2024年高考真题汇编

数学

（新课标卷+全国卷）

目录

2024年普通高等学校招生全国统一考试（新课标I卷）

数 学

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的. 请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1. 已知集合 $A=\left\{x\left|-5<x^3<5\right.\right\}, B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则 $A\bigcap B=$（　　）

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{2,3\}$

C. $\{-3,-1,0\}$　　D. $\{-1,0,2\}$

2. 若 $\dfrac{z}{z-1}=1+\mathrm{i}$，则 $z=$（　　）

A. $-1-\mathrm{i}$　　B. $-1+\mathrm{i}$　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\vec{a}=(0,1),\vec{b}=(2,x)$，若 $\vec{b}\perp(\vec{b}-4\vec{a})$，则 $x=$（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

4. 已知 $\cos(\alpha+\beta)=m,\tan\alpha\tan\beta=2$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$（　　）

A. $-3m$　　B. $-\dfrac{m}{3}$　　C. $\dfrac{m}{3}$　　D. $3m$

5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为 $\sqrt{3}$，则圆锥的体积为（　　）

A. $2\sqrt{3}\pi$　　B. $3\sqrt{3}\pi$　　C. $6\sqrt{3}\pi$　　D. $9\sqrt{3}\pi$

6. 已知函数为 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a, x<0\\ \mathrm{e}^x+\ln(x+1), x\geq 0\end{cases}$，在 **R** 上单调递增，则 a 取值的范围是（　　）

A. $(-\infty,0]$　　B. $[-1,0]$

C. $[-1,1]$　　D. $[0,+\infty)$

7. 当 $x\in[0,2\pi]$ 时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 8

8. 已知函数为 $f(x)$ 的定义域为 **R**，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当 $x<3$ 时 $f(x)=x$，则下列结论中一定正确的是（　　）

A. $f(10)>100$　　B. $f(20)>1000$

C. $f(10)<1000$

D. $f(20)<10000$

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分，部分选对的得部分分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 为了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从该种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值 $\overline{x}=2.1$，样本方差 $s^2=0.01$，已知该种植区以往的亩收入 X 服从正态分布 $N\left(1.8,0.1^2\right)$，假设推动出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $N\left(\overline{x},s^2\right)$，则（　　）（若随机变量 Z 服从正态分布 $N\left(u,\sigma^2\right)$，$P(Z<u+\sigma)\approx 0.8413$）

A. $P(X>2)>0.2$

B. $P(X>2)<0.5$

C. $P(Y>2)>0.5$

D. $P(Y>2)<0.8$

10. 设函数 $f(x)=(x-1)^2(x-4)$，则（　　）

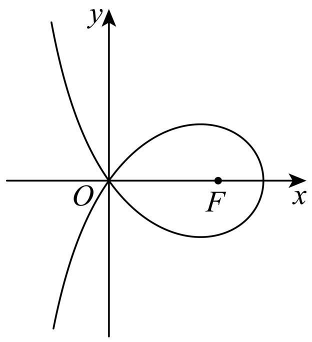
A. $x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点

B. 当 $0<x<1$ 时，$f(x)<f\left(x^2\right)$

C. 当 $1<x<2$ 时，$-4<f(2x-1)<0$

D. 当 $-1<x<0$ 时，$f(2-x)>f(x)$

11. 造型可以做成美丽的丝带，将其看作图中曲线 $\boldsymbol{C}$ 的一部分.已知 $\boldsymbol{C}$ 过坐标原点 O.且 $\boldsymbol{C}$ 上的点满足横坐标大于 -2，到点 $F(2,0)$ 的距离与到定直线 $x=a(a<0)$ 的距离之积为 4，则（　　）



A. $a=-2$

B. 点 $(2\sqrt{2},0)$ 在 C 上

C. C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1

D. 当点 $\left(x_0,y_0\right)$ 在 C 上时，$y_0\le\dfrac{4}{x_0+2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1、F_2，过 F_2 作平行于 y 轴的直线交 $\boldsymbol{C}$ 于 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 两点，若 $|F_1A|=13,|AB|=10$，则 $\boldsymbol{C}$ 的离心率为__________.

13. 若曲线 $y=\mathrm{e}^x+x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线也是曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 的切线，则 $a=$__________.

14. 甲、乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，甲的卡片上分别标有数字 1，3，5，7，乙的卡片上分别标有数字 2，4，6，8，两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上数字的大小，数字大的人得 1 分，数字小的人得 0 分，然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用）．则四轮比赛后，甲的总得分不小于 2 的概率为__________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 记 $\triangle ABC$ 内角 A、B、C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\sin C=\sqrt{2}\cos B$，$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$

（1）求 B；

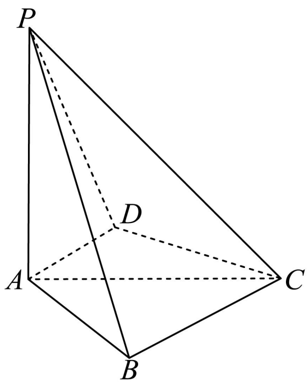
（2）若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3+\sqrt{3}$，求 c.

16. 已知 $A(0,3)$ 和 $P\left(3,\dfrac{3}{2}\right)$ 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上两点.

（1）求 C 的离心率;

（2）若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B，且 $\triangle ABP$ 的面积为 9，求 l 的方程.

17. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AC=2$，$BC=1,AB=\sqrt{3}$.



（1）若 $AD\perp PB$，证明：$AD//$ 平面 PBC；

（2）若 $AD\perp DC$，且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，求 AD.

18. 已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$

（1）若 $b=0$，且 $f'(x)\geq 0$，求 a 的最小值；

（2）证明：曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形；

（3）若 $f(x)>-2$ 当且仅当 $1<x<2$，求 b 的取值范围.

19. 设 m 为正整数，数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 是公差不为 0 的等差数列，若从中删去两项 a_i 和

$a_j\left(i<j\right)$后剩余的$4m$项可被平均分为m组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列$a_1,a_2,...,a_{4m+2}$是$\left(i,j\right)-$可分数列.

（1）写出所有的$\left(i,j\right)$，$1\le i<j\le 6$，使数列$a_1,a_2,...,a_6$是$\left(i,j\right)-$可分数列；

（2）当$m\ge 3$时，证明：数列$a_1,a_2,...,a_{4m+2}$是$\left(2,13\right)-$可分数列；

（3）从$1,2,...,4m+2$中一次任取两个数i和$j\left(i<j\right)$，记数列$a_1,a_2,...,a_{4m+2}$是$\left(i,j\right)-$可分数列的概率为P_m，证明：$P_m>\dfrac{1}{8}$.

2024 年普通高等学校招生全国统一考试（新课标 II 卷）

数 学

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的．请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1. 已知$z=-1-\mathrm{i}$，则$\left|z\right|=$（　　）

A. 0　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

2. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x+1|>1$；命题 q：$\exists x>0$，$x^3=x$，则（　　）

A. p 和 q 都是真命题　　B. $\neg p$ 和 q 都是真命题

C. p 和$\neg q$ 都是真命题　　D. $\neg p$ 和$\neg q$ 都是真命题

3. 已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$\left|\vec{a}\right|=1,\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=2$，且$\left(\vec{b}-2\vec{a}\right)\perp\vec{b}$，则$\left|\vec{b}\right|=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

4. 某农业研究部门在面积相等的 100 块稻田上种植一种新型水稻，得到各块稻田的亩产量（单位：kg）并部分整理下表

亩产量	[900，950）	[950，1000）	[1000，1050）	[1100，1150）	[1150，1200）
频数	6	12	18	24	10

据表中数据，结论中正确的是（　　）

A. 100 块稻田亩产量的中位数小于 1050kg

B. 100 块稻田中亩产量低于 1100kg 的稻田所占比例超过 80%

C. 100 块稻田亩产量的极差介于 200kg 至 300kg 之间

D. 100 块稻田亩产量的平均值介于 900kg 至 1000kg 之间

5. 已知曲线 C：$x^2+y^2=16$（$y>0$），从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线段PP'，P'为垂

足，则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$（$y>0$）　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$（$y>0$）

C. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$（$y>0$）　　D. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{8}=1$（$y>0$）

6. 设函数 $f(x)=a(x+1)^2-1$，$g(x)=\cos x+2ax$，当 $x\in(-1,1)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有一个交点，则 $a=$（　　）

A. -1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

7. 已知正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{52}{3}$，$AB=6$，$A_1B_1=2$，则 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. 设函数 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)$，若 $f(x)\ge 0$，则 a^2+b^2 的最小值为（　　）

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

二、多项选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 对于函数 $f(x)=\sin 2x$ 和 $g(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，下列正确的有（　　）

A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同零点　　B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同最大值

C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期　　D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有相同的对称轴

10. 抛物线 C：$y^2=4x$ 的准线为 l，P 为 C 上的动点，过 P 作 $\odot A: x^2+(y-4)^2=1$ 的一条切线，Q 为切点，过 P 作 l 的垂线，垂足为 B，则（　　）

A. l 与 $\odot A$ 相切

B. 当 P，A，B 三点共线时，$|PQ|=\sqrt{15}$

C. 当 $|PB|=2$ 时，$PA\perp AB$

D. 满足 $|PA|=|PB|$ 的点 P 有且仅有 2 个

11. 设函数 $f(x)=2x^3-3ax^2+1$，则（　　）

A. 当 $a>1$ 时，$f(x)$ 有三个零点

B. 当 $a<0$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C. 存在 a，b，使得 $x=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

D. 存在 a，使得点 $(1,f(1))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_3+a_4=7$，$3a_2+a_5=5$，则 $S_{10}=$________.

13. 已知 α 为第一象限角，β 为第三象限角，$\tan\alpha+\tan\beta=4$，$\tan\alpha\tan\beta=\sqrt{2}+1$，

则 $\sin(\alpha+\beta)=$_______.

