4) - (1+2)| = 8.$$

(1) 2937 的“披荆数”是_____，3587 的“斩棘数”是_____；

(2) 证明任意一个四位数的“披荆数”与“斩棘数”的差能被 9 整除；

(3) 设四位正整数 $M = 1000x + 500 + 10y + 4$ ($0 < x < 5 \leq y \leq 9$ ，且 x, y 均为正整数)，交换其十位和个位的数字得到 N ，若 $M - N$ 为完全平方数且 M 能被 3 整除，则称 M 为“乘风破浪数”，请求出所有“乘风破浪数” M 中 $F(M)$ 的最大值.

39. 材料一：一个三位数 M ，若它的各数位上的数字均不为 0，且满足十位上的数字的平方等于百位数字与个位数字之积的 k 倍 (k 为整数)，则称 M 为“ k 阶比例中项数”；

材料二：一个三位数 $P = \overline{abc}$ ，它的百位数字和十位数字组成的两位数为 $\overline{ab}$ ，十位数字和个位数字组成的两位数为 $\overline{bc}$ ，规定 $F(P) = \overline{ab} + 5\overline{bc}$ ；

例如：244，因为 $4^2 = 2 \times 2 \times 4$ ，其中 $k = 2$ ，2 是整数，所以 244 是“2 阶比例中项数”，

$$F(244) = 24 + 5 \times 44 = 244;$$

又如：321，因为 $2^2 = \frac{4}{3} \times 3 \times 1$ ，但 $\frac{4}{3}$ 不是整数，所以 321 不是一个“ k 阶比例中项数”，

$$F(321) = 32 + 5 \times 21 = 137.$$

(1) 363 是“_____ 阶比例中项数”；最大的“3 阶比例中项数”为_____；

(2) 若 $N = 100m + 10n + 1$ (其中 $1 \leq m \leq 4$ ， $2 \leq n \leq 8$ ， m, n 均为正整数，且 n 为偶数) 是一个“ k 阶比例中项数”，且 $F(N)$ 被 7 除余 1，求出所有满足条件的 N 。

40. 定义：对于依次排列的多项式 $x+a, x+b, x+c, x+d$ (a, b, c, d 是常数)，当它们满足在

$(x+a)(x+d) - (x+b)(x+c) = M$ ，且 M 为常数时，则称 a, b, c, d 是一组平衡数， M 是该组平衡数的平衡因子，例如：对于多项式 $x+2, x+1, x+6, x+5$ ，因为

$$(x+2)(x+5) - (x+1)(x+6) = (x^2 + 7x + 10) - (x^2 + 7x + 6) = 4, \text{ 所以 } 2, 1, 6, 5 \text{ 是一组平衡数，} 4 \text{ 是该组平衡数的平衡因子.}$$

(1) 已知 2, 4, 7, 9 是一组平衡数，求该组平衡数的平衡因子 M ；

(2) 若 a, b, c, d 是一组平衡数， $a = -4, d = 3$ ，请直接写出组 b, c 的值；

(3) 当 a, b, c, d 之间满足什么数量关系时，它们是一组平衡数，并说明理由。

41. 根据阅读材料，解决问题.

材料 1: 若一个正整数，从左到右各位数上的数字与从右到左各位数上的数字对应相同，则称为“对称数”（例如：1、232、4554 是对称数）.

材料 2: 对于一个三位自然数 A ，将它各个数位上的数字分别 2 倍后取个位数字，得到三个新的数字 x ， y ， z ，我们对自然数 A 规定一个运算： $K(A) = x^2 + y^2 + z^2$ ，

例如： $A=191$ 是一个三位的“对称数”，其各个数位上的数字分别 2 倍后取个位数字分别是：2、8、2. 则

$$K(191) = 2^2 + 8^2 + 2^2 = 72.$$

请解答：

- (1) 请你直接写出最大的两位对称数：____，最小的三位对称数：____；
- (2) 如果将所有对称数按照从小到大的顺序排列，请直接写出第 1100 个对称数____；
- (3) 一个四位的“对称数” B ，若 $K(B) = 8$ ，请求出 B 的所有值.

特训 04 第 8-9 章压轴题（题型归纳）

一、解答题

1. 找规律：观察算式

$$1^3=1$$

$$1^3+2^3=9$$

$$1^3+2^3+3^3=36$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3=100$$

...

(1) 按规律填空

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+10^3=$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+n^3=$$

(2) 由上面的规律计算： $11^3+12^3+13^3+14^3+\dots+50^3$ （要求：写出计算过程）

(3) 思维拓展：计算： $2^3+4^3+6^3+\dots+98^3+100^3$ （要求：写出计算过程）

答案：(1) 55^2 ； $\left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2$ ；(2) 1622600；(3) 8×1275^2

分析：(1) 观察等式右边都是平方数，且底数正好是等式左边各底数的和，依此规律类推可分别解决以上两个问题；

(2) 由于上面的等式都是从底数是 1 开始的，所以可以把该式子前面的部分从 1 开始补上，再把补上的部分减掉即可；

(3) 该式中的底数并不是题干中所给出的从 1 开始的连续整数，因此不能直接用上述规律解题，但该式中的底数却都是从 1 开始的连续整数的 2 倍，因此提出 2 后，各项都含有 2^3 ，逆用乘法分配律即可解决问题。

解析：解：(1) $1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+10^3=(1+2+3+4+\dots+10)^2=55^2$ ；

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+n^3=(1+2+3+4+\dots+n)^2=\left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2$$

$$\begin{aligned}(2) \quad & 11^3+12^3+13^3+14^3+\dots+50^3=(1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+50^3)-(1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+10^3) \\ & =\left[\frac{50(50+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{10(10+1)}{2}\right]^2\end{aligned}$$

$$=1622600$$

$$\begin{aligned}(3) \quad & 2^3+4^3+6^3+\dots+98^3+100^3=(2 \times 1)^3+(2 \times 2)^3+(2 \times 3)^3+\dots+(2 \times 50)^3=2^3 \times \\ & (1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+50^3)\end{aligned}$$

$$=2^3 \times \left[\frac{50(50+1)}{2} \right]^2 = 8 \times 1275^2.$$

【点睛】本题属于数式规律题，考查了学生对数的观察和分析的能力，首先学生应对平方数有一定的认识和感知力，这样才能迈出解决问题的第一步，其次学生要学会对不同的数进行关联，通过它们的和差积商中的一种或多种组合找到它们的联系，才能得出这道题的规律，建议在学习过程中多积累相关经验，发散思维，提高解决该类问题的效率。

