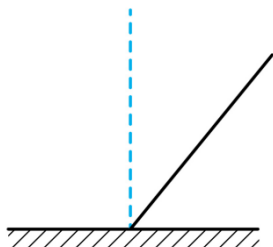


2024-2025 学年物理竞赛能力培优精练

专题 09 刚体动力学

1. (2023 • 北京强基计划) 一根质量均匀的细杆一端铰接于地面, 初始时竖直方向。收到微扰后在竖直平面内倒下, 在这个过程中, 杆内部 ()



- A. 切向力最大离上端 $\frac{1}{3}$ 处
B. 切向力最大离下端 $\frac{1}{3}$ 处
C. 无切向力
D. 内部传递力矩最大离上端 $\frac{1}{3}$ 处
E. 内部传递力矩最大离下端 $\frac{1}{3}$ 处

【答案】E

【详解】ABC. 记杆长为 L , 当杆倒下 θ 角时, 以铰接点为参考, 重力的力矩提供角加速度 β , 由转动定律可得

$$mg \cdot \frac{L}{2} \sin \theta = \frac{1}{3} mL^2 \cdot \beta$$

解得

$$\beta = \frac{3g}{2L} \sin \theta$$

将距离铰接点 $\geq x$ 的部分杆作为研究对象, 该部分质量

$$m' = \frac{L-x}{L} m$$

质心加速度

$$a = \beta \cdot \frac{L+x}{2} = \frac{3(L+x)}{4L} g \sin \theta$$

加速度由切向力和重力提供 (切向力 T 以垂直杆向下为正)

$$T + m'g \sin \theta = m'a$$

解得

$$T = \frac{(L-x)(3x-L)}{4L^2} mg \sin \theta$$

因此，最小值出现在 $x = \frac{L}{3}$ 处，最大值出现在 $x = 0$ 处。故 ABC 错误；

DE. 考虑转动定律，角加速度由切向力 T 和切向力矩 M 提供

$$M - T \cdot \frac{L-x}{2} = \frac{1}{12} m' (L-x)^2 \beta$$

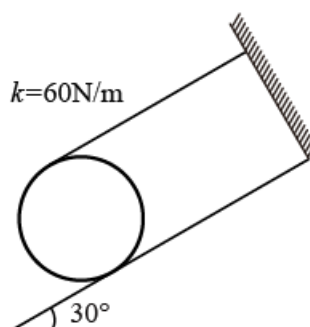
解得

$$M = \frac{x(L-x)^2}{4L^2} mg \sin \theta$$

可得最小值出现在两端，最大值出现在 $x = \frac{L}{3}$ 处。故 D 错误，E 正确。

故选 E。

2. (2022 · 全国强基计划) 劲度系数为 $k = 60 \text{ N/m}$ 的弹性绳牵着一个质量 $m = 0.2 \text{ kg}$ 的匀质圆柱体 (圆柱体转动惯量 $I = \frac{1}{2} mR^2$)，该柱体可以在倾角 $\theta = 30^\circ$ 的斜面上做纯滚动，在圆柱体的平衡位置附近，圆柱体受到微扰的振动周期 ()



- A. 0.314s
- B. 0.555s
- C. 0.689s
- D. 0.666s
- E. 0.444s

【答案】A

【详解】以刚体与平面接触位置为瞬时转动中心，在平衡位置附近的微扰仅有弹性绳中的弹力会对瞬心产生偏离平衡位置后的回复力矩。

由平行轴定理

$$I = I_c + md^2$$

得

$$I = \frac{3}{2}mR^2$$

由转动定理

$$M = I\beta$$

得

$$-k2x \cdot 2R = \frac{3}{2}mR^2\beta$$

圆柱体做纯滚动时，沿斜面方向加速度 α 和角加速度 β 满足

$$\alpha = R\beta$$

化简后可得

$$\alpha + \frac{4}{3} \frac{k}{m} x = 0$$

圆柱体做简谐运动，周期满足

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{4k}} = \frac{\pi}{10}$$

结果与 A 选项相符。

故选 A。

3. (2023 · 郑州竞赛) 一根长为 l ，质量为 m 的均匀细棒在地上竖立着。如果让竖立着的棒以下端与地面接触处为轴倒下，则上端到达地面时速率应为 ()