14. 在如图的 4×4 方格表中选 4 个方格，要求每行和每列均恰有一个方格被选中，则共有________种选法，在所有符合上述要求的选法中，选中方格中的 4 个数之和的最大值是________.

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$.

（1）求 A.

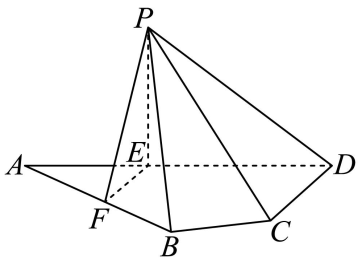
（2）若 $a=2$，$\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

16. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-a^3$.

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 有极小值，且极小值小于 0，求 a 的取值范围.

17. 如图，平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$CD=3$，$AD=5\sqrt{3}$，$\angle ADC=90^\circ$，$\angle BAD=30^\circ$，点 E，F 满足 $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，将 $\triangle AEF$ 沿 EF 对折至 $\triangle PEF$，使得 $PC=4\sqrt{3}$.



（1）证明：$EF\perp PD$；

（2）求面 PCD 与面 PBF 所成的二面角的正弦值.

18. 某投篮比赛分为两个阶段，每个参赛队由两名队员组成，比赛具体规则如下：第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次，若 3 次都未投中，则该队被淘汰，比赛成员为 0 分；若至少投中一次，则该队进入第二阶段，由该队的另一名队员投篮 3 次，每次投中得 5 分，未投中得 0 分.该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和．某参赛队由甲、乙两名队员组成，设甲每次投中的概率为 p，乙每次投中的概率为 q，各次投中与否相互独立.

（1）若 $p=0.4$，$q=0.5$，甲参加第一阶段比赛，求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率.

（2）假设 $0<p<q$，

（i）为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

（ii）为使得甲、乙，所在队的比赛成绩的数学期望最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

19. 已知双曲线 $C: x^2-y^2=m\left(m>0\right)$，点 $P_1\left(5,4\right)$ 在 C 上，k 为常数，$0<k<1$．按照如下方式依次构造点 $P_n\left(n=2,3,...\right)$，过 P_{n-1} 作斜率为 k 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1}，令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点，记 P_n 的坐标为 $\left(x_n, y_n\right)$.

（1）若 $k=\dfrac{1}{2}$，求 x_2, y_2；

（2）证明：数列 $\left\{x_n-y_n\right\}$ 是公比为 $\dfrac{1+k}{1-k}$ 的等比数列；

（3）设 S_n 为 $\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ 的面积，证明：对任意的正整数 n，$S_n=S_{n+1}$.

2024 年普通高等学校招生全国统一考试（全国甲卷）

理科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设 $z=5+\mathrm{i}$，则 $\mathrm{i}\left(\bar{z}+z\right)=$（　　）

A. $10\mathrm{i}$　　B. $2\mathrm{i}$　　C. 10　　D. -2

2. 集合 $A=\left\{1,2,3,4,5,9\right\}, B=\left\{x\left|\sqrt{x}\in A\right.\right\}$，则 $\complement_A\left(A\cap B\right)=$（　　）

A. $\left\{1,4,9\right\}$　　B. $\left\{3,4,9\right\}$

C. $\left\{1,2,3\right\}$　　D. $\left\{2,3,5\right\}$

3. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}4x-3y-3\geq 0\\ x-2y-2\leq 0\\ 2x+6y-9\leq 0\end{cases}$，则 $z=x-5y$ 的最小值为（　　）

A. 5　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -2　　D. $-\frac{7}{2}$

4. 等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_5=S_{10}$，$a_5=1$，则$a_1=$（　　）

A. -2　　B. $\frac{7}{3}$　　C. 1　　D. 2

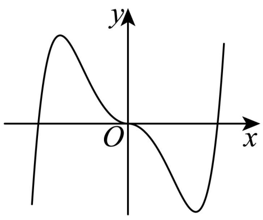
5. 已知双曲线的两个焦点分别为$(0,4),(0,-4)$，点$(-6,4)$在该双曲线上，则该双曲线的离心率为（　　）

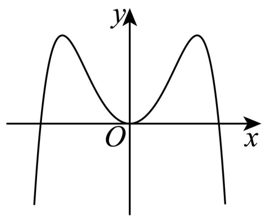
A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

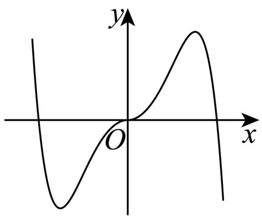
6. 设函数$f(x)=\frac{e^x+2\sin x}{1+x^2}$，则曲线$y=f(x)$在$(0,1)$处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积为（　　）

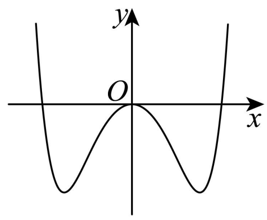
A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

7. 函数$f(x)=-x^2+\left(e^x-e^{-x}\right)\sin x$在区间$[-2.8,2.8]$的大致图像为（　　）

A.


B.


C.


D.


8. 已知$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，则$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$（　　）

A. $2\sqrt{3}+1$　　B. $2\sqrt{3}-1$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $1-\sqrt{3}$

9. 已知向量$\vec{a}=(x+1,x),\vec{b}=(x,2)$，则（　　）

A. “$x=-3$”是“$\vec{a}\perp\vec{b}$”的必要条件　　B. “$x=-3$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的必要条件

C. “$x=0$”是“$\vec{a}\perp\vec{b}$”的充分条件　　D. “$x=-1+\sqrt{3}$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的充分条件

10. 设α、β是两个平面，m、n是两条直线，且$\alpha\cap\beta=m$.下列四个命题：

①若 $m//n$，则 $n//\alpha$ 或 $n//\beta$　　②若 $m\perp n$，则 $n\perp\alpha, n\perp\beta$

③若 $n//\alpha$，且 $n//\beta$，则 $m//n$　　④若 n 与 α 和 β 所成的角相等，则 $m\perp n$

其中所有真命题的编号是（　　）

A. ①③　　B. ②④　　C. ①②③　　D. ①③④

11. 在 $\triangle ABC$ 中内角 A,B,C 所对边分别为 a,b,c，若 $B=\frac{\pi}{3}$，$b^2=\frac{9}{4}ac$，则 $\sin A+\sin C=$（　　）

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. 已知 b 是 a,c 的等差中项，直线 $ax+by+c=0$ 与圆 $x^2+y^2+4y-1=0$ 交于 A,B 两点，则 $|AB|$ 的最小值为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. $2\sqrt{5}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\left(\frac{1}{3}+x\right)^{10}$ 的展开式中，各项系数的最大值是______.

14. 已知甲、乙两个圆台上、下底面的半径均为 r_1 和 r_2，母线长分别为 $2(r_2-r_1)$ 和 $3(r_2-r_1)$，则两个圆台的体积之比 $\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=$______.

15. 已知 $a>1$，$\frac{1}{\log_8 a}-\frac{1}{\log_a 4}=-\frac{5}{2}$，则 $a=$______.