2. 阅读下列材料：小明为了计算 $1+2+2^2+\dots+2^{2020}+2^{2021}$ 的值，采用以下方法：

$$\text{设 } S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2020} + 2^{2021} \quad \text{①}$$

$$\text{则 } 2S = 2 + 2^2 + \dots + 2^{2021} + 2^{2022} \quad \text{②}$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ 得, } 2S - S = S = 2^{2022} - 1.$$

请仿照小明的方法解决以下问题：

$$(1) \quad 2 + 2^2 + \dots + 2^{20} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \quad \text{求 } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{50}} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \quad \text{求 } (-2) + (-2)^2 + \dots + (-2)^{100} \text{ 的和; (请写出计算过程)}$$

$$(4) \quad \text{求 } a + 2a^2 + 3a^3 + \dots + na^n \text{ 的和 (其中 } a \neq 0 \text{ 且 } a \neq 1 \text{)}. \text{ (请写出计算过程)}$$

答案: (1) $2^{21}-2$; (2) $2-\frac{1}{2^{50}}$; (3) $\frac{2^{101}-2}{3}$; (4) $\frac{a-a^{n+1}}{(a-1)^2} + \frac{na^{n+1}}{a-1}$

分析：(1) 根据阅读材料可得：设 $s = 2 + 2^2 + \dots + 2^{20}$ ①，则 $2s = 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20} + 2^{21}$ ②，②-①即可得结果；

$$(2) \quad \text{设 } s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{50}} \quad \text{①}, \quad \frac{1}{2}s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{50}} + \frac{1}{2^{51}} \quad \text{②}, \quad \text{②} - \text{①} \text{ 即可得结果;}$$

(3) 设 $s = (-2) + (-2)^2 + \dots + (-2)^{100}$ ①， $-2s = (-2)^2 + (-2)^3 + \dots + (-2)^{101}$ ②，②-①即可得结果；

(4) 设 $s = a + 2a^2 + 3a^3 + \dots + na^n$ ①， $as = a^2 + 2a^3 + 3a^4 + \dots + na^{n+1}$ ②，②-①得 $as-s = -a-a^2-a^3-a^4+\dots-a^n+na^{n+1}$ ，同理：求得 $-a^2-a^3-a^4+\dots-a^{n+1}$ ，进而即可求解。

解析：解：根据阅读材料可知：

$$(1) \quad \text{设 } s = 2 + 2^2 + \dots + 2^{20} \quad \text{①},$$

$$2s = 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20} + 2^{21} \quad \text{②},$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ 得, } 2s - s = s = 2^{21} - 2;$$

故答案为： $2^{21}-2$;

$$(2) \quad \text{设 } s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{50}} \quad \text{①},$$

$$\frac{1}{2}s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{50}} + \frac{1}{2^{51}} \quad \text{②},$$

$$\textcircled{2}-\textcircled{1}\text{得}, \frac{1}{2}s-s=-\frac{1}{2}s=\frac{1}{2^{51}}-1,$$

$$\therefore s=2-\frac{1}{2^{50}},$$

$$\text{故答案为: } 2-\frac{1}{2^{50}};$$

$$(3) \text{ 设 } s=(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{100} \textcircled{1}$$

$$-2s=(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^{101} \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2}-\textcircled{1}\text{得}, -2s-s=-3s=(-2)^{101}+2$$

$$\therefore s=\frac{2^{101}-2}{3};$$

$$(4) \text{ 设 } s=a+2a^2+3a^3+\cdots+na^n \textcircled{1},$$

$$as=a^2+2a^3+3a^4+\cdots+na^{n+1} \textcircled{2},$$

$$\textcircled{2}-\textcircled{1}\text{得}: as-s=-a-a^2-a^3-a^4+\cdots-a^n+na^{n+1},$$

$$\text{设 } m=-a-a^2-a^3-a^4+\cdots-a^n \textcircled{3},$$

$$am=-a^2-a^3-a^4+\cdots-a^{n+1} \textcircled{4},$$

$$\textcircled{4}-\textcircled{3}\text{得}: am-m=a-a^{n+1},$$

$$\therefore m=\frac{a-a^{n+1}}{a-1},$$

$$\therefore as-s=\frac{a-a^{n+1}}{a-1}+na^{n+1},$$

$$\therefore s=\frac{a-a^{n+1}}{(a-1)^2}+\frac{na^{n+1}}{a-1}.$$

【点睛】本题考查了规律型-实数的运算，解决本题的关键是理解阅读材料进行计算.

3. 观察下面三行单项式:

$$x, 2x^2, 4x^3, 8x^4, 16x^5, 32x^6, \cdots; \textcircled{1}$$

$$-2x, 4x^2, -8x^3, 16x^4, -32x^5, 64x^6, \cdots; \textcircled{2}$$

$$2x^2, -3x^3, 5x^4, -9x^5, 17x^6, -33x^7, \cdots; \textcircled{3}$$

根据你发现的规律，解答下列问题:

(1) 第①行的第8个单项式为_____;

(2) 第②行的第9个单项式为_____；第③行的第10个单项式为_____;

(3) 取每行的第9个单项式，令这三个单项式的和为A. 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，求 $512\left(A+\frac{1}{4}\right)$ 的值.

答案: (1) $128x^8$; (2) $-512x^9$, $-513x^{11}$; (3) $\frac{1}{2}$.

