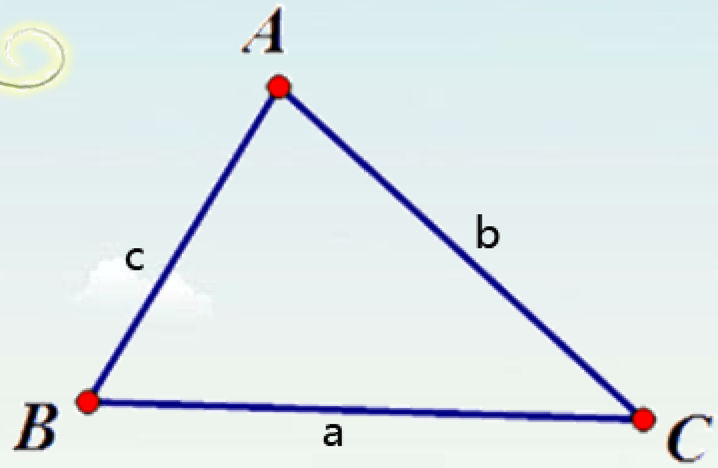
海伦公式

选自人教版普通高中课程标准实验教科书必修五

第一章“阅读与思考”

新课导入



ΔABC中，，已知$a = 15, b = 14, c = 13$

求三角形的面积$S_{\Delta ABC}$

运用我们已经学习过的知识可以直接求解吗？

问题提出

公元1世纪，希腊数学家海伦在其著作《度量论》一书中给出了一个形式漂亮的公式：

a,b,c是ΔABC的三边长，若$p=\frac{a+b+c}{2}$，记

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

海伦

- 海伦，古希腊数学家、力学家、机械学家。生平不详。约公元62年活跃于亚历山大，在那里教过数学、物理学等课程。他多才多艺，善于博采众长。在论证中大胆使用某些经验性的近似公式，注重数学的实际应用。

- 海伦有许多学术著作，都用希腊文撰写，但大部分已失传。主要著作是《量度论》一书。该书共3卷，分别论述平面图形的面积，立体图形的体积和将图形分成比例的问题。其中卷Ⅰ第8题给出著名的已知三边长求三角形面积的海伦公式。

添加义项 ?

阿基米德 - ——力学之父 编辑词条

阿基米德（公元前287年—公元前212年），古希腊哲学家、数学家、物理学家，确定了许多物体表面积和体积的计算方法，发现了杠杆原理和浮力定律，出生于西西里岛的叙拉古。设计制造了多种机械，如螺旋扬水器、军用投射器等。阿基米德到过亚历山大里亚，据说他住在亚历山大里亚时期发明了阿基米德式螺旋抽水机。

基本信息

个人背景	**职业：** 哲学家、数学家、物理学家	
个人概况	**中文名：** 阿基米德 **别名：** 力学之父 **出生地：** 锡拉库萨（叙拉古） **逝世日期：** 公元前212年	**外文名：** Archimedes **国籍：** 古希腊 **出生日期：** 公元前287年
其他信息	**其他成就：** 几何体的表面积和体积的计算方法	**其他作品：** 《论球和圆柱》、《论螺线》、《沙的计算》、《论图形的平衡》。

阿基米德


○三斜求積
問沙田一段有三斜其小斜一十三里中斜一十四里大
斜一十五里里法三百步欲知為田幾何
荅曰田積三百一十五頃
術曰以少廣求之以小斜冪并大斜冪減中斜冪餘半之
自乘於上以小斜冪乘大斜冪減上餘四約之為實一