16. 有 6 个相同的球，分别标有数字 1、2、3、4、5、6，从中不放回地随机抽取 3 次，每次取 1 个球.记 m 为前两次取出的球上数字的平均值，n 为取出的三个球上数字的平均值，则 m 与 n 差的绝对值不超过 $\frac{1}{2}$ 的概率是______.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．第 17 题~第 21 题为必考题，每个考题考生必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17. 某工厂进行生产线智能化升级改造，升级改造后，从该工厂甲、乙两个车间的产品中随机抽取 150 件进行检验，数据如下：

	优级品	合格品	不合格品	总计
甲车间	26	24	0	50

乙车间	70	28	2	100
总计	96	52	2	150

（1）填写如下列联表：

	优级品	非优级品
甲车间		
乙车间		

能否有95%的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异？能否有99%的把握认为甲，乙两车间产品的优级品率存在差异？

（2）已知升级改造前该工厂产品的优级品率 $p=0.5$，设 $\overline{p}$ 为升级改造后抽取的 n 件产品的优级品率.如果 $\overline{p}>p+1.65\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$，则认为该工厂产品的优级品率提高了，根据抽取的 150 件产品的数据，能否认为生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品率提高了？（$\sqrt{150}\approx 12.247$）

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

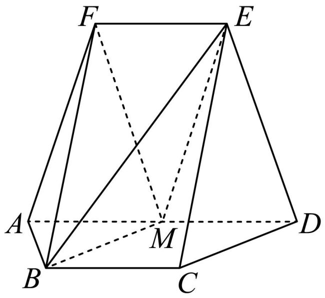
$P\left(K^2\geq k\right)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $4S_n=3a_n+4$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=(-1)^{n-1}na_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n.

19. 如图，在以 A，B，C，D，E，F 为顶点的五面体中，四边形 $ABCD$ 与四边形 $ADEF$ 均为等腰梯形，$BC//AD, EF//AD$，$AD=4, AB=BC=EF=2$，$ED=\sqrt{10}, FB=2\sqrt{3}$，$M$ 为 AD 的中点.



（1）证明：BM / / 平面 CDE；

（2）求二面角 $F-BM-E$ 的正弦值.

20. 设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，点 $M\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 在 C 上，且 $MF\perp x$ 轴.

（1）求 C 的方程；

（2）过点 $P(4,0)$ 的直线与 C 交于 A,B 两点，N 为线段 FP 的中点，直线 NB 交直线 MF 于点 Q，证明：$AQ\perp y$ 轴.

21. 已知函数 $f(x)=(1-ax)\ln(1+x)-x$.

（1）当 $a=-2$ 时，求 $f(x)$ 的极值；

（2）当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分，请考生在第 22、23 题中任选一题作答，并用 2B 铅笔将所选题号涂黑，多涂、错涂、漏涂均不给分，如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=\rho\cos\theta+1$.

（1）写出 C 的直角坐标方程；

（2）设直线 l：$\begin{cases}x=t\\y=t+a\end{cases}$（$t$ 为参数），若 C 与 l 相交于 A、B 两点，若 $|AB|=2$，求 a 的值.

[选修 4-5：不等式选讲]

23. 实数 a,b 满足 $a+b\geq 3$.

（1）证明：$2a^2+2b^2>a+b$；

（2）证明：$|a-2b^2|+|b-2a^2|\geq 6$.

2024 年普通高等学校招生全国统一考试（全国甲卷）

文科数学（部分）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 集合 $A=\{1,2,3,4,5,9\}$，$B=\{x|x+1\in A\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{1,2,3,4\}$　　B. $\{1,2,3\}$

C. $\{3,4\}$　　D. $\{1,2,9\}$

2. 设 $z=\sqrt{2}\mathrm{i}$，则 $z\cdot\overline{z}=$（　　）

A. -i　　B. 1　　C. -1　　D. 2

3. 若实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}4x-3y-3\ge 0\\ x-2y-2\le 0\\ 2x+6y-9\le 0\end{cases}$，则 $z=x-5y$ 的最小值为（　　）

A. 5　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -2　　D. $-\frac{7}{2}$

4. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_9=1$，$a_3+a_7=$（　　）

A. -2　　B. $\frac{7}{3}$　　C. 1　　D. $\frac{2}{9}$

5. 甲、乙、丙、丁四人排成一列，丙不在排头，且甲或乙在排尾的概率是（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

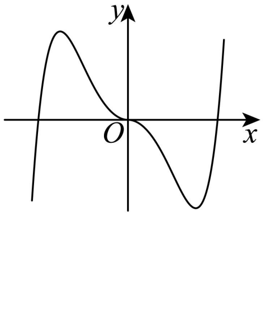
6. 已知双曲线的两个焦点分别为 $(0,4),(0,-4)$，点 $(-6,4)$ 在该双曲线上，则该双曲线的离心率为（　　）

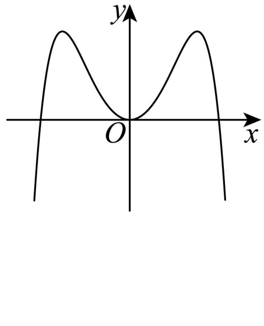
A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

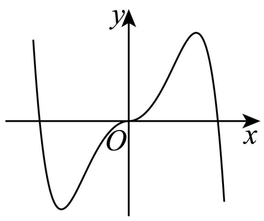
7. 曲线 $f(x)=x^6+3x-1$ 在 $(0,-1)$ 处的切线与坐标轴围成的面积为（　　）

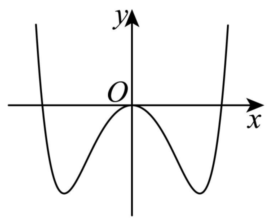
A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 函数 $f(x)=-x^2+\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)\sin x$ 在区间 $[-2.8,2.8]$ 的大致图像为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

9. 已知$\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，则$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$（　　）

A. $2\sqrt{3}+1$　　B. $2\sqrt{3}-1$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $1-\sqrt{3}$

原 10 题略

10. 设α、β是两个平面，m、n是两条直线，且$\alpha\cap\beta=m$.下列四个命题：

①若$m//n$，则$n//\alpha$或$n//\beta$　　②若$m\perp n$，则$n\perp\alpha,n\perp\beta$

③若$n//\alpha$，且$n//\beta$，则$m//n$　　④若n与α和β所成的角相等，则$m\perp n$

其中所有真命题的编号是（　　）

A. ①③　　B. ②④　　C. ①②③　　D. ①③④

11. 在$\triangle ABC$中内角A,B,C所对边分别为a,b,c，若$B=\dfrac{\pi}{3}$，$b^2=\dfrac{9}{4}ac$，则$\sin A+\sin C=$（　　）

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

原 13 题略

12. 函数$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$在$[0,\pi]$上的最大值是______.

13. 已知$a>1$，$\dfrac{1}{\log_8 a}-\dfrac{1}{\log_a 4}=-\dfrac{5}{2}$，则$a=$______.

14. 曲线$y=x^3-3x$与$y=-(x-1)^2+a$在$(0,+\infty)$上有两个不同的交点，则a的取值范围为______.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．第 17 题第 21 题为必考题，每个考题考生必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

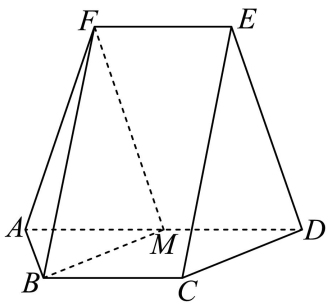
（一）必考题：共 60 分．

15. 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$2S_n=3a_{n+1}-3$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\left\{S_n\right\}$的通项公式.

16. 如图，在以A，B，C，D，E，F为顶点的五面体中，四边形$ABCD$与四边形$ADEF$均为等腰梯形，$BC//AD, EF//AD$，$AD=4, AB=BC=EF=2$，$ED=\sqrt{10}, FB=2\sqrt{3}$，$M$为$AD$的中点.



（1）证明：$BM//$平面CDE；

（2）求点M到ABF的距离.

17. 已知函数$f\left(x\right)=a\left(x-1\right)-\ln x+1$.

（1）求$f\left(x\right)$的单调区间；

（2）若$a\le 2$时，证明：当$x>1$时，$f\left(x\right)<\mathrm{e}^{x-1}$恒成立.

18. 设椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F$，点$M\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$在$C$上，且$MF\perp x$轴.

（1）求C的方程；

（2）过点$P\left(4,0\right)$的直线与C交于A,B两点，N为线段FP的中点，直线NB交直线MF于点Q，证明：$AQ\perp y$轴.

（二）选考题：共10分．请考生在第22、23题中任选一题作答，并用2B铅笔将所选题号涂黑，多涂、错涂、漏涂均不给分，如果多做，则按所做的第一题计分．

19. 在平面直角坐标系xOy中，以坐标原点O为极点，x轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C的极坐标方程为$\rho=\rho\cos\theta+1$.

（1）写出C的直角坐标方程；

（2）设直线l：$\begin{cases}x=t\\y=t+a\end{cases}$（$t$为参数），若$C$与$l$相交于$A$、$B$两点，若$\left|AB\right|=2$，求$a$的值.

20. 实数a,b满足$a+b\ge 3$.

（1）证明：$2a^2+2b^2>a+b$；

（2）证明：$\left|a-2b^2\right|+\left|b-2a^2\right|\ge 6$.