分析: (1) 观察第①行的前四个单项式，归纳类推出一般规律即可得;

(2) 分别观察第②行和第③行的前四个单项式，归纳类推出一般规律即可得；

(3) 先计算整式的加减进行化简，再将 x 的值代入即可得。

解析： (1) 第①行的第 1 个单项式为 $x = 2^{1-1}x$ ，

第①行的第 2 个单项式为 $2x^2 = 2^{2-1}x^2$ ，

第①行的第 3 个单项式为 $4x^3 = 2^{3-1}x^3$ ，

第①行的第 4 个单项式为 $8x^4 = 2^{4-1}x^4$ ，

归纳类推得：第①行的第 n 个单项式为 $2^{n-1}x^n$ ，其中 n 为正整数，

则第①行的第 8 个单项式为 $2^{8-1}x^8 = 128x^8$ ，

故答案为： $128x^8$ ；

(2) 第②行的第 1 个单项式为 $-2x = (-2)^1x$ ，

第②行的第 2 个单项式为 $4x^2 = (-2)^2x^2$ ，

第②行的第 3 个单项式为 $-8x^3 = (-2)^3x^3$ ，

第②行的第 4 个单项式为 $16x^4 = (-2)^4x^4$ ，

归纳类推得：第②行的第 n 个单项式为 $(-2)^n x^n$ ，其中 n 为正整数，

则第②行的第 9 个单项式为 $(-2)^9 x^9 = -512x^9$ ，

第③行的第 1 个单项式为 $2x^2 = (-1)^{1-1}(2^{1-1}+1)x^{1+1}$ ，

第③行的第 2 个单项式为 $-3x^3 = (-1)^{2-1}(2^{2-1}+1)x^{2+1}$ ，

第③行的第 3 个单项式为 $5x^4 = (-1)^{3-1}(2^{3-1}+1)x^{3+1}$ ，

第③行的第 4 个单项式为 $-9x^5 = (-1)^{4-1}(2^{4-1}+1)x^{4+1}$ ，

归纳类推得：第③行的第 n 个单项式为 $(-1)^{n-1}(2^{n-1}+1)x^{n+1}$ ，其中 n 为正整数，

则第③行的第 10 个单项式为 $(-1)^{10-1}(2^{10-1}+1)x^{10+1} = -513x^{11}$ ，

故答案为： $-512x^9$ ， $-513x^{11}$ ；

(3) 由题意得： $A = 2^8x^9 - 2^9x^9 + (2^8+1)x^{10}$ ，

当 $x = \frac{1}{2}$ 时， $A = 2^8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 - 2^9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 + (2^8+1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ ，

$$= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{10}},$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2^{10}},$$

$$\text{则 } 512 \left(A + \frac{1}{4} \right) = 2^9 \times \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{4} \right),$$

$$= 2^9 \times \frac{1}{2^{10}},$$

$$= \frac{1}{2}.$$

【点睛】本题考查了单项式的规律型问题、整式的化简求值，正确归纳类推出一般规律是解题关键.

4. 阅读下列材料：一般地， n 个相同的因数 a 相乘 $a \cdot a \cdots$ ，记为 a^n . 如 $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ ，此时，3 叫做以 2 为底 8 的对数，记为 $\log_2 8$ （即 $\log_2 8 = 3$ ）. 一般地，若 $a^n = b$ （ $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ， $b > 0$ ），则 n 叫做以 a 为底 b 的对数，记为 $\log_a b$ （即 $\log_a b = n$. 如 $3^4 = 81$ ，则 4 叫做以 3 为底 81 的对数，记为 $\log_3 81$ （即 $\log_3 81 = 4$ ）.

(1) 计算以下各对数的值： $\log_2 4 = \underline{\quad}$ ， $\log_2 16 = \underline{\quad}$ ， $\log_2 64 = \underline{\quad}$.

(2) 写出 (1) $\log_2 4$ 、 $\log_2 16$ 、 $\log_2 64$ 之间满足的关系式 $\underline{\quad}$.

(3) 由 (2) 的结果，请你能归纳出一个一般性的结论： $\log_a M + \log_a N = \underline{\quad}$ （ $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ， $M > 0$ ， $N > 0$ ）.

(4) 设 $a^n = N$ ， $a^m = M$ ，请根据幂的运算法则以及对数的定义说明上述结论的正确性.

答案：(1) 2, 4, 6

(2) $\log_2 4 + \log_2 16 = \log_2 64$

(3) $\log_a(MN)$

(4) 证明见解析

分析：(1) 根据对数的定义求解；

(2) 认真观察，即可找到规律： $4 \times 16 = 64$ ， $\log_2 4 + \log_2 16 = \log_2 64$ ；

(3) 由特殊到一般，得出结论： $\log_a M + \log_a N = \log_a(MN)$.

(4) 设 $\log_a M = b_1$ ， $\log_a N = b_2$ ，根据同底数幂的运算法则： $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 和给出的材料证明结论.

解析：(1) $\because 2^2 = 4$ ， $2^4 = 16$ ， $2^6 = 64$

$\therefore \log_2 4 = 2$ ， $\log_2 16 = 4$ ， $\log_2 64 = 6$ ，

故答案为：2, 4, 6；

(2) $\because 4 \times 16 = 64$ ， $\log_2 4 = 2$ ， $\log_2 16 = 4$ ， $\log_2 64 = 6$ ，

$\therefore \log_2 4 + \log_2 16 = \log_2 64$ ，

故答案为： $\log_2 4 + \log_2 16 = \log_2 64$ ；

(3) 由 (2) 的结果可得 $\log_a M + \log_a N = \log_a(MN)$ ，

故答案为： $\log_a(MN)$.

(4) 设 $\log_a M = b_1$, $\log_a N = b_2$,

则 $a^{b_1} = M$, $a^{b_2} = N$

$$\therefore MN = a^{b_1} a^{b_2}$$

$$= a^{b_1+b_2},$$

$$\therefore b_1 + b_2 = \log_a(MN),$$

$$\therefore \log_a M + \log_a N = \log_a(MN).$$

【点睛】本题是开放性的题目，难度较大。借考查同底数幂的乘法，对数，实际考查学生对指数的理解、掌握的程度；解题的关键是要求学生不但能灵活、准确的应用其运算法则，还要会类比、归纳，推测出对数应有的性质。

5. 阅读材料： 3^1 的末尾数字是 3， 3^2 的末尾数字是 9， 3^3 的末尾数字是 7， 3^4 的末尾数字是 1， 3^5 的末尾数字是 3，……，观察规律， $3^{4n+1} = (3^4)^n \times 3$ ， $\therefore 3^4$ 的末尾数字是 1， $\therefore (3^4)^n$ 的末尾数字是 1， $\therefore (3^4)^n \times 3$ 的末尾数字是 3，同理可知， 3^{4n+2} 的末尾数字是 9， 3^{4n+3} 的末尾数字是 7。解答下列问题：

