第 22 讲 难点探究专题：相似三角形中的动点问题

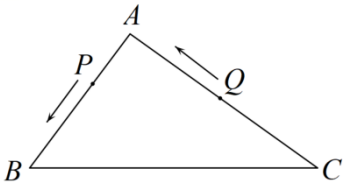
模块一 思维导图串题型



模块二 题型归纳举一反三

【题型一 相似三角形动点中求时间多解问题（利用分类讨论思想）】

例 1．（2023·河北·九年级专题练习）如图，在$\triangle ABC$中，$AB=8\text{cm}, AC=16\text{cm}$，点 P 从 A 出发，以 2cm/s 的速度向 B 运动，同时点 Q 从 C 出发，以 3cm/s 的速度向 A 运动，当其中一个动点到达端点时，另一个动点也随之停止运动，设运动的时间为 t.



（1）用含 t 的代数式表示：$AQ=$_____；

（2）当以 A，P，Q 为顶点的三角形与$\triangle ABC$相似时，运动时间$t=$_____

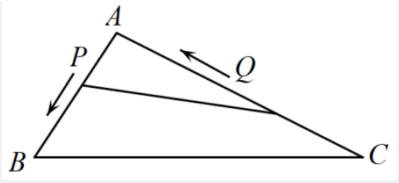
【答案】 $16-3t$ / $-3t+16$ $\frac{16}{7}$秒或 4 秒

【分析】（1）根据路程=速度×时间，即可表示出 AQ 的长度.

（2）此题应分两种情况讨论．①当$\triangle APQ\backsim\triangle ABC$时；②当$\triangle APQ\backsim\triangle ACB$时．利用相似三角形的性质求解即可.

【详解】解：（1）由题意可知：$AQ=16-3t$，

（2）连接 PQ，



∵∠PAQ=∠BAC，

∴当$\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}$时，$\triangle APQ\backsim\triangle ABC$，即$\frac{2t}{8}=\frac{16-3t}{16}$，解得$t=\frac{16}{7}$；

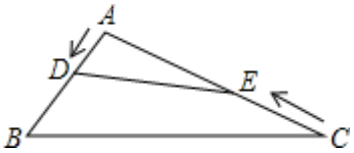
当$\frac{AP}{AC}=\frac{AQ}{AB}$时，$\triangle APQ\backsim\triangle ACB$，即$\frac{2t}{16}=\frac{16-3t}{8}$，解得 t=4.

∴运动时间为$\frac{16}{7}$秒或 4 秒.

故答案为：$16-3t$；$\frac{16}{7}$秒或 4 秒

【点睛】考查相似三角形的判定与性质，掌握相似三角形的判定定理与性质定理是解题的关键，注意不要漏解.

【变式 1-1】（2023 春·山东烟台·八年级统考期末）如图，在钝角三角形 ABC 中，AB＝6cm，AC＝12cm，动点 D 从 A 点出发到 B 点止，动点 E 从 C 点出发到 A 点止．点 D 运动的速度为 1cm/秒，点 E 运动的速度为 2cm/秒．如果两点同时运动，那么当以点 A、D、E 为顶点的三角形与$\triangle ABC$ 相似时，运动的时间是__.



【答案】3 秒或 4.8 秒

【分析】如果以点 A 、D 、E 为顶点的三角形与$\triangle ABC$ 相似，由于 A 与 A 对应，那么分两种情况：①D 与 B 对应；②D 与 C 对应．根据相似三角形的性质分别作答.

【详解】解：如果两点同时运动，设运动 t 秒时，以点 A、D、E 为顶点的三角形与$\triangle ABC$ 相似，

则 AD＝t，CE＝2t，AE＝AC－ CE＝12－ 2t.

①当 D 与 B 对应时，有$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

∴AD：AB＝AE：AC，

∴t：6＝（12－ 2t）：12，

∴t＝3；

②当 D 与 C 对应时，有$\triangle ADE\backsim\triangle ACB$.

∴AD：AC＝AE：AB，

∴t：12＝（12－ 2t）：6，

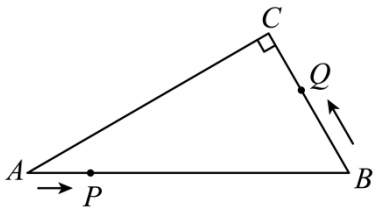
∴t＝4.8.

故当以点 A、D、E 为顶点的三角形与$\triangle ABC$ 相似时，运动的时间是 3 秒或 4.8 秒，

故答案为：3 秒或 4.8 秒.

【点睛】主要考查了相似三角形的性质：相似三角形的对应边成比例．本题分析出以点A、D、E为顶点的三角形与$\triangle ABC$相似，有两种情况是解决问题的关键．

【变式 1-2】如图，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$BC=9$，若点P是边AB上的一个动点，以每秒3个单位的速度按照从$A\to B\to A$运动，同时点Q从B→C以每秒1个单位的速度运动，当一个动点到达终点时，另一个动点也随之停止运动，在运动过程中，设运动时间为t，若$\triangle BPQ$与$\triangle ABC$相似，则t的值为_____．



【答案】$\frac{18}{5}$或$\frac{36}{7}$或$\frac{36}{5}$

【分析】根据题意可知$\angle B=\angle B$，分$\triangle BPQ\backsim\triangle BAC$和$\triangle BPQ\backsim\triangle BCA$两种情形讨论即可求解．

【详解】解：∵在Rt$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$BC=9$，

$\therefore AB=18$，$AC=9\sqrt{3}$

①当$0<t<6$时，$BP=AB-AP=18-3t$，$BQ=t$，

若$\triangle BPQ\backsim\triangle BAC$，

$\therefore\frac{BP}{AB}=\frac{BQ}{BC}$

则$\frac{BP}{BQ}=\frac{AB}{BC}=2$，

$\therefore 18-3t=2t$，

解得：$t=\frac{18}{5}$；

若$\triangle BPQ\backsim\triangle BCA$，

$\therefore\frac{BP}{BC}=\frac{BQ}{BA}$则$\frac{BP}{BQ}=\frac{BC}{BA}=\frac{1}{2}$

$\therefore 18-3t=\frac{1}{2}t$，

解得：$t=\frac{36}{7}$

②当$6<t<9$时，$BP=AP-AB=3t-18$，$BQ=t$，

同理可得$3t-18=2t$或$3t-18=\frac{1}{2}t$

解得：$t=18$（舍去）或$t=\frac{36}{5}$

综上所述，$t=\frac{18}{5}$或$t=\frac{36}{7}$或$t=\frac{36}{5}$，

故答案为：$\frac{18}{5}$或$\frac{36}{7}$或$\frac{36}{5}$.

【点睛】本题考查了相似三角形的性质与判定，分类讨论是解题的关键.

【变式 1-3】（2023 春·广东汕头·九年级校考期中）如图 1，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=6$cm，$BC=8$cm，动点 P 从点 B 出发，在 BA 边上以每秒 $5cm$ 的速度向点 A 匀速运动，同时动点 Q 从点 C 出发，在 CB 边上以每秒 $4cm$ 的速度向点 B 匀速运动，运动时间为 t 秒$\left(0<t<2\right)$，连接 PQ.