参考答案

2024年普通高等学校招生全国统一考试（新课标 I 卷）

数 学

参考答案

一、单项选择题

【答案】1.A

【解析】

【详解】因为 $A=\left\{x\mid -\sqrt[3]{5}<x<\sqrt[3]{5}\right\}, B=\left\{-3,-1,0,2,3\right\}$，且注意到 $1<\sqrt[3]{5}<2$，

从而 $A\bigcap B=\left\{-1,0\right\}$.

故选：A.

【答案】2.C

【解析】

【详解】因为 $\dfrac{z}{z-1}=\dfrac{z-1+1}{z-1}=1+\dfrac{1}{z-1}=1+\mathrm{i}$，所以 $z=1+\dfrac{1}{\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$.

故选：C.

【答案】3.D

【解析】

【详解】因为 $\vec{b}\perp\left(\vec{b}-4\vec{a}\right)$，所以 $\vec{b}\cdot\left(\vec{b}-4\vec{a}\right)=0$，

所以 $\vec{b}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 即 $4+x^2-4x=0$，故 $x=2$，

故选：D.

【答案】4.A

【解析】

【详解】因为 $\cos\left(\alpha+\beta\right)=m$，所以 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=m$，

而 $\tan\alpha\tan\beta=2$，所以 $\sin\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\cos\beta$，

故 $\cos\alpha\cos\beta-2\cos\alpha\cos\beta=m$ 即 $\cos\alpha\cos\beta=-m$，

从而 $\sin\alpha\sin\beta=-2m$，故 $\cos\left(\alpha-\beta\right)=-3m$，

故选：A.

【答案】5.B

【解析】

【详解】设圆柱的底面半径为 r，则圆锥的母线长为 $\sqrt{r^2+3}$，

而它们的侧面积相等，所以 $2\pi r\times\sqrt{3}=\pi r\times\sqrt{3+r^{2}}$ 即 $2\sqrt{3}=\sqrt{3+r^{2}}$，

故 $r=3$，故圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi\times9\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}\pi$.

故选：B.

【答案】6.B

【解析】

【详解】因为 $f\left(x\right)$ 在 R 上单调递增，且 $x\geq0$ 时，$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+\ln\left(x+1\right)$ 单调递增，

则需满足 $\begin{cases}-\dfrac{-2a}{2\times\left(-1\right)}\geq0\\ -a\leq\mathrm{e}^{0}+\ln1\end{cases}$，解得 $-1\leq a\leq0$，

即 a 的范围是 $[-1,0]$.

故选：B.

【答案】7.C

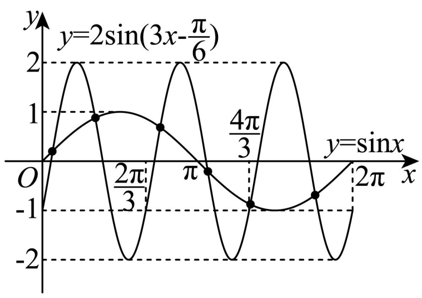
【解析】

【详解】因为函数 $y=\sin x$ 的的最小正周期为 $T=2\pi$，

函数 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{3}$，

所以在 $x\in\left[0,2\pi\right]$ 上函数 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 有三个周期的图象，

在坐标系中结合五点法画出两函数图象，如图所示：



由图可知，两函数图象有 6 个交点.

故选：C

【答案】8.B

【解析】

【详解】因为当 $x<3$ 时 $f(x)=x$，所以 $f(1)=1,f(2)=2$，

又因为 $f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，

则 $f(3)>f(2)+f(1)=3,f(4)>f(3)+f(2)>5$，

$f(5)>f(4)+f(3)>8,f(6)>f(5)+f(4)>13,f(7)>f(6)+f(5)>21$，

$f(8)>f(7)+f(6)>34, f(9)>f(8)+f(7)>55, f(10)>f(9)+f(8)>89$，

$f(11)>f(10)+f(9)>144, f(12)>f(11)+f(10)>233, f(13)>f(12)+f(11)>377$

$f(14)>f(13)+f(12)>610, f(15)>f(14)+f(13)>987$，

$f(16)>f(15)+f(14)>1597>1000$，则依次下去可知 $f(20)>1000$，则 B 正确；

且无证据表明 ACD 一定正确.

故选：B.

二、多项选择题

【答案】9.BC

【解析】

【详解】依题可知，$\overline{x}=2.1, s^2=0.01$，所以 $Y\sim N\left(2.1,0.1\right)$，

故 $P\left(Y>2\right)=P\left(Y>2.1-0.1\right)=P\left(Y<2.1+0.1\right)\approx 0.8413>0.5$，C 正确，D 错误；

因为 $X\sim N\left(1.8,0.1\right)$，所以 $P\left(X>2\right)=P\left(X>1.8+2\times 0.1\right)$，

因为 $P\left(X<1.8+0.1\right)\approx 0.8413$，所以 $P\left(X>1.8+0.1\right)\approx 1-0.8413=0.1587<0.2$，

而 $P\left(X>2\right)=P\left(X>1.8+2\times 0.1\right)<P\left(X>1.8+0.1\right)<0.2$，B 正确，A 错误，

故选：BC．

【答案】10.ACD

【解析】

【详解】对 A，因为函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 **R**，而 $f'\left(x\right)=2\left(x-1\right)\left(x-4\right)+\left(x-1\right)^2=3\left(x-1\right)\left(x-3\right)$，

易知当 $x\in\left(1,3\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$，当 $x\in\left(-\infty,1\right)$ 或 $x\in\left(3,+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0$

函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,1\right)$ 上单调递增，在 $\left(1,3\right)$ 上单调递减，在 $\left(3,+\infty\right)$ 上单调递增，故 $x=3$ 是函数 $f\left(x\right)$ 的极小值点，正确；

对 B，当 $0<x<1$ 时，$x-x^2=x\left(1-x\right)>0$，所以 $1>x>x^2>0$，

而由上可知，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递增，所以 $f\left(x\right)>f\left(x^2\right)$，错误；

对 C，当 $1<x<2$ 时，$1<2x-1<3$，而由上可知，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(1,3\right)$ 上单调递减，

所以 $f\left(1\right)>f\left(2x-1\right)>f\left(3\right)$，即 $-4<f\left(2x-1\right)<0$，正确；

对 D，当 $-1<x<0$ 时，

$f(2-x)-f(x)=(1-x)^2(-2-x)-(x-1)^2(x-4)=(x-1)^2(2-2x)>0$，

所以 $f(2-x)>f(x)$，正确；

故选：ACD.

【答案】11.ABD

【解析】

【详解】对于 A：设曲线上的动点 $P(x,y)$，则 $x>-2$ 且 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}\times|x-a|=4$，

因为曲线过坐标原点，故 $\sqrt{(0-2)^2+0^2}\times|0-a|=4$，解得 $a=-2$，故 A 正确.

对于 B：又曲线方程为 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}\times|x+2|=4$，而 $x>-2$，

故 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}\times(x+2)=4$.

当 $x=2\sqrt{2},y=0$ 时，$\sqrt{(2\sqrt{2}-2)^2}\times(2\sqrt{2}+2)=8-4=4$，

故 $(2\sqrt{2},0)$ 在曲线上，故 B 正确.

对于 C：由曲线的方程可得 $y^2=\frac{16}{(x+2)^2}-(x-2)^2$，取 $x=\frac{3}{2}$，

则 $y^2=\frac{64}{49}-\frac{1}{4}$，而 $\frac{64}{49}-\frac{1}{4}-1=\frac{64}{49}-\frac{5}{4}=\frac{256-245}{49\times4}>0$，故此时 $y^2>1$，

故 C 在第一象限内点的纵坐标的最大值大于 1，故 C 错误.

对于 D：当点 (x_0,y_0) 在曲线上时，由 C 的分析可得 $y_0^2=\frac{16}{(x_0+2)^2}-(x_0-2)^2\le\frac{16}{(x_0+2)^2}$，

故 $-\frac{4}{x_0+2}\le y_0\le\frac{4}{x_0+2}$，故 D 正确.

故选：ABD.

三、填空题

【答案】12. $\frac{3}{2}$

【解析】

【详解】由题可知 A,B,F_2 三点横坐标相等，设 A 在第一象限，将 $x=c$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

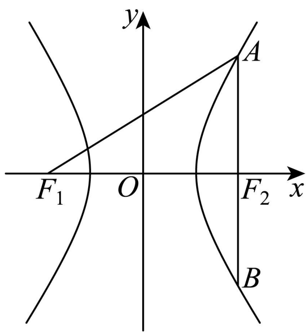
得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$，即 $A\left(c,\frac{b^2}{a}\right),B\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$，故 $|AB|=\frac{2b^2}{a}=10$，$|AF_2|=\frac{b^2}{a}=5$，

又$\left|AF_1\right|-\left|AF_2\right|=2a$，得$\left|AF_1\right|=\left|AF_2\right|+2a=2a+5=13$，解得$a=4$，代入$\frac{b^2}{a}=5$得

$b^2=20$，

故$c^2=a^2+b^2=36,$，即$c=6$，所以$e=\frac{c}{a}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$.