(1) 3^{2021} 的末尾数字是_____， 14^{2022} 的末尾数字是_____；

(2) 求 2^{2022} 的末尾数字；

(3) 求证： $12^{2024} + 37^{2018}$ 能被 5 整除。

答案：(1) 3，6；

(2) 4；

(3) 证明见解析。

分析：(1) 根据阅读材料中的结论可知 3^{2021} 的末尾数字；根据阅读材料中提供的方法，可得 14^{2n+1} 的末尾数字是 4， 14^{2n} 的末尾数字是 6，于是得解；

(2) 先将 2^{2022} 化成 $(2^4)^{505} \times 2^2$ ，再利用 $(2^4)^{505} = 16^{505}$ 的末尾数字是 6，从而得出结论；

(3) 分别证明 12^{2024} 的末尾数字为 6 和 37^{2018} 的末尾数字 9，则命题即可得证。

解析：(1) 解：Q $3^{2021} = 3^{4 \times 505 + 1}$,

$\therefore 3^{2021}$ 的末尾数字为 3；

Q 14^1 的末尾数字是 4， 14^2 的末尾数字是 6， 14^3 的末尾数字是 4，...

$\therefore 14^{2n+1}$ 的末尾数字是 4， 14^{2n} 的末尾数字是 6，

$\therefore 14^{2022}$ 的末尾数字是 6；

故答案为：3，6；

(2) 解： $2^{2022} = (2^4)^{505} \times 2^2 = (2^4)^{505} \times 4$,

$\therefore (2^4)^{505}$ 的末尾数字是 6，

$\therefore 2^{2022}$ 的末尾数字是 4；

(3) 证明：∵ 12^1 的末尾数字是2， 12^2 的末尾数字是4， 12^3 的末尾数字是8， 12^4 的末尾数字是6， 12^5 的末尾数字是2，...

∴ 12^{4n+1} 的末尾数字是2， 12^{4n+2} 的末尾数字是4， 12^{4n+3} 的末尾数字是8， 12^{4n} 的末尾数字是6，

∴ $12^{2024} = 12^{4 \times 506}$ 的末尾数字为6；

同理可得：

37^{4n+1} 的末尾数字7， 37^{4n+2} 的末尾数字9， 37^{4n+3} 的末尾数字3， 37^{4n} 的末尾数字1；

∴ $37^{2018} = 37^{4 \times 504 + 2}$ 的末尾数字9，

∴ $12^{2024} + 37^{2018}$ 的末尾数字是5，

∴ $12^{2024} + 37^{2018}$ 能被5整除.

【点睛】此题是一道阅读理解题，主要考查了幂的运算、数的整除，熟练掌握同底数幂的乘法、幂的乘方与积的乘方法则是解答此题的关键.

6. (1) 填空：(x-1)(x+1)= x^2-1 ；

(x-1)(x^2+x+1)= x^3-1 ；

(x-1)(x^3+x^2+x+1)=_____；

(2) 猜想：(x-1)($xn+xn^{n-1}+\dots+x+1$)=_____ (n为大于3的正整数)，并证明你的结论；

(3) 运用(2)的结论计算($3^{2019}+3^{2018}+3^{2017}+\dots+3^2+3+1$) - ($3^{1050 \times 2}$) $^{2 \div (8 \times 3^{80})}$ ；

(4) $3^{2019} - 3^{2018} + 3^{2017} - 3^{2016} + \dots + 3^5 - 3^4 + 3^3 - 3^2 + 3 =$ _____.

答案：(1) x^4-1 ；(2) $xn^{n+1}-1$ ，理由见详解；(3) $-\frac{1}{2}$ ；(4) $\frac{9^{1010}+3}{4}$

分析：(1) 根据多项式乘多项式法则计算即可求解；

(2) 利用发现的规律填写，再利用多项式乘多项式法则证明即可；

(3) 利用得出的规律计算得到结果；

(4) 两个数一组分别提取公因数，再把底数化为9，利用得出的规律计算，即可求解.

解析：解：(1) 解：根据多项式乘多项式法则可得：(x-1)(x^3+x^2+x+1)= x^4-1 ，

故答案是： x^4-1 ；

(2) ∵(x-1)(x+1)= x^2-1 ，(x-1)(x^2+x+1)= x^3-1 ，(x-1)(x^3+x^2+x+1)= x^4-1 ，

∴(x-1)($xn+xn^{n-1}+\dots+x+1$)= $xn^{n+1}-1$ ，

理由如下：(x-1)($xn+xn^{n-1}+\dots+x+1$)= $xn^{n+1}+xn+xn^{n-1}+\dots+x-(xn+xn^{n-1}+\dots+x+1)$

= $xn^{n+1}-1$ ，

故答案是： $xn^{n+1}-1$ ；

$$\begin{aligned}
 (3) & (3^{2019} + 3^{2018} + 3^{2017} + \dots + 3^2 + 3 + 1) - (3^{1050 \times 2})^{2 \div (8 \times 3^{80})} \\
 &= \frac{3^{2020} - 1}{3 - 1} - 3^{2100 \times 4 \div 8 \div 3^{80}} \\
 &= \frac{3^{2020} - 1}{2} - \frac{3^{2020}}{2} \\
 &= -\frac{1}{2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) & 3^{2019} - 3^{2018} + 3^{2017} - 3^{2016} + \dots + 3^5 - 3^4 + 3^3 - 3^2 + 3 \\
 &= 2 \times 3^{2018} + 2 \times 3^{2016} + 2 \times 3^{2014} + \dots + 2 \times 3^2 + 3 \\
 &= 2 \times (3^{2018} + 3^{2016} + 3^{2014} + \dots + 3^2) + 3 \\
 &= 2 \times (9^{1009} + 9^{1008} + 9^{1007} + \dots + 9 + 1 - 1) + 3 \\
 &= 2 \times \left(\frac{9^{1010} - 1}{9 - 1} - 1 \right) + 3 \\
 &= 2 \times \frac{9^{1010} - 1}{8} + 1 \\
 &= \frac{9^{1010} + 3}{4},
 \end{aligned}$$

故答案是: $\frac{9^{1010} + 3}{4}$.

