第一章　行列式

§1.3 n阶行列式的定义

■ 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

■ 三阶行列式的特点

- 每一项都是三个元素的乘积.
- 每一项的三个元素都位于不同的行和列.
- 行列式的6项恰好对应于1, 2, 3的6种排列.
- 各项系数与对应的列指标的排列的奇偶性有关.

取正号的3项的列下标排列：123 231 312 都是偶排列

取负号的3项的列下标排列：321 132 213 都是奇排列

■ 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \boxed{\sum_{j_1 j_2 j_3}} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} a_{3 j_3}$$

$j_1 j_2 j_3$的逆序数

对所有不同的三级排列$j_1 j_2 j_3$求和

■ 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1 j_1} a_{2 j_2}$$

■ n阶行列式

设a_{ij}(i, j =1,2,…,n)是n^2个数(元素), 定义n阶行列式:

$j_1 j_2 \ldots j_n$的逆序数

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \boxed{\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

任一项取自行列式的不同行、不同列元素之积,共 n! 项。各项的“正”、“负”号各占一半，均为n!/2

注: 当$n = 1$时, 一阶行列式$|a_{11}| = a_{11}$,

这与绝对值符号的意义是不一样的.

例如, 四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中, 没有 $a_{11}a_{22}a_{31}a_{44}$

$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$前面带_负_号,

$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$前面带_正_号,

$a_{31}a_{22}a_{13}a_{44}$前面带_负_号.

$a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$

例如 按定义计算 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}$$

$$= (-1)^{\tau(12)} a_{11} a_{22} + (-1)^{\tau(21)} a_{12} a_{21}$$

$$= (-1)^{0} a_{11} a_{22} + (-1)^{1} a_{12} a_{21}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

解

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$=(-1)^{\tau(234\cdots n1)}a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$$

$$=(-1)^{n-1}1\cdot 2\cdots(n-1)n$$

$$=(-1)^{n-1}n!$$

■几个特殊的行列式

例3.3 计算上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解：

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1} n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_{n-1} n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{n-1,j_{n-1}} a_{nn}$$

$$= (-1)^{\tau(123\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \boxed{= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}}$$

■几个特殊的行列式

同理 计算<u>下三角行列式</u>

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解：

$$= \sum_{1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(1 j_2 \cdots j_n)} a_{11} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

$$= (-1)^{\tau(123 \cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

■几个特殊的行列式

计算<u>主对角线行列式</u>

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & L & 0 \\ 0 & a_{22} & L & 0 \\ M & M & M & M \\ 0 & 0 & L & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & L & 0 \\ 0 & a_{22} & L & 0 \\ M & M & M & M \\ 0 & 0 & L & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} L \ a_{nn}$$

■几个特殊的行列式

计算<u>副对角线行列式</u>

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解：

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-1,2} a_{n1}$$

■ n阶行列式的两种定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

§1.4 n阶行列式的性质及计算