故答案为：$\frac{3}{2}$



【答案】13. $\ln 2$

【解析】

【详解】由$y=\mathrm{e}^x+x$得$y'=\mathrm{e}^x+1$，$y'|_{x=0}=\mathrm{e}^0+1=2$，

故曲线$y=\mathrm{e}^x+x$在$(0,1)$处的切线方程为$y=2x+1$；

由$y=\ln(x+1)+a$得$y'=\frac{1}{x+1}$，

设切线与曲线$y=\ln(x+1)+a$相切的切点为$\left(x_0,\ln(x_0+1)+a\right)$，

由两曲线有公切线得$y'=\frac{1}{x_0+1}=2$，解得$x_0=-\frac{1}{2}$，则切点为$\left(-\frac{1}{2},a+\ln\frac{1}{2}\right)$，

切线方程为$y=2\left(x+\frac{1}{2}\right)+a+\ln\frac{1}{2}=2x+1+a-\ln 2$，

根据两切线重合,所以$a-\ln 2=0$，解得$a=\ln 2$.

故答案为：$\ln 2$

【答案】14. $\frac{1}{2}$

【解析】

【详解】设甲在四轮游戏中的得分分别为X_1,X_2,X_3,X_4，四轮的总得分为X.

对于任意一轮，甲乙两人在该轮出示每张牌的概率都均等，其中使得甲获胜的出牌组合有六种，从而甲在该轮获胜的概率$P\left(X_k=1\right)=\frac{6}{4\times 4}=\frac{3}{8}$，所以$E\left(X_k\right)=\frac{3}{8}(k=1,2,3,4)$.

从而$E\left(X\right)=E\left(X_1+X_2+X_3+X_4\right)=\sum_{k=1}^{4}E\left(X_k\right)=\sum_{k=1}^{4}\frac{3}{8}=\frac{3}{2}$.

记$p_k=P\left(X=k\right)\left(k=0,1,2,3\right)$.

如果甲得 0 分，则组合方式是唯一的：必定是甲出 1，3，5，7 分别对应乙出 2，4，6，8，

所以$p_0=\frac{1}{\mathrm{A}_4^4}=\frac{1}{24}$；

如果甲得 3 分，则组合方式也是唯一的：必定是甲出 1，3，5，7 分别对应乙出 8，2，4，6，

所以$p_3=\frac{1}{\mathrm{A}_4^4}=\frac{1}{24}$.

而X的所有可能取值是 0，1，2，3，故$p_0+p_1+p_2+p_3=1$，$p_1+2p_2+3p_3=E\left(X\right)=\frac{3}{2}$.

所以$p_1+p_2+\frac{1}{12}=1$，$p_1+2p_2+\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$，两式相减即得$p_2+\frac{1}{24}=\frac{1}{2}$，故$p_2+p_3=\frac{1}{2}$.

所以甲的总得分不小于 2 的概率为$p_2+p_3=\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

四、解答题

【答案】15.

（1）由余弦定理有$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$，对比已知$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$，

可得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}ab}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为$C\in\left(0,\pi\right)$，所以$\sin C>0$，

从而$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为$\sin C=\sqrt{2}\cos B$，即$\cos B=\frac{1}{2}$，

注意到$B\in\left(0,\pi\right)$，

所以$B=\frac{\pi}{3}$.

（2）由（1）可得$B=\frac{\pi}{3}$，$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$C\in\left(0,\pi\right)$，从而$C=\frac{\pi}{4}$，$A=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$，

而$\sin A=\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

由正弦定理有$\dfrac{a}{\sin\frac{5\pi}{12}}=\dfrac{b}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{c}{\sin\frac{\pi}{4}}$，

从而$a=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{2}c=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}c, b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}c=\dfrac{\sqrt{6}}{2}c$，

由三角形面积公式可知，$\triangle ABC$的面积可表示为

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}c\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2}c\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{8}c^2$，

由已知$\triangle ABC$的面积为$3+\sqrt{3}$，可得$\dfrac{3+\sqrt{3}}{8}c^2=3+\sqrt{3}$，

所以$c=2\sqrt{2}$.

【答案】16.

（1）由题意得$\begin{cases} b=3 \\ \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{\frac{9}{4}}{b^2}=1 \end{cases}$，解得$\begin{cases} b^2=9 \\ a^2=12 \end{cases}$，

所以$e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\dfrac{9}{12}}=\dfrac{1}{2}$.

（2）法一：$k_{AP}=\dfrac{3-\frac{3}{2}}{0-3}=-\dfrac{1}{2}$，则直线$AP$的方程为$y=-\dfrac{1}{2}x+3$，即$x+2y-6=0$，

$|AP|=\sqrt{(0-3)^2+\left(3-\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$，由（1）知$C:\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1$，

设点B到直线AP的距离为d，则$d=\dfrac{2\times 9}{\frac{3\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$，

则将直线AP沿着与AP垂直的方向平移$\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$单位即可，

此时该平行线与椭圆的交点即为点B，

设该平行线的方程为：$x+2y+C=0$，

则$\dfrac{|C+6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$，解得$C=6$或$C=-18$，

当 $C=6$ 时，联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1\\x+2y+6=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=0\\y=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-3\\y=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$，

即 $B(0,-3)$ 或 $\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right)$，

当 $B(0,-3)$ 时，此时 $k_l=\dfrac{3}{2}$，直线 l 的方程为 $y=\dfrac{3}{2}x-3$，即 $3x-2y-6=0$，

当 $B\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right)$ 时，此时 $k_l=\dfrac{1}{2}$，直线 l 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$，即 $x-2y=0$，

当 $C=-18$ 时，联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1\\x+2y-18=0\end{cases}$ 得 $2y^2-27y+117=0$，

$\Delta=27^2-4\times2\times117=-207<0$，此时该直线与椭圆无交点.

综上直线 l 的方程为 $3x-2y-6=0$ 或 $x-2y=0$.

法二：同法一得到直线 AP 的方程为 $x+2y-6=0$，

点 B 到直线 AP 的距离 $d=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$，

设 $B(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases}\dfrac{|x_0+2y_0-6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}\\\dfrac{x_0^2}{12}+\dfrac{y_0^2}{9}=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_0=-3\\y_0=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=0\\y_0=-3\end{cases}$，

即 $B(0,-3)$ 或 $\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right)$，以下同法一.

法三：同法一得到直线 AP 的方程为 $x+2y-6=0$，

点 B 到直线 AP 的距离 $d=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$，

设 $B\left(2\sqrt{3}\cos\theta,3\sin\theta\right)$，其中 $\theta\in[0,2\pi)$，则有 $\dfrac{\left|2\sqrt{3}\cos\theta+6\sin\theta-6\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$，

联立$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，解得$\begin{cases}\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}\cos\theta=0\\ \sin\theta=-1\end{cases}$，

即$B\left(0,-3\right)$或$\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right)$，以下同法一；

法四：当直线AB的斜率不存在时，此时$B\left(0,-3\right)$，

$S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}\times6\times3=9$，符合题意，此时$k_l=\dfrac{3}{2}$，直线$l$的方程为$y=\dfrac{3}{2}x-3$，即$3x-2y-6=0$，

当线AB的斜率存在时，设直线AB的方程为$y=kx+3$，

联立椭圆方程有$\begin{cases}y=kx+3\\ \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1\end{cases}$，则$\left(4k^2+3\right)x^2+24kx=0$，其中$k\neq k_{AP}$，即$k\neq-\dfrac{1}{2}$，

解得$x=0$或$x=\dfrac{-24k}{4k^2+3}$，$k\neq0$，$k\neq-\dfrac{1}{2}$，

令$x=\dfrac{-24k}{4k^2+3}$，则$y=\dfrac{-12k^2+9}{4k^2+3}$，则$B\left(\dfrac{-24k}{4k^2+3},\dfrac{-12k^2+9}{4k^2+3}\right)$

同法一得到直线AP的方程为$x+2y-6=0$，

点B到直线AP的距离$d=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$，

则$\dfrac{\left|\dfrac{-24k}{4k^2+3}+2\times\dfrac{-12k^2+9}{4k^2+3}-6\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$，解得$k=\dfrac{3}{2}$，

此时$B\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right)$，则得到此时$k_l=\dfrac{1}{2}$，直线$l$的方程为$y=\dfrac{1}{2}x$，即$x-2y=0$，

综上直线l的方程为$3x-2y-6=0$或$x-2y=0$.

法五：当l的斜率不存在时，$l:x=3,B\left(3,-\dfrac{3}{2}\right),\left|PB\right|=3,A$到$PB$距离$d=3$，

此时$S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}\times3\times3=\dfrac{9}{2}\neq9$不满足条件.