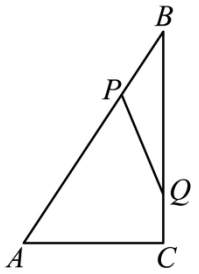


图1

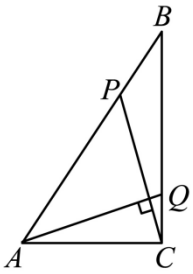


图2

(1)若△BPQ 与$\triangle ABC$ 相似，求 t 的值；

(2)直接写出△BPQ 是等腰三角形时 t 的值；

(3)如图 2，连接 AQ、CP，若 $AQ\perp CP$，求 t 的值.

【答案】(1)t 的值为 1 或$\frac{41}{32}$

(2)$\triangle BPQ$ 是等腰三角形时 t 的值为：$\frac{2}{3}$或$\frac{8}{9}$或$\frac{64}{57}$

(3)$t=\frac{7}{8}$

【分析】（1）根据勾股定理可得 $AB=10$cm，分两种情况：①$\triangle BPQ\sim\triangle BAC$，②$\triangle BPQ\sim\triangle BCA$，根据相似三角形的性质将 $BP=5t$cm，$QC=4t$cm，$AB=10$cm，$BC=8$cm 代入计算即可得；

（2）分三种情况：①当 $PB=PQ$ 时，过 P 作 $PH\perp BQ$，则 $BH=\frac{1}{2}BQ=4-2t$，$PB=5t$，根据平行线分线段成比例定理得到$\frac{PB}{AB}=\frac{BH}{BC}$，进而即可求解；②当 $PB=BQ$ 时，列出式子即可求解；③当 $BQ=PQ$ 时，过 Q 作 $QG\perp AB$ 于 G，则 $BG=\frac{1}{2}PB=\frac{5}{2}t$，$BQ=8-4t$，通过$\triangle BGQ\sim\triangle BCA$，得到比例式进而即可求解；

（3）设 AQ，CP 交于点 N，过 P 作 $PM\perp BC$ 于点 M，先根据相似三角形的判定与性质可得 $PM=3t$cm，$BM=4t$cm，从而可得 $MC=\left(8-4t\right)$cm，再证出$\triangle ACQ\sim\triangle CMP$，根据相似三角形的性质即可得.

【详解】（1）解：$\because\angle ACB=90°$，$AC=6$cm，$BC=8$cm，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10(\text{cm})$，

由题意得：$BP=5t$cm，$QC=4t$cm，$BQ=BC-QC=(8-4t)$cm，

分以下两种情况讨论：

①当$\triangle BPQ\sim\triangle BAC$时，$\frac{BP}{BA}=\frac{BQ}{BC}$，

即$\frac{5t}{10}=\frac{8-4t}{8}$，

解得$t=1$；

②当$\triangle BPQ\sim\triangle BCA$时，$\frac{BP}{BC}=\frac{BQ}{BA}$，

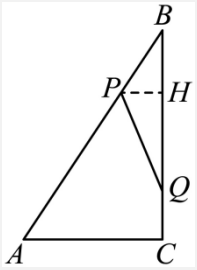
即$\frac{5t}{8}=\frac{8-4t}{10}$，

解得$t=\frac{41}{32}$，

综上，t的值为1或$\frac{41}{32}$；

（2）解：分三种情况：

①当$PB=PQ$时，如图，过P作$PH\perp BQ$，



则$BH=\frac{1}{2}BQ=4-2t$，$PB=5t$，

$\because PH\perp BQ$，$AC\perp BC$，

$\therefore PH\parallel AC$，

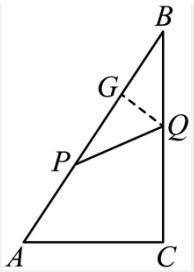
$\therefore\frac{PB}{AB}=\frac{BH}{BC}$，即$\frac{5t}{10}=\frac{4-2t}{8}$，

解得：$t=\frac{2}{3}$；

②当$PB=BQ$时，即$5t=8-4t$，

解得：$t=\frac{8}{9}$；

③当$BQ=PQ$时，如图，过Q作$QG\perp AB$于G，



则 $BG=\frac{1}{2}PB=\frac{5}{2}t$，$BQ=8-4t$，

$\because \angle QBG=\angle ABC$，$\angle BGQ=\angle BCA=90°$，

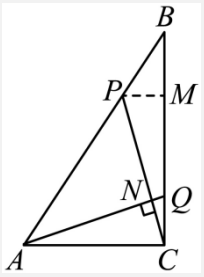
$\therefore \triangle BGQ\sim\triangle BCA$，

$\therefore \frac{BG}{BC}=\frac{BQ}{BA}$ 即 $\frac{\frac{5}{2}t}{8}=\frac{8-4t}{10}$，

解得：$t=\frac{64}{57}$；

综上所述：$\triangle BPQ$ 是等腰三角形时 t 的值为：$\frac{2}{3}$ 或 $\frac{8}{9}$ 或 $\frac{64}{57}$；

（3）解：如图，设 AQ，CP 交于点 N，过 P 作 $PM\perp BC$ 于点 M，



$\because PM\perp BC$，$\angle ACB=90°$，

$\therefore PM/\!/AC$，

$\therefore \triangle BPM:\triangle BAC$，

$\therefore \frac{BP}{BA}=\frac{PM}{AC}=\frac{BM}{BC}$，即 $\frac{5t}{10}=\frac{PM}{6}=\frac{BM}{8}$，

解得 $PM=3t\text{cm}$，$BM=4t\text{cm}$，

$\therefore MC=BC-BM=(8-4t)\text{cm}$，

$\because \angle QAC+\angle NCA=90°$，$\angle PCM+\angle NCA=90°$，

$\therefore \angle QAC=\angle PCM$，

在 $\triangle ACQ$ 和 $\triangle CMP$ 中，$\begin{cases}\angle QAC=\angle PCM\\ \angle ACQ=\angle CMP=90°\end{cases}$，

$\therefore \triangle ACQ\sim\triangle CMP$，

$\therefore \frac{AC}{CM}=\frac{CQ}{MP}$，即 $\frac{6}{8-4t}=\frac{4t}{3t}$，

解得$t=\frac{7}{8}$，

经检验$t=\frac{7}{8}$是该分式方程的解.

【点睛】此题是相似形综合题，主要考查了相似三角形的判定与性质，勾股定理，直角三角形的性质，等腰三角形的性质，由三角形相似得出对应边成比例是解题的关键.

【题型二 相似三角形动点中求线段长多解问题（利用分类讨论思想）】

例 2.（2023 秋·福建漳州·九年级统考期末）在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$AC=5$，$AB=13$，动点 D 在 BC 边上，AD 的垂直平分线交 AB 边于点 E．若 $\triangle BDE$ 是直角三角形，则 AE 的长为_____.

【答案】$\frac{65}{18}$或$\frac{65}{17}$

【分析】由勾股定理和垂直平分线的性质可知$BC=12$，$AE=DE$，若 $\triangle BDE$ 是直角三角形，分$\angle EDB=90°$或$\angle DEB=90°$两种情况，利用相似三角形的性质即可求解.