【点睛】本题考查了整式的混合运算，掌握多项式乘多项式法则，归纳出公式 $(x^n - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = x^n - 1$ ，是解题的关键.

$$\begin{aligned}
 7. \text{ 已知: } & (x-1)(x+1) = x^2 - 1 & (x-1)(x^2 + x + 1) &= x^3 - 1 \\
 & (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) &= x^4 - 1 & (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) &= x^5 - 1 \\
 & \dots\dots
 \end{aligned}$$

(1) 当 $x=3$ 时, $(3-1) \times (3^3 + 3^2 + 3 + 1) = 3^4 - 1 = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 试求: $2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$ 的值.

(3) 判断 $2^{2010} + 2^{2009} + 2^{2008} + \dots + 2^2 + 2 + 1$ 的值的个位数是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

答案: (1) 80; (2) 63; (3) 7.

分析: (1) 根据有理数的乘方运算法则即可得;

(2) 先根据已知等式归纳类推出一般规律, 再将 $x=2$ 代入求值即可得;

(3) 先根据一般规律可求出结果, 再根据有理数的乘方即可得.

解析: (1) $3^4 - 1 = 81 - 1 = 80$,

故答案为: 80;

(2) 归纳类推得: $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = x^n - 1$, 其中 $n > 1$, 且为整数,

$$\text{则 } 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = (2-1) \times (2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1),$$

$$= 2^6 - 1,$$

$$= 63;$$

$$(3) \quad 2^{2010} + 2^{2009} + 2^{2008} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 = (2-1) \times (2^{2010} + 2^{2009} + 2^{2008} + \cdots + 2^2 + 2 + 1),$$

$$= 2^{2011} - 1,$$

$$\because 2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \quad 2^5 = 32, \quad \cdots, \quad \text{且 } 2011 = 502 \times 4 + 3,$$

$$\therefore 2^{2011} \text{ 的个位数与 } 2^3 \text{ 的个位数相同, 即为 } 8,$$

$$\therefore 2^{2011} - 1 \text{ 的个位数为 } 7,$$

$$\text{即 } 2^{2010} + 2^{2009} + 2^{2008} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 \text{ 的值的个位数为 } 7,$$

故答案为: 7.

【点睛】本题考查了有理数的乘方、整式乘法的规律性问题等知识点, 根据已知等式, 正确归纳类推出一般规律是解题关键.

8. 好学的小东同学, 在学习多项式乘以多项式时发现: $\left(\frac{1}{2}x + 4\right)(2x + 5)(3x - 6)$ 的结果是一个多项式, 并且最高次项为: $\frac{1}{2}x \cdot 2x \cdot 3x = 3x^3$, 常数项为: $4 \times 5 \times (-6) = -120$, 那么一次项

是多少呢? 要解决这个问题, 就是要确定该一次项的系数. 根据尝试和总结他发现: 一次项

系数就是: $\frac{1}{2} \times 5 \times (-6) + 2 \times (-6) \times 4 + 3 \times 4 \times 5 = -3$, 即一次项为 $-3x$.

请你认真领会小东同学解决问题的思路, 方法, 仔细分析上面等式的结构特征. 结合自己对多项式乘法法则的理解, 解决以下问题.

(1) 计算 $(x+2)(3x+1)(5x-3)$ 所得多项式的一次项系数为_____.

(2) 若计算 $(x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + a)(2x - 1)$ 所得多项式不含一次项, 求 a 的值;

(3) 若 $(x+1)^{2021} = a_0x^{2021} + a_1x^{2020} + a_2x^{2019} + \cdots + a_{2020}x + a_{2021}$, 则 $a_{2020} =$ _____.

答案: (1) -11; (2) $a = -3$; (3) 2021.

分析: 根据题意可得出结论多项式和多项式相乘所得结果的一次项系数是每个多项式的一次项系数分别乘以其他多项式的常数项后相加所得.

(1) $(x+2)(3x+1)(5x-3)$ 中每个多项式的一次项系数分别是 1、3、5, 常数项分别是 2、1、-3, 再根据结论即可求出 $(x+2)(3x+1)(5x-3)$ 所得多项式的一次项系数.

(2) $(x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + a)(2x - 1)$ 中每个多项式的一次项系数分别是 1、-3、2, 常数项分别是 1、 a 、-1, 再根据 $(x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + a)(2x - 1)$ 所得多项式的一次项系数为 0, 结合结论即可列关于 a 的一元一次方程, 从而求出 a .

(3) $(x+1)^{2021}$ 中每个多项式一次项系数为 1, 常数项系数也为 1, a_{2020} 为 $(x+1)^{2021}$

所得多项式的一次项系数. 所以根据结论 a_{2020} 为 2121 个 1×1 相加, 即可得出结果.

解析: (1) 根据题意可知 $(x+2)(3x+1)(5x-3)$ 的一次项系数为:

$$1 \times 1 \times (-3) + 3 \times (-3) \times 2 + 5 \times 2 \times 1 = -11.$$

故答案为-11.

(2) 根据题意可知 $(x^2+x+1)(x^2-3x+a)(2x-1)$ 的一次项系数为:

$$1 \times a \times (-1) + (-3) \times 1 \times (-1) + 2 \times 1 \times a = a + 3$$

∵该多项式不含一次项, 即一次项系数为 0,

$$\therefore a + 3 = 0$$

解得 $a = -3$.

(3) 根据题意可知 a_{2020} 即为 $(x+1)^{2021}$ 所得多项式的一次项系数.

$$\therefore a_{2020} = \binom{2021}{1} = 2021$$

故答案为 2021

【点睛】 本题考查多项式乘多项式以及对多项式中一次项系数的理解, 根据题意找出多项式乘多项式所得结果的一次项系数与多项式乘多项式中每个多项式的一次项系数和常数项关系规律是解题关键.

9. 你能求 $(x-1)(x^{99}+x^{98}+x^{97}+\dots+x+1)$ 的值吗?