当l的斜率存在时，设$PB: y-\frac{3}{2}=k(x-3)$，令$P\left(x_1, y_1\right), B\left(x_2, y_2\right)$，

$\begin{cases} y=k(x-3)+\frac{3}{2} \\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1 \end{cases}$，消$y$可得$\left(4k^2+3\right)x^2-\left(24k^2-12k\right)x+36k^2-36k-27=0$，

$\Delta=\left(24k^2-12k\right)^2-4\left(4k^2+3\right)\left(36k^2-36k-27\right)>0$，且$k \neq k_{AP}$，即$k \neq -\frac{1}{2}$，

$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{24k^2-12k}{4k^2+3} \\ x_1x_2=\frac{36k^2-36k-27}{4k^2+3} \end{cases}, |PB|=\sqrt{k^2+1}\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{3k^2+9k+\frac{27}{4}}}{4k^2+3}$

，

A 到直线PB距离$d=\frac{\left|3k+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}}, S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{3k^2+9k+\frac{27}{4}}}{4k^2+3} \cdot \frac{\left|3k+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}}=9$，

$\therefore k=\frac{1}{2}$或$\frac{3}{2}$，均满足题意，$\therefore l: y=\frac{1}{2}x$或$y=\frac{3}{2}x-3$，即$3x-2y-6=0$或$x-2y=0$.

法六：当l的斜率不存在时，$l: x=3, B\left(3,-\frac{3}{2}\right), |PB|=3, A$到$PB$距离$d=3$，

此时$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{9}{2}\neq 9$不满足条件.

当直线l斜率存在时，设$l: y=k(x-3)+\frac{3}{2}$，

设l与y轴的交点为Q，令$x=0$，则$Q\left(0,-3k+\frac{3}{2}\right)$，

联立$\begin{cases} y=kx-3k+\frac{3}{2} \\ 3x^2+4y^2=36 \end{cases}$，则有$\left(3+4k^2\right)x^2-8k\left(3k-\frac{3}{2}\right)x+36k^2-36k-27=0$，

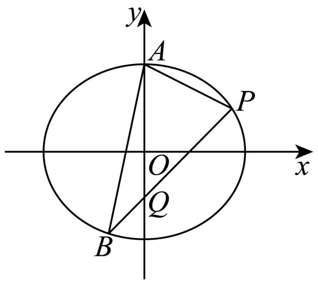
$\left(3+4k^2\right)x^2-8k\left(3k-\frac{3}{2}\right)x+36k^2-36k-27=0$，

其中$\Delta=8k^2\left(3k-\frac{3}{2}\right)^2-4\left(3+4k^2\right)\left(36k^2-36k-27\right)>0$，且$k\neq-\frac{1}{2}$，

则$3x_B=\frac{36k^2-36k-27}{3+4k^2}, x_B=\frac{12k^2-12k-9}{3+4k^2}$，

则 $S=\frac{1}{2}|AQ||x_P-x_B|=\frac{1}{2}\left|3k+\frac{3}{2}\right|\left|\frac{12k+18}{3+4k^2}\right|=9$，解的 $k=\frac{1}{2}$ 或 $k=\frac{3}{2}$，经代入判别式验证均满足题意.

则直线 l 为 $y=\frac{1}{2}x$ 或 $y=\frac{3}{2}x-3$，即 $3x-2y-6=0$ 或 $x-2y=0$.



【答案】17.

（1）因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，而 $AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AD$，

又 $AD\perp PB$，$PB\cap PA=P$，$PB,PA\subset$ 平面 PAB，所以 $AD\perp$ 平面 PAB，

而 $AB\subset$ 平面 PAB，所以 $AD\perp AB$.

因为 $BC^2+AB^2=AC^2$，所以 $BC\perp AB$， 根据平面知识可知 $AD//BC$，

又 $AD\not\subset$ 平面 PBC，$BC\subset$ 平面 PBC，所以 $AD//$ 平面 PBC.

（2）如图所示，过点 D 作 $DE\perp AC$ 于 E，再过点 E 作 $EF\perp CP$ 于 F，连接 DF，
因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以平面 $PAC\perp$ 平面 $ABCD$，而平面 $PAC\cap$ 平面 $ABCD=AC$，
所以 $DE\perp$ 平面 PAC，又 $EF\perp CP$，所以 $CP\perp$ 平面 DEF，
根据二面角的定义可知，$\angle DFE$ 即为二面角 $A-CP-D$ 的平面角，

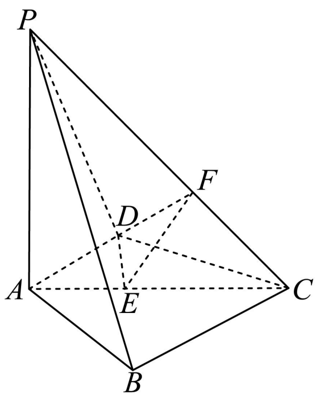
即 $\sin\angle DFE=\frac{\sqrt{42}}{7}$，即 $\tan\angle DFE=\sqrt{6}$.

因为 $AD\perp DC$，设 $AD=x$，则 $CD=\sqrt{4-x^2}$，由等面积法可得，$DE=\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$，

又 $CE=\sqrt{\left(4-x^2\right)-\frac{x^2\left(4-x^2\right)}{4}}=\frac{4-x^2}{2}$，而 $\triangle EFC$ 为等腰直角三角形，所以

$EF=\frac{4-x^2}{2\sqrt{2}}$，

故 $\tan\angle DFE=\frac{\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}}{\frac{4-x^2}{2\sqrt{2}}}=\sqrt{6}$，解得 $x=\sqrt{3}$，即 $AD=\sqrt{3}$.



【答案】18.

（1）$b=0$时，$f\left(x\right)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax$，其中$x\in\left(0,2\right)$，

则$f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{2}{x\left(2-x\right)}+a,x\in\left(0,2\right)$，

因为$x\left(2-x\right)\le\left(\dfrac{2-x+x}{2}\right)^2=1$，当且仅当$x=1$时等号成立，

故$f'\left(x\right)_{\min}=2+a$，而$f'\left(x\right)\ge0$成立，故$a+2\ge0$即$a\ge-2$，

所以a的最小值为-2.，

（2）$f\left(x\right)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b\left(x-1\right)^3$的定义域为$\left(0,2\right)$，

设$P\left(m,n\right)$为$y=f\left(x\right)$图象上任意一点，

$P\left(m,n\right)$关于$\left(1,a\right)$的对称点为$Q\left(2-m,2a-n\right)$，

因为$P\left(m,n\right)$在$y=f\left(x\right)$图象上，故$n=\ln\dfrac{m}{2-m}+am+b\left(m-1\right)^3$，

而$f\left(2-m\right)=\ln\dfrac{2-m}{m}+a\left(2-m\right)+b\left(2-m-1\right)^3=-\left[\ln\dfrac{m}{2-m}+am+b\left(m-1\right)^3\right]+2a$，

$=-n+2a$，

所以$Q\left(2-m,2a-n\right)$也在$y=f\left(x\right)$图象上，

由P的任意性可得$y=f\left(x\right)$图象为中心对称图形，且对称中心为$\left(1,a\right)$.

（3）因为$f\left(x\right)>-2$当且仅当$1<x<2$，故$x=1$为$f\left(x\right)=-2$的一个解，

所以$f\left(1\right)=-2$即$a=-2$，

先考虑$1<x<2$时，$f\left(x\right)>-2$恒成立.

此时 $f\left(x\right)>-2$ 即为 $\ln\dfrac{x}{2-x}+2\left(1-x\right)+b\left(x-1\right)^3>0$ 在 $\left(1,2\right)$ 上恒成立，

设 $t=x-1\in\left(0,1\right)$，则 $\ln\dfrac{t+1}{1-t}-2t+bt^3>0$ 在 $\left(0,1\right)$ 上恒成立，

设 $g\left(t\right)=\ln\dfrac{t+1}{1-t}-2t+bt^3,t\in\left(0,1\right)$，

则 $g'\left(t\right)=\dfrac{2}{1-t^2}-2+3bt^2=\dfrac{t^2\left(-3bt^2+2+3b\right)}{1-t^2}$，

当 $b\geq 0$，$-3bt^2+2+3b\geq -3b+2+3b=2>0$，

故 $g'\left(t\right)>0$ 恒成立，故 $g\left(t\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上为增函数，

故 $g\left(t\right)>g\left(0\right)=0$ 即 $f\left(x\right)>-2$ 在 $\left(1,2\right)$ 上恒成立.

当 $-\dfrac{2}{3}\leq b<0$ 时，$-3bt^2+2+3b\geq 2+3b\geq 0$，

故 $g'\left(t\right)\geq 0$ 恒成立，故 $g\left(t\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上为增函数，

故 $g\left(t\right)>g\left(0\right)=0$ 即 $f\left(x\right)>-2$ 在 $\left(1,2\right)$ 上恒成立.