【详解】解：$\because \angle C=90°$，$AC=5$，$AB=13$，

$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=12$，

$\because AD$ 的垂直平分线交 AB 边于点 E，

$\therefore AE=DE$，

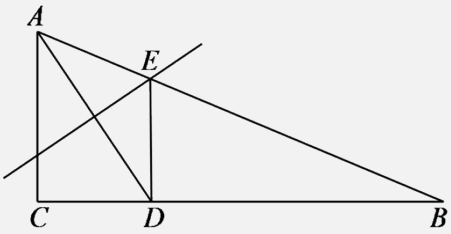
设 $AE=DE=x$，则 $BE=13-x$

若 $\triangle BDE$ 是直角三角形，

①如图，当$\angle EDB=90°$时，可知$\triangle ACB\backsim\triangle EDB$，则：$\frac{AC}{ED}=\frac{AB}{EB}$，

即：$\frac{5}{x}=\frac{13}{13-x}$，可得：$x=\frac{65}{18}$，

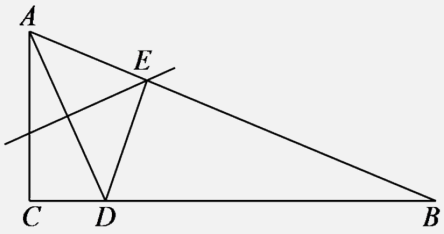
$\therefore AE=\frac{65}{18}$，



①如图，当$\angle DEB=90°$时，可知$\triangle ACB\backsim\triangle DEB$，则：$\frac{AC}{DE}=\frac{CB}{EB}$，

即：$\frac{5}{x}=\frac{12}{13-x}$，可得：$x=\frac{65}{17}$，

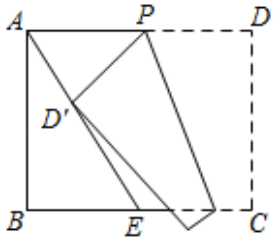
$\therefore AE=\frac{65}{17}$，



故答案为：$\frac{65}{18}$或$\frac{65}{17}$.

【点睛】本题考查相似三角形的性质，勾股定理及垂直平分线的性质，将直角进行分类讨论，利用相似三角形的性质列比例式是解决问题的关键.

【变式 2-1】（2023 秋·河南南阳·九年级南阳市第三中学校考期末）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$BC=12$，E 是 BC 的中点，连接 AE，P 是边 AD 上一动点，沿过点 P 的直线将矩形折叠，使点 D 落在 AE 上的点 D'处，当$\triangle APD'$是直角三角形时，$PD=$_____.



【答案】$\frac{16}{3}$或$\frac{48}{7}$

【分析】根据矩形的性质可得 $AD=BC=12$，$\angle BAD=\angle D=\angle B=90°$，根据勾股定理可得 $AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$，设 $PD'=PD=x$，则 $AP=12-x$，$\triangle APD'$是直角三角形可以分两种情况讨论，①当$\angle AD'P=90°$时，②当$\angle APD'=90°$时，根据相似三角形的性质列出方程求解，即可得到结论.

【详解】解：Q 四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=8$，$BC=12$，

$\therefore AD=BC=12$，$\angle BAD=\angle D=\angle B=90°$，

Q E 是 BC 的中点，

$\therefore BE=CE=6$，

$\therefore AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$，

Q 沿过点 P 的直线将矩形折叠，使点 D 落在 AE 上的点 D'处，

$\therefore PD'=PD$，

设 $PD'=PD=x$，则 $AP=12-x$，

要使得$\triangle APD'$是直角三角形时，

①当∠AD'P=90°时，∠AD'P=∠B=90°，

Q $AD \parallel BC$，

∴ ∠PAD'=∠AEB，

∴ △ABE∽△PD'A ，

∴ $\frac{AP}{AE}=\frac{PD'}{AB}$ ，即 $\frac{12-x}{10}=\frac{x}{8}$

解得 $x=\frac{16}{3}$ ，

∴ $PD=\frac{16}{3}$；

②当∠APD'=90°时，∠APD'=∠B=90°，

Q ∠PAE=∠AEB，

∴ △APD'∽△EBA ，

∴ $\frac{AP}{BE}=\frac{PD'}{AB}$ ，即 $\frac{12-x}{x}=\frac{6}{8}$ ，

解得： $x=\frac{48}{7}$ ，

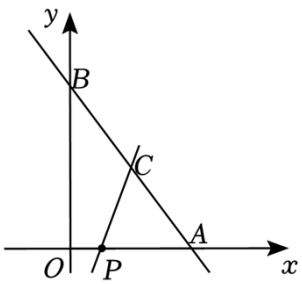
∴ $PD=\frac{48}{7}$；

综上所述，当△APD'是直角三角形时， $PD=\frac{16}{3}$ 或 $PD=\frac{48}{7}$，

故答案为： $\frac{16}{3}$ 或 $\frac{48}{7}$.

【点睛】本题考查了翻折、矩形的性质及相似三角形的判定和性质，掌握折叠的性质是解题的关键.

【变式 2-2】（2023 春·山东淄博·八年级统考期末）如图，直线 $y=-\frac{4}{3}x+8$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A、B，一动点 P 从点 A 出发，沿 $A-O-B$ 的路线运动到点 B 停止，C 是 AB 的中点，沿直线 PC 截 $\triangle AOB$，若得到的三角形与 $\triangle AOB$ 相似，则点 P 的坐标是 ____.



【答案】$(3,0)$ 或 $(0,\frac{7}{4})$ 或 $(0,4)$.

【分析】先求出点 A 和点 B 的坐标，根据勾股定理求出 AB 的长，得到 $AC=CB=5$，然后分三种情况利用相似三角形的性质求解即可.

【详解】解：直线$y=-\frac{4}{3}x+8$，当$x=0$时，$y=8$；

当$y=0$时，则$-\frac{4}{3}x+8=0$，解得$x=6$，

$\therefore A(6,0),B(0,8)$，

$\because \angle AOB=90°,OA=6,OB=8$，

$\therefore AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

$\because C$是AB的中点，

$\therefore AC=CB=\frac{1}{2}AB=5$，

如图1，

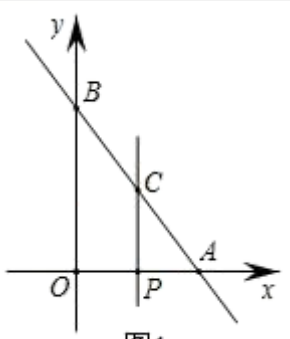


图1

点P在OA上，且$\triangle APC\backsim\triangle AOB$，

$\therefore \angle APC=\angle AOB$，

$\therefore PC//OB$，

$\therefore \frac{AP}{PO}=\frac{AC}{CB}=1$，

$\therefore PO=AP=\frac{1}{2}OA=3$，

$\therefore P(3,0)$；

如图2，

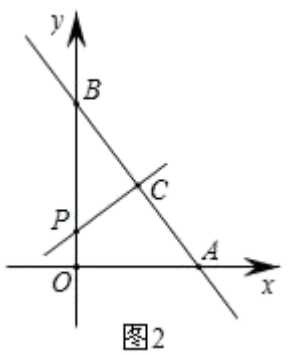


图2

点P在OB上，且$\triangle PCB\backsim\triangle AOB$，

$\therefore \frac{PB}{AB}=\frac{CB}{OB}$，

$\therefore PB=\frac{AB\cdot CB}{OB}=\frac{10\times 5}{8}=\frac{25}{4}$，

$\therefore OB=8-\frac{25}{4}=\frac{7}{4}$，

$\therefore P(0,\frac{7}{4})$；

如图 3，

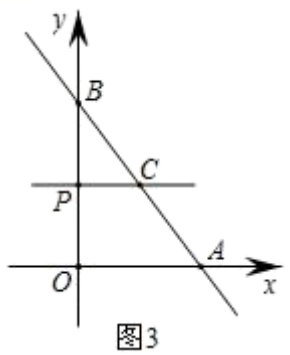


图3

点 P 在 $OB.$ 上，且 $\triangle CPB\backsim\triangle AOB$，

$\therefore \angle CPB=\angle AOB$，

$\therefore PC\parallel OA$，

$\therefore \frac{OP}{PB}=\frac{AC}{CB}=1$，

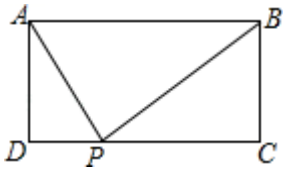
$\therefore OP=PB=\frac{1}{2}OB=4$，

$\therefore P(0,4)$，

综上所述，点 P 的坐标是 $(3,0)$ 或 $(0,\frac{7}{4})$ 或 $(0,4)$．

【点睛】此题考查了一次函数的图象与性质、图形与坐标、勾股定理、相似三角形的性质、平行线分线段成比例定理、数形结合与分类讨论数学思想的运用等知识与方法，此题综合性质强，应注意按点 P 的不同位置分类讨论，求出所有符合题意的答案．