A. $\sqrt{6gl}$ B. $\sqrt{3gl}$ C. $\sqrt{2gl}$ D. $\sqrt{\frac{3g}{2l}}$

【答案】B

【详解】杆对过杆的一端且与杆垂直的轴的转动惯量为

$$J = \frac{1}{3}ml^2$$

由能量守恒定律可知

$$mg \frac{l}{2} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

解得

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

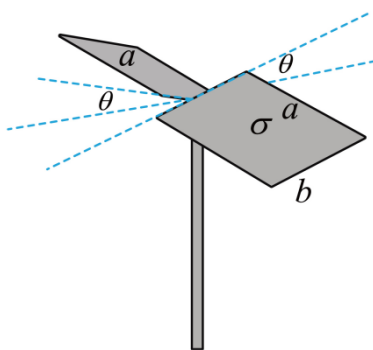
故上端到达地面时速率应为

$$v = \omega \cdot l = \sqrt{3gl}$$

故选 B。

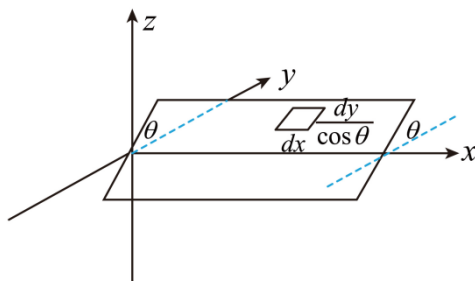
4. (2022 • 全国竞赛) 竹蜻蜓由同材质的两个旋翼叶片与一根垂直杆组成, 旋翼叶片为两片长为 a , 宽为 b , 面密度为 σ 的匀质长方形板, 与水平面夹角皆为 θ , 杆子质量 $m_1 = \sigma ab$ 。 $t = 0$ 时, 以角速度 ω_0 , 数值速度 $v_0 = 0$ 起飞, 与密度为 ρ 的空气发生弹性碰撞, 在发生碰撞前, 空气保持静止。求:

- (1) 竹蜻蜓绕杆的转动惯量;
- (2) 速度为 v , 角速度为 ω 时竹蜻蜓受到的力与力矩情况;
- (3) 这个竹蜻蜓能够起飞至少要多大的 ω_0 ? 并求 θ 多大时竹蜻蜓最容易起飞。



【答案】(1) $\frac{\sigma ab}{6}(4a^2 + b^2 \cos^2 \theta)$; (2) 见解析; (3) $\frac{3}{2a \sin \theta} \sqrt{\frac{\sigma g}{\rho \cos \theta}}$, $\cos \theta = \frac{1}{3}$

【详解】(1) 对单块板如图建系



质量微元

$$dm = \sigma dx \frac{dy}{\cos \theta}$$

单块板绕杆的转动惯量为

$$dI_1 = dm r^2 = \frac{\sigma}{\cos \theta} (x^2 + y^2) dx dy$$

积分

$$I_1 = \int_{-\frac{b}{2 \cos \theta}}^{\frac{b}{2 \cos \theta}} \int_0^a \frac{\sigma}{\cos \theta} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\sigma ab}{12} (4a^2 + b^2 \cos^2 \theta)$$

考虑两个叶片

$$I = 2I_1 = \frac{\sigma ab}{6}(4a^2 + b^2 \cos^2 \theta)$$

(2) 仍然对 (x, y) 处的微元分析 (角速度逆时针方向为正), 转动速度

$$\vec{v}_{\text{转}} = \vec{\omega} \times \vec{r} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$$

平动速度

$$\vec{v}_{\text{平}} = v \vec{k}$$

故其速度

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{转}} + \vec{v}_{\text{平}} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j} + v \vec{k}$$