当 $b<-\dfrac{2}{3}$，则当 $0<t<\sqrt{1+\dfrac{2}{3b}}<1$ 时，$g'\left(t\right)<0$

故在 $\left(0,\sqrt{1+\dfrac{2}{3b}}\right)$ 上 $g\left(t\right)$ 为减函数，故 $g\left(t\right)<g\left(0\right)=0$，不合题意，舍；

综上，$f\left(x\right)>-2$ 在 $\left(1,2\right)$ 上恒成立时 $b\geq-\dfrac{2}{3}$.

而当 $b\geq-\dfrac{2}{3}$ 时，

而 $b\geq-\dfrac{2}{3}$ 时，由上述过程可得 $g\left(t\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 递增，故 $g\left(t\right)>0$ 的解为 $\left(0,1\right)$，

即 $f\left(x\right)>-2$ 的解为 $\left(1,2\right)$.

综上，$b\geq-\dfrac{2}{3}$.

【答案】19.

（1）首先，我们设数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 的公差为 d，则 $d\neq 0$.

由于一个数列同时加上一个数或者乘以一个非零数后是等差数列，当且仅当该数列是等差数列，

故我们可以对该数列进行适当的变形 $a'_k=\dfrac{a_k-a_1}{d}+1\left(k=1,2,...,4m+2\right)$，

得到新数列 $a_k'=k\left(k=1,2,...,4m+2\right)$，然后对 $a_1',a_2',...,a_{4m+2}'$ 进行相应的讨论即可.

换言之，我们可以不妨设 $a_k=k\left(k=1,2,...,4m+2\right)$，此后的讨论均建立在该假设下进行.

回到原题，第 1 小问相当于从 $1,2,3,4,5,6$ 中取出两个数 i 和 $j\left(i<j\right)$，使得剩下四个数是等差数列.

那么剩下四个数只可能是 $1,2,3,4$，或 $2,3,4,5$，或 $3,4,5,6$.

所以所有可能的 $\left(i,j\right)$ 就是 $\left(1,2\right),\left(1,6\right),\left(5,6\right)$.

（2）由于从数列 $1,2,...,4m+2$ 中取出 2 和 13 后，剩余的 $4m$ 个数可以分为以下两个部分，共 m 组，使得每组成等差数列：

①$\left\{1,4,7,10\right\},\left\{3,6,9,12\right\},\left\{5,8,11,14\right\}$，共 3 组；

②$\left\{15,16,17,18\right\},\left\{19,20,21,22\right\},...,\left\{4m-1,4m,4m+1,4m+2\right\}$，共 $m-3$ 组.

（如果 $m-3=0$，则忽略②）

故数列 $1,2,...,4m+2$ 是 $\left(2,13\right)-$ 可分数列.

（3）定义集合 $A=\left\{4k+1\middle|k=0,1,2,...,m\right\}=\left\{1,5,9,13,...,4m+1\right\}$，

$B=\left\{4k+2\middle|k=0,1,2,...,m\right\}=\left\{2,6,10,14,...,4m+2\right\}$.

下面证明，对 $1\le i<j\le 4m+2$，如果下面两个命题同时成立，

则数列 $1,2,...,4m+2$ 一定是 $\left(i,j\right)-$ 可分数列：

命题 1：$i\in A,j\in B$ 或 $i\in B,j\in A$；
命题 2：$j-i\ne 3$.
我们分两种情况证明这个结论.
第一种情况：如果 $i\in A,j\in B$，且 $j-i\ne 3$.

此时设 $i=4k_1+1$，$j=4k_2+2$，$k_1,k_2\in\left\{0,1,2,...,m\right\}$.

则由 $i<j$ 可知 $4k_1+1<4k_2+2$，即 $k_2-k_1>-\dfrac{1}{4}$，故 $k_2\ge k_1$.

此时，由于从数列 $1,2,...,4m+2$ 中取出 $i=4k_1+1$ 和 $j=4k_2+2$ 后，

剩余的 $4m$ 个数可以分为以下三个部分，共 m 组，使得每组成等差数列：

①$\left\{1,2,3,4\right\},\left\{5,6,7,8\right\},...,\left\{4k_1-3,4k_1-2,4k_1-1,4k_1\right\}$，共 k_1 组；

②

$\left\{4k_1+2,4k_1+3,4k_1+4,4k_1+5\right\},\left\{4k_1+6,4k_1+7,4k_1+8,4k_1+9\right\},...,\left\{4k_2-2,4k_2-1,4k_2,4k_2+1\right\}$

，共 k_2-k_1 组；

③

$\{4k_2+3,4k_2+4,4k_2+5,4k_2+6\},\{4k_2+7,4k_2+8,4k_2+9,4k_2+10\},...,\{4m-1,4m,4m+1,4m+2\}$

，共 $m-k_2$ 组.

（如果某一部分的组数为 0，则忽略之）

故此时数列 $1,2,...,4m+2$ 是 $(i,j)-$ 可分数列.

第二种情况：如果 $i\in B, j\in A$，且 $j-i\neq 3$.

此时设 $i=4k_1+2$，$j=4k_2+1$，$k_1,k_2\in\{0,1,2,...,m\}$.

则由 $i<j$ 可知 $4k_1+2<4k_2+1$，即 $k_2-k_1>\dfrac{1}{4}$，故 $k_2>k_1$.

由于 $j-i\neq 3$，故 $(4k_2+1)-(4k_1+2)\neq 3$，从而 $k_2-k_1\neq 1$，这就意味着 $k_2-k_1\geq 2$.

此时，由于从数列 $1,2,...,4m+2$ 中取出 $i=4k_1+2$ 和 $j=4k_2+1$ 后，剩余的 $4m$ 个数可以分为以下四个部分，共 m 组，使得每组成等差数列：

①$\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},...,\{4k_1-3,4k_1-2,4k_1-1,4k_1\}$，共 k_1 组；

②$\{4k_1+1,3k_1+k_2+1,2k_1+2k_2+1,k_1+3k_2+1\}$，

$\{3k_1+k_2+2,2k_1+2k_2+2,k_1+3k_2+2,4k_2+2\}$，共 2 组；

③全体 $\{4k_1+p,3k_1+k_2+p,2k_1+2k_2+p,k_1+3k_2+p\}$，其中 $p=3,4,...,k_2-k_1$，共 k_2-k_1-2 组；

④

$\{4k_2+3,4k_2+4,4k_2+5,4k_2+6\},\{4k_2+7,4k_2+8,4k_2+9,4k_2+10\},...,\{4m-1,4m,4m+1,4m+2\}$

，共 $m-k_2$ 组.

（如果某一部分的组数为 0，则忽略之）

这里对②和③进行一下解释：将③中的每一组作为一个横排，排成一个包含 k_2-k_1-2 个行，4 个列的数表以后，4 个列分别是下面这些数：

$\{4k_1+3,4k_1+4,...,3k_1+k_2\}$，$\{3k_1+k_2+3,3k_1+k_2+4,...,2k_1+2k_2\}$，

$\{2k_1+2k_2+3,2k_1+2k_2+3,...,k_1+3k_2\}$，$\{k_1+3k_2+3,k_1+3k_2+4,...,4k_2\}$.

可以看出每列都是连续的若干个整数，它们再取并以后，将取遍 $\{4k_1+1,4k_1+2,...,4k_2+2\}$ 中除开五个集合 $\{4k_1+1,4k_1+2\}$，$\{3k_1+k_2+1,3k_1+k_2+2\}$，

$\{2k_1+2k_2+1,2k_1+2k_2+2\}$，$\{k_1+3k_2+1,k_1+3k_2+2\}$，$\{4k_2+1,4k_2+2\}$中的十个元素以外的所有数.

而这十个数中，除开已经去掉的$4k_1+2$和$4k_2+1$以外，剩余的八个数恰好就是②中出现的八个数.

这就说明我们给出的分组方式满足要求，故此时数列$1,2,...,4m+2$是$(i,j)-$可分数列.

至此，我们证明了：对$1\le i<j\le 4m+2$，如果前述命题1和命题2同时成立，则数列$1,2,...,4m+2$一定是$(i,j)-$可分数列.

然后我们来考虑这样的(i,j)的个数.

首先，由于$A\cap B=\varnothing$，A和B各有$m+1$个元素，故满足命题1的(i,j)总共有$(m+1)^2$个；

而如果$j-i=3$，假设$i\in A,j\in B$，则可设$i=4k_1+1$，$j=4k_2+2$，代入得

$(4k_2+2)-(4k_1+1)=3$.

但这导致$k_2-k_1=\frac{1}{2}$，矛盾，所以$i\in B,j\in A$.