【变式 2-3】（2023·江苏·九年级专题练习）如图，矩形 $ABCD$ 中，$AD=2$，$AB=5$，P 为 CD 边上的动点，当 $\triangle ADP$ 与 $\triangle BCP$ 相似时，求 DP 长．



【答案】$\frac{5}{2}$ 或 1 或 4

【分析】设 $DP=x$，利用矩形的性质得到 $BC=AD=2$，$CD=AB=5$，$\angle D=\angle C=90°$

，则根据相似三角形的判定方法，当$\frac{DA}{CB}=\frac{DP}{CP}$时，$\triangle DAP\backsim\triangle CBP$，$\frac{2}{2}=\frac{x}{5-x}$；当$\frac{DA}{CP}=\frac{DP}{CB}$时，$\triangle DAP\backsim\triangle CPB$，即$\frac{2}{5-x}=\frac{x}{2}$，然后分别解方程即可.

【详解】解：设$DP=x$，

∵四边形$ABCD$为矩形，

$\therefore BC=AD=2$，$CD=AB=5$，$\angle D=\angle C=90°$，

$\therefore PC=5-x$，

$\because\angle D=\angle C$，

$\therefore$当$\frac{DA}{CB}=\frac{DP}{CP}$时，

$\triangle DAP\backsim\triangle CBP$，

即$\frac{2}{2}=\frac{x}{5-x}$，解得$x=\frac{5}{2}$；

当$\frac{DA}{CP}=\frac{DP}{CB}$时，

$\triangle DAP\backsim\triangle CFB$，

即$\frac{2}{5-x}=\frac{x}{2}$，解得

$x_1=1$，$x_2=4$，

综上所述，DP的长为$\frac{5}{2}$或1或4.

【点睛】本题考查了相似三角形的判定：两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似．也考查了矩形的性质．分类讨论是解题的关键.

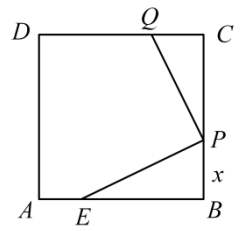
【题型三 相似三角形动点中求线段及线段和最值问题】

例3.（2023秋·湖南益阳·九年级统考期末）正方形$ABCD$的边长为6，点Q在边CD上，且$CD=3CQ$，P是边BC上一动点，连接PQ，过点P作$EP\perp PQ$交AB边于点E，设BP的长为x，则线段BE长度的最大值为_____.

【答案】$\frac{9}{2}$

【分析】根据题意，作出图形，根据两个三角形相似的判定得到$\triangle PCQ\backsim\triangle EBP$，进而根据相似比得到$BE=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{9}{2}$，利用二次函数求最值方法求解即可得到答案.

【详解】解：由题意作出图形，如图所示：



在正方形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle C=90°$，边长为 6，设 BP 的长为 x，则 $PC=6-x$，

Q $EP\perp PQ$，

$\therefore \angle EPQ=90°$，即 $\angle BPE+\angle CPQ=90°$，

Q $\angle CQP+\angle CPQ=90°$，

$\therefore \angle CQP=\angle BPE$，

$\therefore \triangle PCQ\backsim\triangle EBP$，

$\therefore \dfrac{QC}{BP}=\dfrac{PC}{BE}$，

Q $CD=3CQ$，$CD=6$，

$\therefore QC=2$，

$\therefore \dfrac{2}{x}=\dfrac{6-x}{BE}$，

$\therefore BE=\dfrac{1}{2}x(6-x)=-\dfrac{1}{2}\left(x^2-6x\right)=-\dfrac{1}{2}(x-3)^2+\dfrac{9}{2}(0\le x\le 6)$，

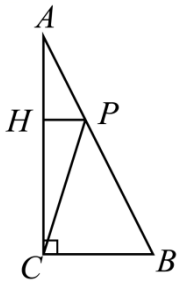
Q $-\dfrac{1}{2}<0$，

$\therefore BE=-\dfrac{1}{2}(x-3)^2+\dfrac{9}{2}$ 在 $x=3$ 时有最大值，最大值为 $\dfrac{9}{2}$，

故答案为：$\dfrac{9}{2}$.

【点睛】本题考查几何综合，涉及正方形的性质、相似三角形的判定与性质、二次函数求最值等知识，读懂题意，作出图形，熟练掌握相关性质是解决问题的关键.

【变式 3-1】（2023·江苏扬州·统考二模）如图，在直角 VABC 中，$\angle ACB=90°$，$BC=1$，$AC=2$，点 P 是边 AB 上的动点，过点 P 作 PH // BC 交 AC 于点 H，则 $PH+PC$ 的最小值为_____.



【答案】$\dfrac{8}{5}$

【分析】作点 C 关于 AB 的对称点 C'，CC' 与 AB 交于点 D，则 AB 垂直平分 CC'，$CC'=2CD$，由勾股定理可求得 $AB=\sqrt{5}$，根据三角形的面积可求得解得 $CD=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$CC'=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，过 C' 点作 $C'H\parallel BC$，交 AC 于点 H，交 AB 于点 P，则 $PC=PC'$，$\angle C'HC=90°$，可知此时 $PH+PC$ 有最小值，最小值为 HC'，再根据相似三角形的判定，可证得 $\triangle C'HC\backsim\triangle CDB$，据此即可求解.

【详解】解：如图：作点 C 关于 AB 的对称点 C'，CC' 与 AB 交于点 D，

则 AB 垂直平分 CC'，$CC'=2CD$，$\angle CDB=90°$

由勾股定理得：$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

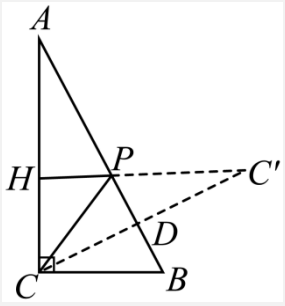
$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，

$\therefore AC\cdot BC=AB\cdot CD$，$2\times1=\sqrt{5}CD$，

解得 $CD=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore CC'=2CD=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

过 C' 点作 $C'H\parallel BC$，交 AC 于点 H，交 AB 于点 P，



则 $PC=PC'$，

$\because\angle ACB=90°$，

$\therefore\angle C'HC=90°$，

此时，$PH+PC=PC'+PH=C'H$，$PH+PC$ 有最小值，最小值为 $C'H$，

$\because C'H\parallel BC$，

$\therefore\angle C'=\angle BCD$，

又 $\because\angle C'HC=\angle CDB=90°$，

$\therefore\triangle C'HC\backsim\triangle CDB$，

$\therefore\frac{C'H}{CD}=\frac{C'C}{CB}$，

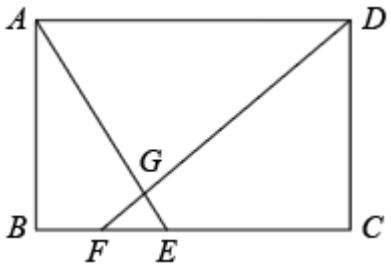
得 $\frac{C'H}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{1}$，

解得 $C'H=\frac{8}{5}$，

故 $PH+PC$ 的最小值为 $\frac{8}{5}$.