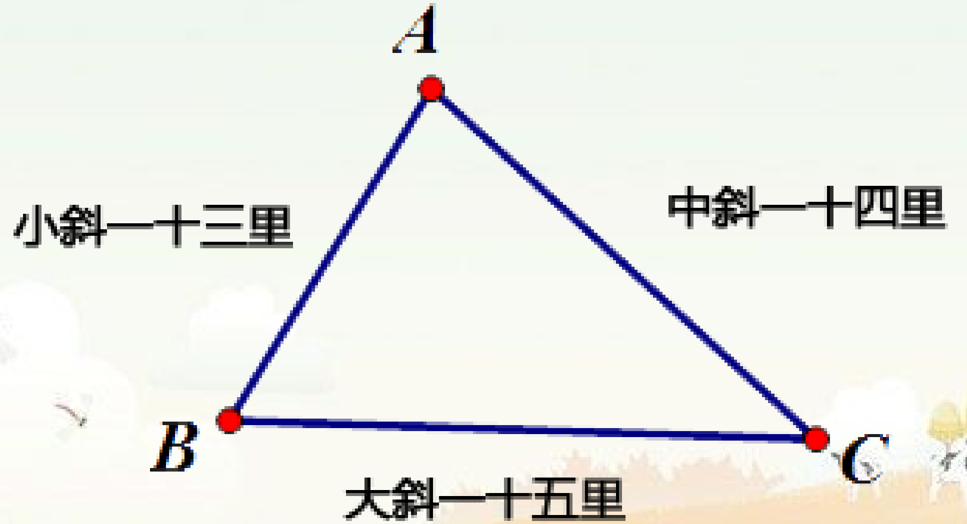
基本信息

中文名称	秦九韶	逝世日期	1261年
别名	字道古	职业	官员，数学家
国籍	宋朝	信仰	儒学
民族	汉族	主要成就	1247年完成数学名著《数书九章》发明"秦九韶算法"...
出生地	普州安岳（今四川安岳）	代表作品	《数书九章》
出生日期	1208年（李俨钱宝琮认为1202年）		

新课导入

问有沙田一段，有三斜，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里。里法三百步，欲知为田几何？

转化为数学语言为下列图形：



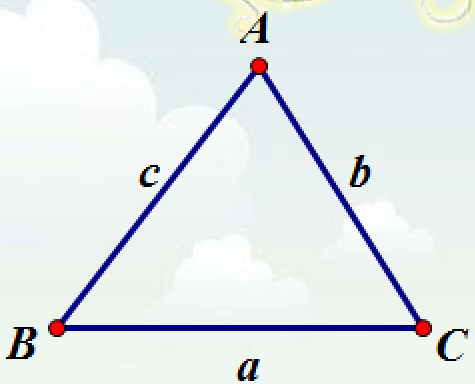
问题提出

我国古代数学家秦九韶在《数书九章》中记述了“三斜求积术”，即已知三角形的三边长，求它的面积。用现代公式表示即为：

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}$$

公式推导

一：余弦定理证明法



$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}acsinB \quad (sinB>0) \qquad ①$$

$$sin^2B+cos^2B=1$$

$$sinB=\sqrt{1-cosB^2} \qquad ②$$

$$cosB=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \qquad ③$$

把③② 代入①，得：

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sqrt{1-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca})^2}$$

“三斜求积”公式

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2]}$$

公式转化

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2]}$$

平方差公式$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$:

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}(ca-\frac{c^2+a^2-b^2}{2})(ca+\frac{c^2+a^2-b^2}{2})}$$

通分:

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{2ac-c^2-a^2+b^2}{2})(\frac{2ac+c^2+a^2-b^2}{2})}$$

完全平方公式:

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{-\ (a-c)^2+b^2}{2}\right]\left[\frac{(a+c)^2-b^2}{2}\right]}$$

平方差公式:

$$S=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}$$

$$S=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}(\frac{a+b+c}{2}-a)(\frac{a+b+c}{2}-b)(\frac{a+b+c}{2}-c)}$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\quad p=\frac{a+b+c}{2}$$

过程梳理

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B$$

余弦定理

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sqrt{1-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca})^2}$$

把$\frac{1}{2}$乘到根号内

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2]}$$ “三斜求积”公式

等价

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\quad p=\frac{a+b+c}{2}$$ 海伦公式

公式转化

我们发现：

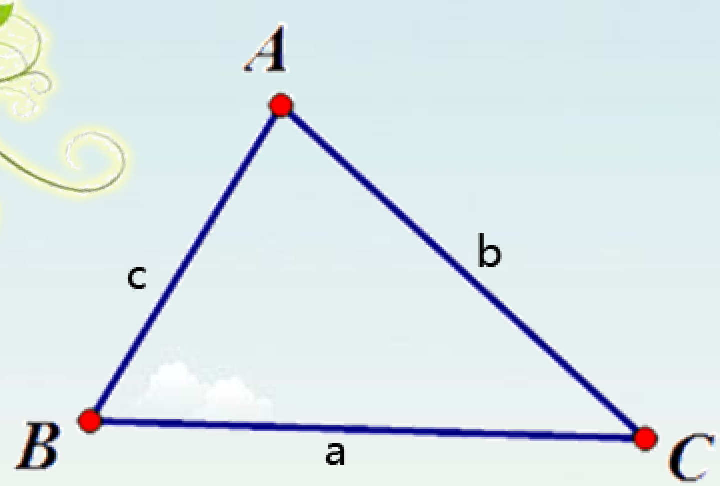
海伦公式$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，$p=\frac{a+b+c}{2}$

等价

秦九韶的“三斜求积”公式

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}$$

课堂练习



ΔABC中，$a = 15, b = 14, c = 13,$

则，$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{15+14+13}{2} = 21$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)} = 84$$