设$i=4k_1+2$，$j=4k_2+1$，$k_1,k_2\in\{0,1,2,...,m\}$，则$(4k_2+1)-(4k_1+2)=3$，即

$k_2-k_1=1$.

所以可能的(k_1,k_2)恰好就是$(0,1),(1,2),...,(m-1,m)$，对应的(i,j)分别是

$(2,5),(6,9),...,(4m-2,4m+1)$，总共$m$个.

所以这$(m+1)^2$个满足命题1的(i,j)中，不满足命题2的恰好有m个.

这就得到同时满足命题1和命题2的(i,j)的个数为$(m+1)^2-m$.

当我们从$1,2,...,4m+2$中一次任取两个数i和$j\,(i<j)$时，总的选取方式的个数等于

$\frac{(4m+2)(4m+1)}{2}=(2m+1)(4m+1)$.

而根据之前的结论，使得数列$a_1,a_2,...,a_{4m+2}$是$(i,j)-$可分数列的(i,j)至少有

$(m+1)^2-m$个.

所以数列$a_1,a_2,...,a_{4m+2}$是$(i,j)-$可分数列的概率P_m一定满足

$$P_m \geq \frac{(m+1)^2-m}{(2m+1)(4m+1)}=\frac{m^2+m+1}{(2m+1)(4m+1)}>\frac{m^2+m+\frac{1}{4}}{(2m+1)(4m+2)}=\frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}{2(2m+1)(2m+1)}=\frac{1}{8}$$

.
这就证明了结论.

2024年普通高等学校招生全国统一考试（新课标II卷）

数 学

参考答案

一、单项选择题

【答案】1.C
【解析】
【详解】若$z=-1-\mathrm{i}$，则$|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

故选：C.
【答案】2.B
【解析】
【详解】对于p而言，取$x=-1$，则有$|x+1|=0<1$，故p是假命题，$\neg p$是真命题，

对于q而言，取$x=1$，则有$x^3=1^3=1=x$，故q是真命题，$\neg q$是假命题，

综上，$\neg p$和q都是真命题.
故选：B.
【答案】3.B
【解析】
【详解】因为$\left(\vec{b}-2\vec{a}\right)\perp\vec{b}$，所以$\left(\vec{b}-2\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=0$，即$\vec{b}^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$，

又因为$\left|\vec{a}\right|=1,\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=2$，

所以$1+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=1+6\vec{b}^2=4$，

从而$\left|\vec{b}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：B.
【答案】4.C
【解析】
【详解】对于 A, 根据频数分布表可知, $6+12+18=36<50$,

所以亩产量的中位数不小于 $1050\mathrm{kg}$, 故 A 错误;

对于 B，亩产量不低于$1100\mathrm{kg}$的频数为$24+10=34$，

所以低于1100kg的稻田占比为$\dfrac{100-34}{100}=66\%$，故B错误；

对于C，稻田亩产量的极差最大为$1200-900=300$，最小为$1150-950=200$，故C正确；

对于D，由频数分布表可得，亩产量在$[1050,1100)$的频数为

$100-(6+12+18+24+10)=30$，

所以平均值为

$\dfrac{1}{100}\times(6\times925+12\times975+18\times1025+30\times1075+24\times1125+10\times1175)=1067$，故D错误.

故选：C.

【答案】5.A

【解析】

【详解】设点$M(x,y)$，则$P(x,y_0),P'(x,0)$，

因为M为PP'的中点，所以$y_0=2y$，即$P(x,2y)$，

又P在圆$x^2+y^2=16(y>0)$上，

所以$x^2+4y^2=16(y>0)$，即$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1(y>0)$，

即点M的轨迹方程为$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1(y>0)$.

故选：A

【答案】6.D

【解析】

【详解】解法一：令$f(x)=g\left(x\right)$，即$a(x+1)^2-1=\cos x+2ax$，可得$ax^2+a-1=\cos x$，

令$F\left(x\right)=ax^2+a-1,G\left(x\right)=\cos x$，

原题意等价于当$x\in(-1,1)$时，曲线$y=F(x)$与$y=G(x)$恰有一个交点，

注意到$F\left(x\right),G\left(x\right)$均为偶函数，可知该交点只能在$y$轴上，

可得$F\left(0\right)=G\left(0\right)$，即$a-1=1$，解得$a=2$，

若$a=2$，令$F\left(x\right)=G\left(x\right)$，可得$2x^2+1-\cos x=0$

因为$x\in\left(-1,1\right)$，则$2x^2\geq0,1-\cos x\geq0$，当且仅当$x=0$时，等号成立，

可得$2x^2+1-\cos x\geq0$，当且仅当$x=0$时，等号成立，

则方程$2x^2+1-\cos x=0$有且仅有一个实根0，即曲线$y=F(x)$与$y=G(x)$恰有一个交点，

所以$a=2$符合题意；
综上所述：$a=2$.

解法二：令$h\left(x\right)=f(x)-g\left(x\right)=ax^2+a-1-\cos x, x\in\left(-1,1\right)$，

原题意等价于$h\left(x\right)$有且仅有一个零点，

因为$h\left(-x\right)=a\left(-x\right)^2+a-1-\cos\left(-x\right)=ax^2+a-1-\cos x=h\left(x\right)$，

则$h\left(x\right)$为偶函数，

根据偶函数的对称性可知$h\left(x\right)$的零点只能为0，

即$h\left(0\right)=a-2=0$，解得$a=2$，

若$a=2$，则$h\left(x\right)=2x^2+1-\cos x, x\in\left(-1,1\right)$，

又因为$2x^2\ge 0, 1-\cos x\ge 0$当且仅当$x=0$时，等号成立，

可得$h\left(x\right)\ge 0$，当且仅当$x=0$时，等号成立，

即$h\left(x\right)$有且仅有一个零点0，所以$a=2$符合题意；

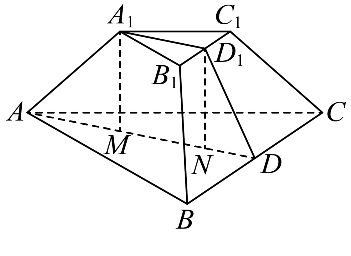
故选：D.
【答案】7.B
【解析】
【详解】解法一：分别取BC, B_1C_1的中点D, D_1，则$AD=3\sqrt{3}, A_1D_1=\sqrt{3}$，

可知$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 6\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}, S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$，

设正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$的为h，

则$V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}\left(9\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{9\sqrt{3}\times\sqrt{3}}\right)h=\frac{52}{3}$，解得$h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

如图，分别过A_1, D_1作底面垂线，垂足为M, N，设$AM=x$，



则 $AA_1=\sqrt{AM^2+A_1M^2}=\sqrt{x^2+\frac{16}{3}}$， $DN=AD-AM-MN=2\sqrt{3}-x$，

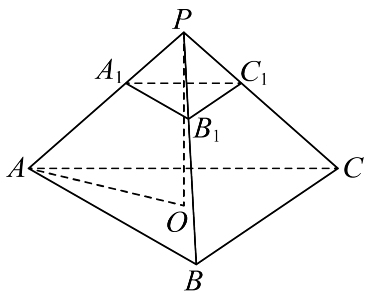
可得 $DD_1=\sqrt{DN^2+D_1N^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}-x\right)^2+\frac{16}{3}}$，

结合等腰梯形 BCC_1B_1 可得 $BB_1^2=\left(\frac{6-2}{2}\right)^2+DD_1^2$，

即 $x^2+\frac{16}{3}=\left(2\sqrt{3}-x\right)^2+\frac{16}{3}+4$，解得 $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

所以 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为 $\tan\angle A_1AD=\frac{A_1M}{AM}=1$；

解法二：将正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成正三棱锥 $P-ABC$，



则 A_1A 与平面 ABC 所成角即为 PA 与平面 ABC 所成角，

因为 $\frac{PA_1}{PA}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{1}{3}$，则 $\frac{V_{P-A_1B_1C_1}}{V_{P-ABC}}=\frac{1}{27}$，

可知 $V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{26}{27}V_{P-ABC}=\frac{52}{3}$，则 $V_{P-ABC}=18$，

设正三棱锥 $P-ABC$ 的高为 d，则 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}d\times\frac{1}{2}\times6\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=18$，解得 $d=2\sqrt{3}$，

取底面 ABC 的中心为 O，则 $PO\perp$ 底面 ABC，且 $AO=2\sqrt{3}$，

所以 PA 与平面 ABC 所成角的正切值 $\tan\angle PAO=\frac{PO}{AO}=1$.

故选：B.

【答案】8.C

【解析】

【详解】解法一：由题意可知：$f(x)$ 的定义域为 $\left(-b,+\infty\right)$，

令 $x+a=0$ 解得 $x=-a$；令 $\ln(x+b)=0$ 解得 $x=1-b$；