【点睛】本题考查了轴对称图形的性质，线段垂直平分线的性质，勾股定理，平行线的判定与性质，相似三角形的判定与性质，作出辅助线是解决本题的关键.

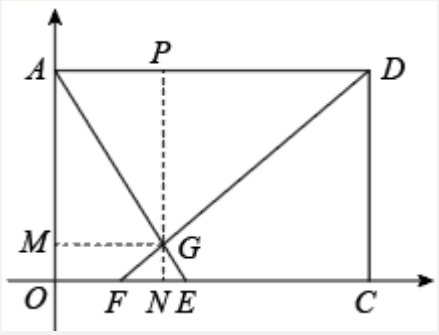
【变式 3-2】（2023 秋·四川成都·九年级统考期末）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4, AD=6$．点 E 是 BC 上的动点，点 F 是 BE 的中点 AE, FD 相交于点 G，则 AG 的最小值为_____.



【答案】$\frac{6\sqrt{10}}{5}$

【分析】如图：分别以 BC、AB 所在直线建立直角坐标系，作 $GM\perp AB, GN\perp BC$，延长 NG 交 AD 于点 P；先通过判定 $\triangle APG:\triangle ENG$、$\triangle ADG:\triangle EFG$ 得到 $\frac{AM}{MB}=\frac{AG}{GE}$、$\frac{AM}{AB}=\frac{MG}{BE}$；设 $MB=y, EF=m, MG=x$，则 $AM=4-y, BF=m$，得到 $\frac{6y}{4-y}=\frac{2x}{4-y}$，即 $y=\frac{1}{3}x$；说明点 G 在直线 $y=\frac{1}{3}x$ 上且 $(0\le x\le 4)$，AG 的最小值为点 A 到直线 $y=\frac{1}{3}x$ 的垂线段长度，最后根据两点间距离公式和二次函数的性质即可解答.

【详解】解：如图：分别以 BC、AB 所在直线建立直角坐标系，作 $GM\perp AB, GN\perp BC$，延长 NG 交 AD 于点 P



∵四边形 $ABCD$ 为矩形

∴ $AD\parallel BC, \angle ABC=90°$

∴ $\angle APG=\angle GNE=90°$

∵ $\angle AGP=\angle NGE$

∴ $\triangle APG:\triangle ENG$

$\therefore \frac{AP}{NE}=\frac{PG}{NG}=\frac{AG}{EG}$

$\because MG \perp AB$

$\therefore \angle GMB=90°$

$\therefore \angle GMB+\angle ABC=180°$

$\therefore MG \parallel BC$

$\therefore \frac{AM}{MB}=\frac{AG}{GE}$

$\therefore \frac{AM}{MB}=\frac{GP}{GN}$

$\because AD \parallel BC$

$\therefore \angle DAG=\angle GEF, \angle ADG=\angle GFE$

$\therefore \triangle ADG \sim \triangle EFG$

又$\because GP$、NG 分别是 $\triangle ADG$ 和 $\triangle GEF$ 对应边上的高

$\therefore \frac{GP}{GN}=\frac{AD}{EF}$

$\therefore \frac{AM}{MB}=\frac{AD}{EF}$

设 $MB=y, EF=m, MG=x$,则 $AM=4-y, BF=m$

$\therefore \frac{4-y}{y}=\frac{6}{m}$，即 $m=\frac{6y}{4-y}$

$\because \angle MAD=\angle BAE, \angle AMG=\angle ABC=90°$

$\therefore \triangle AMG \sim \triangle BAE$

$\therefore \frac{AM}{AB}=\frac{MG}{BE}$

$\therefore \frac{4-y}{4}=\frac{x}{2m}$，即 $m=\frac{2x}{4-y}$

$\therefore \frac{6y}{4-y}=\frac{2x}{4-y}$，即 $y=\frac{1}{3}x$

$\because G(x,y)$

$\therefore$ 点 G 在直线 $y=\frac{1}{3}x$ 上且 $(0 \le x \le 4)$

$\therefore AG$ 的最小值为点 A 到直线 $y=\frac{1}{3}x$ 的垂线段长度

$\therefore AG^2=(x-0)^2+(y-4)^2$

$\because y=\frac{1}{3}x$

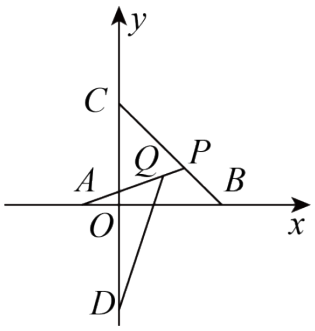
$\therefore AG^2=(x-0)^2+\left(\frac{1}{3}x-4\right)^2=\frac{10}{9}x^2-\frac{8}{3}x+16=\frac{10}{9}\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{72}{5}$

∴当$x=\frac{6}{5}$时，AG^2有最小值$\frac{72}{5}$，则AG的最小值为$\frac{6\sqrt{10}}{5}$.

故答案为$\frac{6\sqrt{10}}{5}$.

【点睛】本题主要考查了矩形的性质、相似三角形的判定与性质、二次函数求最值等知识点，通过三角形的判定与性质得到点G在直线$y=\frac{1}{3}x$上且$(0\le x\le 4)$成为解答本题的关键.

【变式 3-3】（2023·江苏南通·统考三模）已知，如图，在平面直角坐标系中，点A的坐标为$(-1,0)$，点B的坐标为$(3,0)$，点C的坐标为$(0,3)$，点C关于x轴的对称点为点D，点P为线段BC上的一个动点，连接AP，点Q为线段AP上一点，且$AQ=3PQ$，连接DQ，当$3AP+4DQ$的值最小时，DQ的长为_____.



【答案】$\frac{5\sqrt{10}}{4}$

【分析】如图所示，作点A关于BC的对称点F，连接FP，过点Q作$QG/\!/AF$交PF于G，过点D作$DE/\!/GQ$且$DE=GQ$，连接GE，BF，先证明$\triangle BOC$是等腰直角三角形，得到$\angle ABC=45°$，由轴对称的性质可得$FB=AB=4$，$\angle FBC=\angle ABC=45°$，则$\angle ABF=90°$，由此可得$F(3,4)$，$AF=4\sqrt{2}$，$\triangle ABF$是等腰直角三角形，则$\angle BAF=45°$；设$AF$与$y$轴交于$N$，过点$E$作$EM\perp y$轴于$M$，证明$\triangle PQG\backsim\triangle PAF$，得到$\frac{QG}{AF}=\frac{PQ}{PA}=\frac{PG}{PF}=\frac{1}{4}$，则$QG=\frac{1}{4}AF=\sqrt{2}$，$PG=\frac{1}{4}PF$ $DE=QG=\sqrt{2}$，证明四边形$DQGE$是平行四边形，得到$DQ=EG$；证明$\triangle MDE$是等腰直角三角形，得到$DM=ME=\frac{\sqrt{2}}{2}DE=1$，则$E(1,-2)$；由轴对称的性质可得$PA=PF$，则$PG=\frac{1}{4}PF=\frac{1}{4}PA$，$GF=\frac{3}{4}PA$，故当$FG+EG$最小时，$\frac{3}{4}AP+DQ$最小，即$3AP+4DQ$最小，即当$E$、$F$、$G$三点共线时，$3AP+4DQ$最小，求出直线$EF$解析式为$y=3x-5$，同理可得直线$BC$的解析式为$y=-x+3$，则当$3AP+4DQ$最小时点$P$的坐标为$(2,1)$，利用勾股定理求出$PF=\sqrt{10}$，$PE=\sqrt{10}$，则$DQ=EG=PE+PG=\frac{5\sqrt{10}}{4}$.