由板的法向量

$$\vec{e} = -\cos \theta \vec{k} + \sin \theta \vec{j}$$

微元的速度在板法向投影为

$$v_{\perp} = \vec{v} \cdot \vec{e} = -\cos \theta v + \sin \theta \omega x$$

$v_{\perp}$ 为正时表示板下表面撞击空气; $v_{\perp}$ 为负时表示板上撞击空气。讨论:

当 $v > 0$, 若 $v > \tan \theta \omega a$, 板上每一处的风力向下;

若 $v < \tan \theta \omega a$, 板上 $(0, \frac{v}{\tan \theta \omega})$ 风力向下, $(\frac{v}{\tan \theta \omega}, a)$ 风力向上

当 $v < 0$, 若 $v < -\tan \theta \omega a$, 板上每一处的风力向上;

若 $v > -\tan \theta \omega a$, 板上 $(0, -\frac{v}{\tan \theta \omega})$ 风力向上, $(-\frac{v}{\tan \theta \omega}, a)$ 风力向下

之后我们会发现, 这个讨论非常重要

计算 dm 受力

$$dF = 2\rho v_{\perp}^2 dx \frac{dy}{\cos \theta}$$

在竖直方向投影

$$dF_z = 2\rho v_{\perp}^2 dx dy$$

我们知道 $v_{\perp}$ 与 dF 的方向应该是相反的, 但发现这个 dF 的式子关于 $v_{\perp}$ 没有体现出方向性, 因此我们在后续的积分时要手动地加上正负号。

竹蜻蜓受力与力矩的大小 (由于对称性, 我们只需算力的竖直分量): 若板上处处受力方向一致

受力大小

$$F_z = 2 \int_{-\frac{b}{2}\cos\theta}^{\frac{b}{2}\cos\theta} \int_0^a 2\rho v_{\perp}^2 dx dy = 2 \int_{-\frac{b}{2}\cos\theta}^{\frac{b}{2}\cos\theta} \int_0^a 2\rho(-\cos\theta v + \sin\theta\omega x)^2 dx dy = 4\rho ab(\frac{1}{3}\sin^2\theta\omega^2 a^2 - \cos\theta\sin\theta\omega av + \cos^2\theta v^2)$$

受力矩大小

$$M = 2 \int_{-\frac{b}{2}\cos\theta}^{\frac{b}{2}\cos\theta} \int_0^a x \cdot 2\rho v_{\perp}^2 dx dy = 2 \int_{-\frac{b}{2}\cos\theta}^{\frac{b}{2}\cos\theta} \int_0^a 2\rho(-\cos\theta v + \sin\theta\omega x)^2 x dx dy = 4\rho a^2 b \left(\frac{1}{4}\sin^2\theta\omega^2 a^2 - \frac{2}{3}\cos\theta\sin\theta\omega av + \frac{1}{2}\cos^2\theta v^2 \right)$$

若板上处处受力方向一致，为表示方便，我们令

$$\gamma = \left| \frac{v}{\tan\theta\omega} \right|$$

$$F_z = 2 \int_{-\frac{b}{2}\cos\theta}^{\frac{b}{2}\cos\theta} \left(\int_0^{\gamma} 2\rho v_{\perp}^2 dx - \int_{\gamma}^a 2\rho v_{\perp}^2 dx \right) dy =$$

$$4\rho b \cos\theta \left[\frac{1}{3}\sin^2\theta\omega^2(2\gamma^3 - a^3) - \cos\theta\sin\theta\omega v(2\gamma^2 - a^2) + \cos^2\theta v^2(2\gamma - a) \right]$$

$$M = 2 \int_{-\frac{b}{2}\cos\theta}^{\frac{b}{2}\cos\theta} \tan\theta \left(\int_0^{\gamma} 2\rho v_{\perp}^2 x dx - \int_{\gamma}^a 2\rho v_{\perp}^2 x dx \right) dy =$$

$$4\rho b \sin\theta \left[\frac{1}{4}\sin^2\theta\omega^2(2\gamma^4 - a^4) - \frac{2}{3}\cos\theta\sin\theta\omega v(2\gamma^3 - a^3) + \frac{1}{2}\cos^2\theta v^2(2\gamma^2 - a^2) \right]$$