遇到这样的问题, 我们可以先思考一下, 从简单的情形入手, 分别计算下列各式的值.

$$(1) (x-1)(x+1) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) (x-1)(x^2+x+1) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) (x-1)(x^3+x^2+x+1) = \underline{\hspace{2cm}};$$

...

由此我们可以得到:

$$(4) (x-1)(x^{99}+x^{98}+x^{97}+\dots+x+1) = \underline{\hspace{2cm}},$$

请你利用上面的结论, 完成下列的计算:

$$(5) 2^{99}+2^{98}+2^{97}+\dots+2+1;$$

答案: (1) x^2-1 ; (2) x^3-1 ; (3) x^4-1 ; (4) $x^{100}-1$; (5) $2^{100}-1$.

分析: (1) 直接运用平方差公式计算即可

(2) (3) 利用多项式乘多项式的运算法则进行计算即可

(4) 根据 (1) (2) (3) 总结规律, 运算规律即可解答

(5) 将 $2^{99}+2^{98}+2^{97}+\dots+2+1$ 写成 $(2-1)(2^{99}+2^{98}+2^{97}+\dots+2+1)$, 再利用规律解答即可

解析: 解: (1) $(x-1)(x+1) = x^2-1$

$$(2) (x-1)(x^2+x+1) = x^3-1$$

$$(3) (x-1)(x^3+x^2+x+1) = x^4-1$$

$$(4) (x-1)(x^{99}+x^{98}+x^{97}+\dots+x+1)=x^{100}-1$$

$$(5) 2^{99}+2^{98}+2^{97}+\dots+2+1$$

$$= (2-1)(2^{99}+2^{98}+2^{97}+\dots+2+1)$$

$$= 2^{100}-1$$

【点睛】本题考查整式的混合运算能力以及分析、总结和归纳能力，掌握多项式乘多项式运算法则并总结出代数式的规律是解答本题的关键。

10. 观察下列各式：

$$(x-1)(x+1)=x^2-1$$

$$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$$

$$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=x^4-1$$

.....

(1)按以上等式的规律填空： $(x-1)(\quad)=x^5-1$ ；

(2)根据规律可得 $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)=\quad$ （其中 n 为正整数）；

(3)利用上面的结论，完成下面两题的计算：

① $(3-1)(3^{50}+3^{49}+3^{48}+\dots+3^2+3+1)$

② $(-2)^{2022}+(-2)^{2021}+(-2)^{2020}+\dots+(-2)^3+(-2)^2+(-2)+1$

答案：(1) $x^4+x^3+x^2+x+1$

(2) x^n-1

(3)① $3^{51}-1$ ；② $\frac{2^{2023}-1}{2-1}$

分析：（1）根据所给出的具有规律的式子，即可求解；

（2）观察所给式子的特点，等号右边 x 的指数比等号左边 x 的最高指数大1，然后写出即可；

（3）①根据所给式子的规律，把 x 换为3即可求解；根据上述规律计算其和，即可得解．②用添项法，实在补充为题干给定形式，即乘以 $-\frac{1}{2} \times (-2-1)$ 即可解答．

解析：（1） $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=x^5-1$ ；

故答案为： $x^4+x^3+x^2+x+1$

（2） $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)=x^n-1$ ；

故答案为： x^n-1

（3）① $(3-1)(3^{50}+3^{49}+3^{48}+\dots+3^2+3+1)$

$= 3^{51}-1$

$$\begin{aligned}
& \textcircled{2} (-2)^{2022} + (-2)^{2021} + (-2)^{2020} + \dots + (-2)^3 + (-2)^2 + (-2) + 1 \\
&= -\frac{1}{3} \times (-2-1) \times [(-2)^{2022} + (-2)^{2021} + (-2)^{2020} + \dots + (-2)^3 + (-2)^2 + (-2) + 1] \\
&= -\frac{1}{3} \times [(-2)^{2023} - 1] \\
&= -\frac{1}{3} \times (-2^{2023} - 1) \\
&= \frac{2^{2023} + 1}{3}
\end{aligned}$$

【点睛】本题考查了平方差公式的推广，要读懂题目信息并总结出规律，具有规律性是特殊式子的因式分解，解题的关键是找出所给范例展示的规律.

11. 李狗蛋同学在学习整式乘法公式这一节时，发现运用乘法公式在进行一些计算时特别简便，这激发了李狗蛋同学的学习兴趣，他想再探究一些有关整式乘法的公式，便主动查找资料进行学习，以下是他找来的资料题，请你一同跟李狗蛋同学探究一下：

(1) 探究： $(a-b)(a+b) = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 猜想： $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1}) = \underline{\hspace{2cm}}$ (n 为正整数，且 $n \geq 2$)；

(3) 利用上述猜想的结论计算： $2^9 - 2^8 + 2^7 - \dots + 2^3 - 2^2 + 2 - 1$ 的值.

答案：(1) $a^2 - b^2$ ， $a^3 - b^3$ ， $a^4 - b^4$ ； (2) $a^n - b^n$ ； (3) 341

分析：(1) 根据平方差公式及多项式乘多项式法则计算即可；

(2) 根据 (1) 的答案归纳总结即可；

(3) 利用 (2) 的规律变形为 (2) 的形式计算即可.

解析：解：(1) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ ，

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3,$$

$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 - a^3b - a^2b^2 - ab^3 - b^4$$

$$= a^4 - b^4,$$

故答案为： $a^2 - b^2$ ， $a^3 - b^3$ ， $a^4 - b^4$ ；

(2) 根据 (1) 的结果可知： $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1}) = a^n - b^n$ ，

故答案为： $a^n - b^n$ ；

$$\begin{aligned}
(3) \text{ 原式} &= 2^9 + 2^8 \times (-1) + 2^7 \times (-1)^2 + \dots + 2^3 \times (-1)^6 + 2^2 \times (-1)^7 + 2 \times (-1)^8 + (-1)^9 \\
&= \frac{1}{3} \times [2 - (-1)] \times [2^9 + 2^8 \times (-1) + 2^7 \times (-1)^2 + \dots + 2^3 \times (-1)^6 + 2^2 \times (-1)^7 + 2 \times (-1)^8 + (-1)^9]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \times [2^{10} - (-1)^{10}]$$

$$= \frac{2^{10} - 1}{3}$$

$$= \frac{1024 - 1}{3}$$

$$= 341.$$

【点睛】本题考查了平方差公式及多项式乘以多项式的变化规律，弄清题中的规律是解本题的关键.