【详解】解：如图所示，作点A关于BC的对称点F，连接FP，过点Q作$QG/\!/AF$交PF于G，过点D作$DE/\!/GQ$且$DE=GQ$，连接GE，BF，

$\because A(-1,0)$，$B(3,0)$，$C(0,3)$，

$\therefore OB=OC=3$， $AB=4$，

$\therefore \triangle BOC$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle ABC=45°$，

$\because$点 F 与点 A 关于直线 BC 对称，

$\therefore FB=AB=4$，$\angle FBC=\angle ABC=45°$，

$\therefore \angle ABF=90°$，

$\therefore F(3,4)$， $AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=4\sqrt{2}$， $\triangle ABF$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle BAF=45°$，

设 AF 与 y 轴交于 N，过点 E 作 $EM\perp y$ 轴于 M，

$\because AQ=3PQ$，

$\therefore PQ=\frac{1}{4}PA$，$AQ=\frac{3}{4}PA$，

$\because QG/\!/AF$，

$\therefore \triangle PQG\backsim\triangle PAF$，

$\therefore \frac{QG}{AF}=\frac{PQ}{PA}=\frac{PG}{PF}=\frac{1}{4}$，

$\therefore QG=\frac{1}{4}AF=\sqrt{2}$， $PG=\frac{1}{4}PF$

$\therefore DE=QG=\sqrt{2}$，

又$\because DE/\!/GQ$，

$\therefore$四边形 $DQGE$ 是平行四边形，

$\therefore DQ=EG$，

$\because DE/\!/GQ$， $AF/\!/GQ$，

$\therefore DE/\!/AF$，

$\therefore \angle EDM=\angle ANO=90°-\angle NAO=45°$，

$\therefore \triangle MDE$ 是等腰直角三角形，

$\therefore DM=ME=\frac{\sqrt{2}}{2}DE=1$，

$\therefore OM=2$，

$\therefore E(1,-2)$；

由轴对称的性质可得 $PA=PF$，

$\therefore PG=\frac{1}{4}PF=\frac{1}{4}PA$，

$\therefore GF=\frac{3}{4}PA$，

∵要使$3AP+4DQ$最小，即要使$\frac{3}{4}AP+DQ$最小，

∴当$FG+EG$最小时，$\frac{3}{4}AP+DQ$最小，即$3AP+4DQ$最小，

∴当E、F、G三点共线时，$3AP+4DQ$最小，

设直线EF解析式为$y=kx+b$，

∴$\begin{cases}3k+b=4\\k+b=-2\end{cases}$，

∴$\begin{cases}k=3\\b=-5\end{cases}$，

∴直线EF解析式为$y=3x-5$，

同理可得直线BC的解析式为$y=-x+3$，

联立$\begin{cases}y=-x+3\\y=3x-5\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$，

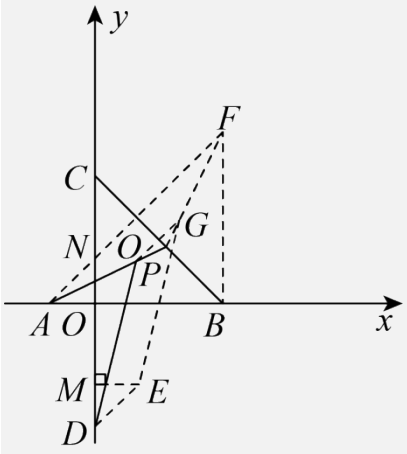
∴当$3AP+4DQ$最小时点P的坐标为$(2,1)$，

∴$PF=\sqrt{(3-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$，$PE=\sqrt{(1-2)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{10}$，

∴$PG=\frac{1}{4}PF=\frac{\sqrt{10}}{4}$，

∴$DQ=EG=PE+PG=\frac{5\sqrt{10}}{4}$，

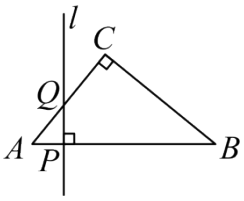
故答案为：$\frac{5\sqrt{10}}{4}$.

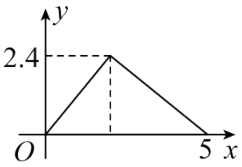


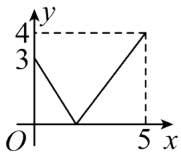
【点睛】本题主要考查了一次函数与几何综合，平行四边形的性质与判定，勾股定理，轴对称的性质，相似三角形的性质与判断，等腰直角三角形的性质与判定等等，正确作出辅助线确定$3AP+4DQ$最小的情形是解题的关键.

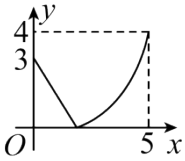
【题型四 相似三角形中的动点问题与函数图像问题】

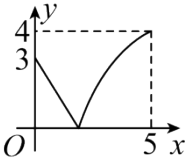
例 4.（2023·河南焦作·统考二模）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°, AC=3, BC=4$，点 P 为边 AB 上一动点，过点 P 作直线 $l\perp AB$，交折线 ACB 于点 Q．设 $AP=x, CQ=y$，则 y 关于 x 的函数图象大致是（　）



A．

B．

C．

D．

【答案】B

【分析】分两种情况：当点 Q 在 AC 时，当点 Q 在 BC 时，结合相似三角形的判定和性质，即可求解．

【详解】解：$\because \angle ACB=90°, AC=3, BC=4$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$，

当点 Q 在 AC 时，

$\because$直线 $l\perp AB$，

$\therefore \angle APQ=\angle ACB=90°$，

$\because \angle A=\angle A$，

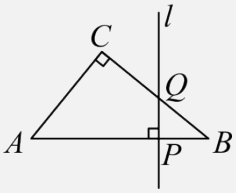
$\therefore \triangle APQ\backsim\triangle ACB$，

$\therefore \dfrac{AP}{AC}=\dfrac{AQ}{AB}$，

即 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{3-y}{5}$，

解得：$y=-\dfrac{5}{3}x+3$；

当点 Q 在 BC 时，如图，



$\because$直线 $l\perp AB$，

$\therefore \angle BPQ=\angle ACB=90°$，

$\because \angle B=\angle B$，

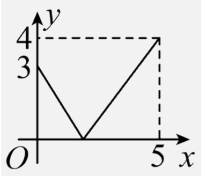
$\therefore \triangle BPQ \backsim \triangle BCA$，

$\therefore \dfrac{BP}{BC}=\dfrac{BQ}{AB}$，

即 $\dfrac{5-x}{4}=\dfrac{4-y}{5}$，

解得：$y=\dfrac{5}{4}x-\dfrac{9}{4}$；

综上所述，y 关于 x 的函数图象大致是：



故选：B.