当然，还要考虑力和力矩的方向与重力，于是最后的答案如下

$I\dot{\omega}$

$$= \begin{cases} 4\rho a^2 b \sin\theta \left(\frac{1}{4}\sin^2\theta\omega^2 a^2 - \frac{2}{3}\cos\theta\sin\theta\omega av + \frac{1}{2}\cos^2\theta v^2 \right), & \text{当 } v < 0, v < \tan\theta\omega a \\ 4\rho b \sin\theta \left[\frac{1}{4}\sin^2\theta\omega^2(2\gamma^4 - a^4) - \frac{2}{3}\cos\theta\sin\theta\omega v(2\gamma^3 - a^3) + \frac{1}{2}\cos^2\theta v^2(2\gamma^2 - a^2) \right], & \text{当 } \tan\theta\omega a < v < 0 \\ -4\rho a^2 b \sin\theta \left(\frac{1}{4}\sin^2\theta\omega^2 a^2 - \frac{2}{3}\cos\theta\sin\theta\omega av + \frac{1}{2}\cos^2\theta v^2 \right), & \text{当 } v > 0, v > \tan\theta\omega a \\ -4\rho b \sin\theta \left[\frac{1}{4}\sin^2\theta\omega^2(2\gamma^4 - a^4) - \frac{2}{3}\cos\theta\sin\theta\omega v(2\gamma^3 - a^3) + \frac{1}{2}\cos^2\theta v^2(2\gamma^2 - a^2) \right], & \text{当 } \tan\theta\omega a > v > 0 \end{cases}$$

$$Mv = \begin{cases} -Mg + 4\rho ab \cos\theta \left(\frac{1}{3}\sin^2\theta\omega^2 a^2 - \cos\theta\sin\theta\omega av + \cos^2\theta v^2 \right) & \text{当 } v < 0, v < \tan\theta\omega a \\ -Mg + 4\rho ab \cos\theta \left[\frac{1}{3}\sin^2\theta\omega^2(2\gamma^3 - a^3) - \cos\theta\sin\theta\omega v(2\gamma^2 - a^2) + \cos^2\theta v^2(2\gamma - a) \right] & \text{当 } \tan\theta\omega a < v < 0 \\ -Mg - 4\rho ab \cos\theta \left(\frac{1}{3}\sin^2\theta\omega^2 a^2 - \cos\theta\sin\theta\omega av + \cos^2\theta v^2 \right) & \text{当 } v > 0, v > \tan\theta\omega a \\ -Mg - 4\rho ab \cos\theta \left[\frac{1}{3}\sin^2\theta\omega^2(2\gamma^3 - a^3) - \cos\theta\sin\theta\omega v(2\gamma^2 - a^2) + \cos^2\theta v^2(2\gamma - a) \right] & \text{当 } \tan\theta\omega a > v > 0 \end{cases}$$

其中

$$M = 3\sigma ab, \quad I = 2I_1 = \frac{\sigma ab}{6}(4a^2 + b^2 \cos^2 \theta), \quad \gamma = \left| \frac{v}{\tan \theta \omega} \right|$$

(3) 只要初始 $\omega > 0$ ，并带入 $v = 0$ ，有

$$-Mg + \frac{4}{3}\rho ab \cos \theta \sin^2 \theta \omega^2 a^2 > 0$$

因此只要

$$\omega_0 > \sqrt{\frac{Mg}{\frac{4}{3}\rho ab \cos \theta \sin^2 \theta a^2}} = \sqrt{\frac{9\sigma g}{4\rho \cos \theta \sin^2 \theta a^2}} = \frac{3}{2a \sin \theta} \sqrt{\frac{\sigma g}{\rho \cos \theta}}$$