12. 观察并验证下列等式:

$$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2 = 9$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2 = 36$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2 = 100$$

(1) 续写等式 $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 根据上述等式中所体现的规律，猜想结论

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(3) 利用 (2) 中的结论计算:

① $3^3 + 6^3 + 9^3 + \dots + 54^3 + 57^3$

② $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots + (2n-1)^3$

答案: (1) $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 225$

(2) $(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(3) ① 974700; ② $2n^4 - n^2$

分析: (1) 根据已知算式, 可得从 1 开始, 几个连续自然数的立方和等于这些自然数的和的平方, 据此解答即可;

(2) 根据已知算式, 可得从 1 开始, 几个连续自然数的立方和等于这些自然数的和的平方, 据此解答即可;

(3) ① 根据 (2) 中结论进行求解即可; ② 根据 (2) 中结论求解即可.

(1)

解: 由题意得: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 225,$

故答案为: $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 225;$

(2)

解: $\because 1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2 = 9$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2 = 36$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2 = 100$$

$$\therefore \text{可以推出 } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\text{故答案为: } (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(3)

$$\text{解: ① } 3^3 + 6^3 + 9^3 + \dots + 54^3 + 57^3$$

$$= (1 \times 3)^3 + (2 \times 3)^3 + (3 \times 3)^3 + \dots + (18 \times 3)^3 + (19 \times 3)^3$$

$$= 3^3 \times (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 18^3 + 19^3)$$

$$= 27 \times \frac{19^2 \times 20^2}{4}$$

$$= 974700;$$

$$\text{② } \because 2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + \dots + (2n)^3$$

$$= 2^3 \times [1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3]$$

$$= 8 \times \frac{(n+1)^2 n^2}{4}$$

$$= 2n^2(n+1)^2,$$

$$\text{又 } \because 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3 + (2n)^3 = \frac{(2n+1)^2(2n)^2}{4} = n^2(2n+1)^2,$$

$$\therefore 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots + (2n-1)^3$$

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3 + (2n)^3 - [2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + \dots + (2n)^3]$$

$$= n^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2$$

$$= n^2(4n^2 + 4n + 1 - 2n^2 - 4n - 2)$$

$$= n^2(2n^2 - 1)$$

$$= 2n^4 - n^2.$$

【点睛】本题主要考查了数字类的规律题，整式的混合计算，正确理解题意找到规律是解题的关键。

$$13. \text{ 已知 } x \neq 1, (1+x)(1-x) = 1-x^2, (1-x)(1+x+x^2) = 1-x^3, (1-x)(1+x+x^2+x^3) = 1-x^4.$$

(1) 根据以上式子计算:

$$\text{① } (1-2)(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5);$$

$$\text{② } 2+2^2+2^3+\dots+2^n \text{ (} n \text{ 为正整数)};$$

$$\textcircled{3} (x-1)(x^{99} + x^{98} + x^{97} + \dots + x^2 + x + 1).$$

(2)通过以上计算, 请你进行下面的探索:

$$\textcircled{1} (a-b)(a+b) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\textcircled{2} (a-b)(a^2 + ab + b^2) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\textcircled{3} (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

答案: (1) $\textcircled{1} -63$; $\textcircled{2} 2^{n+1} - 2$; $\textcircled{3} x^{100} - 1$;

(2) $\textcircled{1} a^2 - b^2$; $\textcircled{2} a^3 - b^3$; $\textcircled{3} a^4 - b^4$.

分析: (1) $\textcircled{1}$ 直接利用题中的结论代入数值计算; $\textcircled{2}$ 缺少 $(1-x)$ 项, 从而可以凑配易得 $-(1-2)(1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^n-1) = -(1-2^{n+1})-1 = 2^{n+1}-2$, 同理即可解答; $\textcircled{3}$

$x^{99} + x^{98} + x^{97} + \dots + x^2 + x + 1$ 中, x 按降冪进行排列, 然后套用规律进行解答;

(2) 仿照所给等式的规律即可直接写出答案.

解析: (1) $\textcircled{1} (1-2)(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5) = 1-2^6 = -63$;

$$\textcircled{2} 2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^n = -(1-2)(1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^n-1) = 2^{n+1}-2;$$

$$\textcircled{3} (x-1)(x^{99} + x^{98} + x^{97} + \dots + x^2 + x + 1) = (x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{97}+x^{98}+x^{99}) = x^{100}-1;$$

$$(2) \textcircled{1} (a-b)(a+b) = a^2 - b^2;$$

$$\textcircled{2} (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3;$$

$$\textcircled{3} (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4.$$

故答案为: $\textcircled{1} a^2 - b^2$; $\textcircled{2} a^3 - b^3$; $\textcircled{3} a^4 - b^4$.

【点睛】 本题考查平方差公式, 正确理解平方差公式及展开形式是解决本题关键.

14. 阅读并思考:

计算 47^2 时, 山桂娜同学发现了一个简单的口算方法, 具体步骤如下:

第一步: 47 接近整十数 50, $50-47=3$;

第二步: 取 50 的一半 25, $25-3=22$;

第三步: $3^2=9$

第四步: 把第二、三步综合起来, $47^2 = (25-3) \times 100 + 3^2 = 2209$.

(1)依此方法计算 49:

第一步: 49 接近整十数 50, $50-49=1$;

第二步: 取 50 的一半 25, $25-1=24$;

第三步: $1^2=1$

第四步: 把第二、三步综合起来, $49^2 = (\underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}}) \times 100 + \underline{\hspace{1cm}}^2 = 2401$.

(2)请你根据山桂娜同学的方法，填写出一个正确的计算公式.

$$(50-n)^2 = (\underline{\quad} - \underline{\quad}) \times 100 + \underline{\quad}^2.$$

(3)利用乘法运算说明第(2)小题中这个公式的正确性.

(4)写出利用这个公式计算 $56^2 = 3136$ 的过程.

(5)计算 63×67 也有一个简单的口算方法，具体步骤如下：

第一步： $6 \times (6+1) = 42$ ；

第二步： $3 \times 7 = 21$ ；

第三步：前面两步的结果综合起来， 63×67 的结果是 4221.