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定和性质，利用分类讨论思想解答是解题的关键.

【变式 4-1】（2023 春·河南南阳·九年级统考阶段练习）如图 1，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，动点 P 从点 B 出发，在线段 BC 上匀速运动，到达点 C 时停止．设点 P 运动的路程为 x，线段 OP 的长为 y，如果 y 与 x 的函数图象如图 2 所示，则矩形 $ABCD$ 的面积是（　）

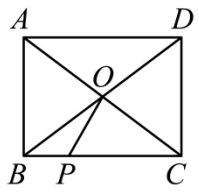


图1

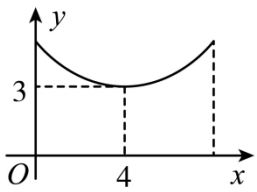


图2

A．20　　B．24　　C．48　　D．60

【答案】C

【分析】根据点 P 的移动规律，当 $OP \perp BC$ 时取最小值 3，根据矩形的性质求得矩形的长与宽，可得该矩形的面积.

【详解】解：根据题意得：当 $OP \perp BC$ 时，$BP=CP=4, OP=3$，

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB \perp BC$，$OB=OC=OA$，

∴此时 $OP \parallel BA$，$BC=2BP=8$，

$\therefore \triangle COP \backsim \triangle CAB$，

$\therefore \dfrac{OP}{AB}=\dfrac{OC}{AC}=\dfrac{1}{2}$，

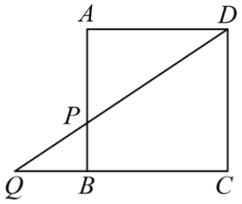
$\therefore AB=2OP=6$，

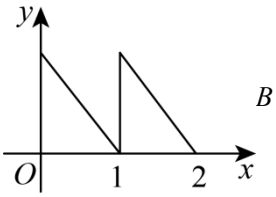
所以矩形 $ABCD$ 的面积 $=6\times 8=48$.

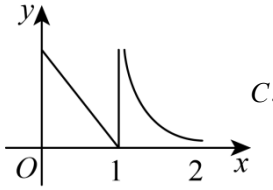
故选：C

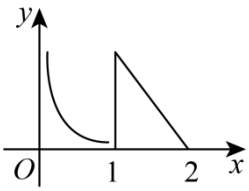
【点睛】本题考查了动点问题的函数图象，关键是根据所给函数图象和点的运动轨迹判断出$BP=CP=4,OP=3$.

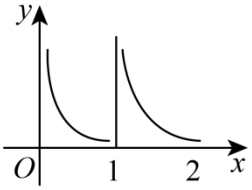
【变式 4-2】（2023·安徽合肥·校联考二模）如图，在正方形$ABCD$中，$AB=1$，动点P从A点出发沿$A\to B\to C$方向在AB和BC上匀速移动，连接DP交BC或BC的延长线于Q，记点P移动的距离为x，CQ为y，则y关于x的函数图像大致是（　）



A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】C

【分析】分三种情况讨论得出y关于x的函数关系式即可得出答案.

【详解】解：①当点P与点A重合时，

在正方形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，

$\therefore DP$与BC或BC的延长线没有交点，不符合题意；

②当点P在线段AB之间（点P不与点A、点B重合），

$\because$四边形$ABCD$是正方形，$AB=1$，

$\therefore AD\parallel BC$，$AD=BC=AB=1$，

$\therefore\angle ADP=\angle BQP$，$\angle A=\angle QBP$，

$\therefore\triangle ADP\backsim\triangle BQP$，

$\therefore\dfrac{AD}{BQ}=\dfrac{AP}{BP}$，

$\because$点P移动的距离为x，CQ为y，

$\therefore AP=x$，$BP=AB-AP=1-x$，$BQ=CQ-BC=y-1$，

$\therefore\dfrac{1}{y-1}=\dfrac{x}{1-x}$，

$\therefore y=\dfrac{1}{x}\left(0<x<1\right)$，它的图像是反比例函数图像的一部分；

②当点P在线段BC之间（点P可与点B、点C重合），此时点P与点Q重合，

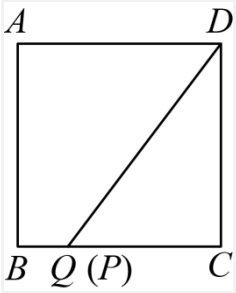
$\because AB+BQ=x$，$CQ=y$，

又$\because AB+BQ+CQ=AB+BC=2$，

$\therefore y=2-x\left(1\le x\le 2\right)$，它的图像是一条线段；

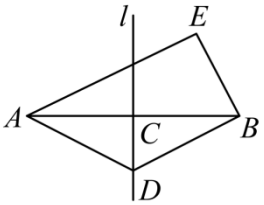
∴动点 P 从 A 点出发沿 $A\to B\to C$ 方向在 AB 和 BC 上匀速移动时所对应函数关系式为：$y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(0<x<1)\\ 2-x(1\le x\le 2)\end{cases}$，

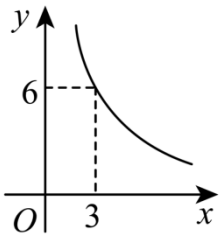
故选：C.

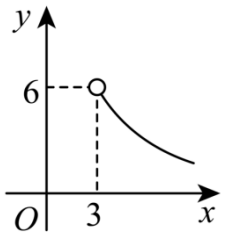


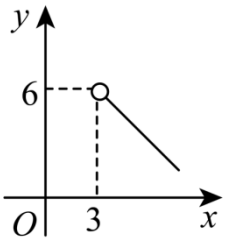
【点睛】本题考查动点问题函数图像，考查了相似三角形的判定与性质，正方形的性质，反比例函数及一次函数的图像．解题的关键和难点在于根据点 P 的位置分情况讨论．

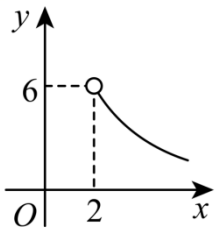
【变式 4-3】（2023·黑龙江·模拟预测）如图，已知直线 l 是线段 AB 的中垂线，l 与 AB 相交于点 C，D 是位于直线 AB 下方的 l 上的一动点（点 D 不与点 C 重合），连接 AD，BD，过点 A 作 $AE\parallel BD$，过点 B 作 $BE\perp AE$ 于点 E，若 $AB=6$，设 $AD=x$，$AE=y$，则 y 关于 x 的函数关系用图像可以大致表示为（　）．



A．

B．

C．

D．

【答案】B

【分析】根据 $AE\parallel BD$ 得 $\angle BAE=\angle ABD$，根据直线 l 是线段 AB 的中垂线可得 $DB=AD=x$，$AC=BC=\dfrac{1}{2}AB=3$，再证 $\triangle AEB\sim\triangle BCD$，然后根据相似三角形列比例式化简可得 $y=\dfrac{18}{x}$，再结合 $x>3$ 确定函数图像即可即可解答．

【详解】解：∵$AE\parallel BD$，

∴$\angle BAE=\angle ABD$，

∵直线 l 是线段 AB 的中垂线，

∴$DB=AD=x$，$AC=BC=\dfrac{1}{2}AB=3$，$\angle DCB=90°$，

$\because BE \perp AE$，

$\therefore \angle AEB = 90°$，

$\therefore \angle AEB = \angle DCB = 90°$，

$\therefore \triangle AEB : \triangle BCD$

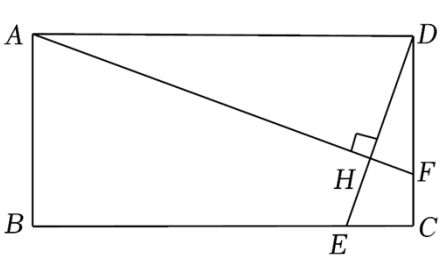
$\therefore \dfrac{AE}{BC} = \dfrac{AB}{BD}$，即 $\dfrac{y}{3} = \dfrac{6}{x}$，可得 $y = \dfrac{18}{x}\left(x > 3\right)$，即函数图像为 B 选项.