就能起飞。易知，当

$$\cos \theta = \frac{1}{3}$$

上式的分母最大，最容易起飞。

5. (2020 • 攀枝花竞赛) 如图所示。

(1) 试 (a) 写出质量为 M 和边长为 a 的均匀正 N 边形 ($N = 3, 4, 6, 8, 12, 16, \dots$) 空心棱柱 (薄壁厚 $t \ll a$)，绕中心轴 O 的转动惯量 I_O 。

(b) 使用问题 (a) 结果，或其它方法，(1) 求正方形空心棱柱绕 O 轴的转动惯量 I_O ；以及使用以上空心棱柱结果，或其它方法，(2) 求正方形实心棱柱绕 O 轴的转动惯量 I_O 。(c) 分别求出正方形 (1) 空心棱柱和 (2) 实心棱柱，绕棱边角点 P 轴的转动惯量 I_P 。

(2) 设有 (1) 空心棱柱和 (2) 实心棱柱的均匀正方形，最初静止在倾角为 θ 的斜面上，其中心轴线是水平的。现在令棱柱沿斜面不均匀地自由滚动下来，而且在滚下过程中，摩擦力足以阻止该棱柱的任何滑动，使得其棱边在 P 处与斜面保持良好的接触。

(a) 设棱边 P 撞击斜面之前和之后的瞬时角速度分别为 ω_i 和 ω_f 。若 $\omega_f = k_\omega \omega_i$ ，试求系数 k_ω 。

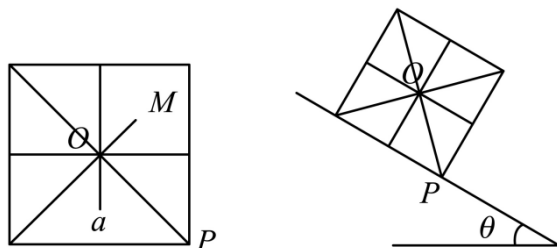
(b) 设棱边 P 撞击斜面之前和之后的动能分别为 E_i 和 E_f 。若 $E_f = kE_i$ ，试求系数 k 。

(c) 为使棱柱能够进行接下来的碰撞， E_i 必须超过一个最小值 $E_i^{\min} = k_{\min} Mga$ 。试以参量 k 和 θ 表示系数 $k_{\min}$ 。

(d) 如题 (c) 条件满足时，动能 E_i 将接近一个固定值 $E_i^{\max} = k_{\max} Mga$ ，使得薄壁棱柱能够滚下斜面。试以参量 k 和 θ 表示系数 $k_{\max}$ 。

(e) 试求出斜面的最小倾斜角度 θ_0

，使得棱柱的不均匀滚动一旦启动，将无限地继续下去。若有需要，可使用积分方程 $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ 。



【答案】见解析

【详解】(1) 解答

(a) 解法 1 平行移轴法

棱柱一条边的质量 $m = \frac{M}{N}$ ，中心点 O 到该边的距离

$$d = \frac{a}{2 \tan\left(\frac{\pi}{N}\right)}$$

绕 O 点的转动惯量

$$I_O = I_C + md^2 = \frac{ma^2}{12} + m \left[\frac{a}{2 \tan\left(\frac{\pi}{N}\right)} \right]^2 = \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{4 \tan^2\left(\frac{\pi}{N}\right)} \right] ma^2$$

则正 N 边形棱柱绕其中心轴线 O 的转动惯量

$$I = NI_O = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \cot^2\left(\frac{\pi}{N}\right) Ma^2$$

解法 2 微积分法

$$I = 2N \int_0^{a/2} dI = 2N \int_0^{a/2} \frac{M}{Na} (d^2 + x^2) dx = \frac{2M}{a} \left[d^2 x + \frac{x^3}{3} \right]_0^{a/2} = M \left[d^2 + \frac{a^2}{12} \right] = \frac{1}{12 + \frac{1}{4} \cot^2\left(\frac{\pi}{N}\right)} Ma^2$$