写出上述过程所依据的计算公式_____.

(6)利用乘法运算说明第(5)小题中这个公式的正确性.

答案:(1)25, 1, 1

(2)25, n , n

(3)见详解

(4)见详解

(5) $(10a+b)[10a+(10-b)] = a(a+1) \times 100 + b(10-b)$

(6)见详解

分析：(1) 根据山桂娜同学的简便运算步骤解答即可；

(2) 根据(1)的规律书写公式即可；

(3) 利用整式乘法运算法则进行计算，即可说明(2)中公式的正确性；

(4) 利用(2)中得到的公式求解即可；

(5) 分析 63×67 的简单运算，书写计算公式即可；

(6) 利用整式乘法运算法则进行计算，即可说明(5)中公式的正确性.

解析：(1) 解：根据题意，计算 49：

第一步：49 接近整十数 50， $50 - 49 = 1$ ；

第二步：取 50 的一半 25， $25 - 1 = 24$ ；

第三步： $1^2 = 1$

第四步：把第二、三步综合起来， $49^2 = (25-1) \times 100 + 1^2 = 2401$.

故答案为：25, 1, 1；

(2) 根据山桂娜同学的方法，填写出正确的计算公式如下：

$$(50-n)^2 = (25-n) \times 100 + n^2.$$

故答案为：25, n , n ；

(3) $\because (50-n)^2 = n^2 - 100n + 2500$,

$$(25-n) \times 100 + n^2 = n^2 - 100n + 2500,$$

∴公式 $(50-n)^2 = (25-n) \times 100 + n^2$ 正确;

$$\begin{aligned} (4) \quad 56^2 &= (25+6) \times 100 + 6^2 \\ &= 31 \times 100 + 36 \\ &= 3136; \end{aligned}$$

(5) 计算 63×67 的口算方法, 具体步骤如下:

$$\text{第一步: } 6 \times (6+1) = 42;$$

$$\text{第二步: } 3 \times 7 = 21;$$

第三步: 前面两步的结果综合起来, 63×67 的结果是 4221.

结合上述计算过程, 可书写计算公式为 $(10a+b)[10a+(10-b)] = a(a+1) \times 100 + b(10-b)$.

故答案为: $(10a+b)[10a+(10-b)] = a(a+1) \times 100 + b(10-b)$;

$$\begin{aligned} (6) \quad &\because (10a+b)[10a+(10-b)] \\ &= 100a^2 - 10ab + 100a + 10ab - b^2 + 10b \\ &= 100a^2 + 100a + 10b - b^2, \\ &\text{又} \because a(a+1) \times 100 + b(10-b) \\ &= (a^2 + a) \times 100 + (10b - b^2) \\ &= 100a^2 + 100a + 10b - b^2, \end{aligned}$$

∴公式 $(10a+b)[10a+(10-b)] = a(a+1) \times 100 + b(10-b)$ 是正确的.

【点睛】本题主要考查了数字类规律探索、含乘方的有理数混合运算、整式混合运算等知识, 理解题意, 正确书写简便运算公式是解题关键.

15. 阅读材料: 把形如 $ax^2 + bx + c$ 的二次三项式(或其一部分)配成完全平方式的方法叫做配方法. 配方法基本形式是完全平方公式的逆写, 即 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

例如: $(x-1)^2 + 3$ 、 $(x-2)^2 + 2x$ 、 $(\frac{1}{2}x-2)^2 + \frac{3}{4}x^2$ 是 $x^2 - 2x + 4$ 的三种不同形式的配方(即“余项”分别是常数项、一次项、二次项).

请根据阅读材料解决下列问题:

(1) 比照上面的例子, 写出 $x^2 - 4x + 9$ 三种不同形式的配方;

(2) 已知 $z - x + 2y = 4$, $zx + 2xy + y^2 - 6y + 13 = 0$, 求 $(-y)^x$ 的值;

(3) 当 x, y 何值时, 代数式 $5x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 25$ 取得最小值, 最小值为多少?

答案: (1) 第一种: $x^2 - 4x + 9 = (x-2)^2 + 5$; 第二种: $x^2 - 4x + 9 = (x-3)^2 + 2x$; 第三种:

$$x^2 - 4x + 9 = (\frac{2}{3}x - 3)^2 + \frac{5}{9}x^2$$

$$(2) \frac{1}{9}$$

(3)16

分析：（1）根据材料中的三种不同形式的配方，“余项”分别是常数项、一次项、二次项，可解答；

（2）将 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13$ 配方，根据平方的非负性可得 x 和 y 的值，可解答；

（3）首先把已知等式变为 $4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 + 6x + 9 + 16$ ，然后利用完全平方公式分解因式，变为两个非负数和一个正数的和的形式，然后利用非负数的性质即可解决问题．

（1）

解：第一种： $x^2 - 4x + 9 = x^2 - 4x + 4 + 5 = (x - 2)^2 + 5$ ；

第二种： $x^2 - 4x + 9 = x^2 - 6x + 9 + 2x = (x - 3)^2 + 2x$ ；

第三种： $x^2 - 4x + 9 = \frac{4}{9}x^2 - 4x + 9 + \frac{5}{9}x^2 = (\frac{2}{3}x - 3)^2 + \frac{5}{9}x^2$ ；

（2）

$\text{Q } z - x + 2y = 4, \quad zx + 2xy + y^2 - 6y + 13 = 0,$

$$\therefore zx + 2xy + y^2 - 6y + 13$$

$$= x(z + 2y) + y^2 - 6y + 13$$

$$= x(x + 4) + y^2 - 6y + 13$$

$$= x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13$$

$$= 0,$$

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 0,$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0,$$

$$x = -2, \quad y = 3,$$

$$\therefore (-y)^x = (-3)^{-2} = \frac{1}{9};$$

（3）

$$5x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 25,$$

$$= 4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 + 6x + 9 + 16,$$

$$= (2x - y)^2 + (x + 3)^2 + 16,$$

$$\text{Q } (2x - y)^2 + (x + 3)^2 \geq 0,$$

$$\therefore \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = -3 \\ y = -6 \end{cases}.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/156053023101010143>