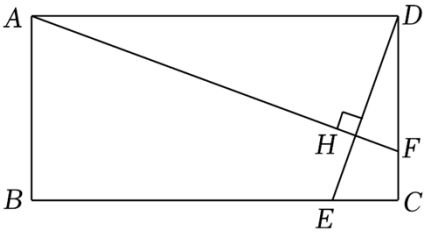
故选 B.

【点睛】本题主要考查了动点问题的函数图像，证得 $\triangle AEB : \triangle BCD$ 得到 $y = \dfrac{18}{x}\left(x > 3\right)$ 是解答本题的关键.

【题型五 相似三角形中的动点问题与几何综合问题】

例 5.（2023·江苏·九年级专题练习）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB = 3, AD = 6$，动点 E 在边 BC 上，连接 DE，过点 A 作 $AH \perp DE$，垂足为 H，AH 交 CD 于 F.





备用图

(1)求证：$\triangle CDE \backsim \triangle DAF$；

(2)当 $FC = 2$ 时，求 EC 的长.

(3)若直线 AF 与线段 BC 延长线交于点 G，当 $\triangle DEB \backsim \triangle GFD$ 时，求 DF 的长.

【答案】(1)见解析

(2)$\dfrac{1}{2}$

(3)$\dfrac{12}{5}$

【分析】（1）根据矩形的性质得到 $\angle ADC = \angle BCD = 90°$，根据相似三角形的判定定理即可得到结论；

（2）根据矩形的性质得到 $DC = AB = 3$，根据相似三角形的性质即可得到结论；

（3）由 $\angle DEC = \angle AFD = 90° - \angle EDC$ 可得 $\angle BED = \angle DFG$，用 x 的代数式表示 ED、FG、EB，再运用相似三角形的性质即可解决问题.

【详解】（1）证明：$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形

$\therefore \angle ADC = \angle BCD = 90°$.

又$\because AF \perp DE$，

$\therefore \angle DCE = \angle ADF = 90°$，$\angle EDC = 90° - \angle DFA = \angle DAF$，

$\therefore \triangle CDE \backsim \triangle DAF$；

（2）解：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore DC = AB = 3$，

$\because FC = 2$，

$\therefore DF = DC - FC = 1$，

$\because \triangle CDE \backsim \triangle DAF$，

$\therefore \dfrac{CE}{DF} = \dfrac{CD}{DA}$，

$\therefore CE = \dfrac{CD \cdot DF}{DA} = \dfrac{3 \times 1}{6} = \dfrac{1}{2}$；

（3）解：如图所示，

$\because \triangle CDE \backsim \triangle DAF$，

$\therefore \dfrac{CE}{DF} = \dfrac{CD}{DA}$，

$\therefore \dfrac{CE}{DF} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$，

设 $EC = x$，则 $DF = 2x$，

$\because \triangle DEB \backsim \triangle GFD$，

$\therefore \dfrac{DE}{BE} = \dfrac{GF}{DF}$，

$\therefore GF = \dfrac{DE \cdot DF}{BE} = \dfrac{\sqrt{9^2 + x^2} \cdot 2x}{6 - x}$，

$\because \triangle ADF \backsim \triangle GCF$，

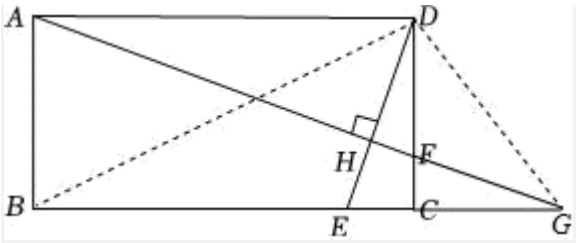
$\therefore \dfrac{GF}{AF} = \dfrac{CF}{DF}$，

$\therefore GF = \dfrac{3 - 2x}{2x} \cdot \sqrt{6^2 + (2x)^2} = \dfrac{3 - 2x}{x} \cdot \sqrt{9 + x^2}$，

$\therefore \dfrac{\sqrt{9^2 + x^2} \cdot 2x}{6 - x} = \dfrac{3 - 2x}{x} \cdot \sqrt{9 + x^2}$，

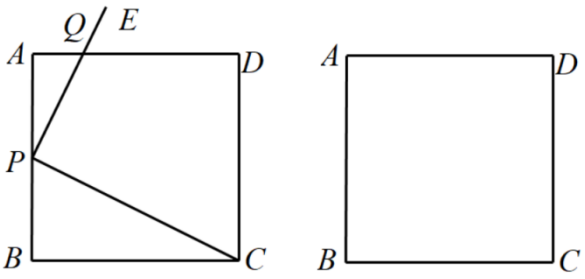
解得 $x = \dfrac{6}{5}$，

$\therefore DF = 2x = \dfrac{12}{5}$.



【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质，矩形的性质，熟练掌握相似三角形的判定定理是解题的关键.

【变式 5-1】（2023·辽宁抚顺·统考三模）如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，动点 P 在边 AB 上从点 B 沿 BA 向点 A 运动（点 P 不与点 A，B 重合），连接 PC．过点 P 作 $PE\perp PC$，PE 交 AD 于点 Q．



备用图

(1)求证：$\triangle APQ\backsim\triangle BCP$；

(2)若 $S_{\triangle APQ}:S_{\triangle BCP}=1:16$，求 AQ 的长度；

(3)连接 CQ．试判断当点 P 运动到边 AB 的什么位置时，$\triangle PCQ\backsim\triangle BCP$？并说明理由．

【答案】(1)证明见解析

(2)$AQ=\dfrac{3}{4}$

(3)当点 P 运动到边 AB 的中点时，$\triangle PCQ\backsim\triangle BCP$；理由见解析

【分析】（1）根据正方形的性质可得$\angle APQ+\angle AQP=90°$．再由 $PE\perp PC$，可得$\angle APQ+\angle BPC=90°$，从而得到$\angle AQP=\angle BPC$，即可求证；

（2）根据相似三角形的性质，即可求解；

（3）当点 P 运动到边 AB 的中点时，$\triangle PCQ\backsim\triangle BCP$；理由根据相似三角形的性质，先求出 AQ，再根据勾股定理可得 PQ，CP 的长，可得到$\dfrac{PQ}{BP}=\dfrac{PC}{BC}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$．即可求证.

【详解】（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$\angle A=\angle B=90°$，

∴$\angle APQ+\angle AQP=90°$.

∵$PE\perp PC$，

∴$\angle APQ+\angle BPC=90°$，

∴$\angle AQP=\angle BPC$，

∴$\triangle APQ\backsim\triangle BCP$；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/156145201024010201