(b) 解法 1 使用问题 (a) 结果

当 $N=4$ 时，棱柱绕 O 轴的转动惯量

$$I = NI_O = \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{4 \tan^2\left(\frac{\pi}{N}\right)} \right] Ma^2 = \frac{1}{3} Ma^2$$

解法 2 微积分法

$$I = 4 \times \left(2 \int_0^{a/2} dI \right) = 4 \times \left[2 \int_0^{a/2} \frac{M}{4a} (h^2 + x^2) dx \right] = \frac{2M}{a} \left[h^2 x + \frac{x^3}{3} \right]_0^{a/2} = M \left[h^2 + \frac{a^2}{12} \right] = \frac{1}{3} Ma^2$$

(c) 解法 1 微积分法

正方形实心棱柱的面密度 $\sigma = \frac{M}{a^2}$. 对于边长为 $0 < x \leq a$ 的薄壁棱柱

$$dI = \frac{1}{3}(dm)(2x)^2 = \frac{1}{3}(4x^2)(\sigma dA) = \frac{1}{3}(4x^2)\left[\frac{M}{a^2}4(2x)dx\right] = \frac{32M}{3a^2}x^3dx$$

则实体棱柱绕其中心轴线 O 的转动惯量

$$I = \int_0^{a/2} dI = \int_0^{a/2} \frac{32M}{3a^2}x^3dx = \left(\frac{32M}{3a^2}\right)\int_0^{a/2} x^3dx = \left(\frac{32M}{3a^2}\right)\frac{x^4}{4}\bigg|_0^{a/2} = \frac{1}{6}Ma^2$$

解法 2 垂直轴法

对于质量为 m 和边长为 a 的正方形薄板

$$I_x = I_y = \frac{1}{12}ma^2, I_O = I_x + I_y = \frac{1}{6}ma^2$$

则对于质量为 M 和边长为 a 的正方形厚板 (实体棱柱) $I_O = \frac{1}{6}Ma^2$

(d) 如下

$$I_P = I_O + M(d_{PO})^2 = I_O + M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = I_O + M\frac{a^2}{2}$$

(i) 空心棱柱

$$I_O = \frac{1}{3}Ma^2, I_P = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)Ma^2 = \frac{5}{6}Ma^2$$

(ii) 实心棱柱

$$I_O = \frac{1}{6}Ma^2, I_P = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)Ma^2 = \frac{2}{3}Ma^2$$

(2) 解答如下

(a) 某一棱边撞击斜面之前关于 P 点的角动量为

刚体关于质心 O 的转动角动量与质心 O 的平动角动量之和, 即

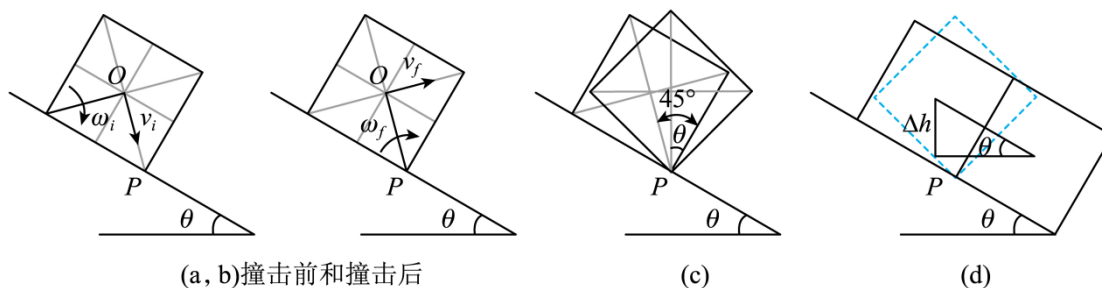
$$L_i = I_O\omega_i + (Mv_i)(0) = \frac{1}{6}Ma^2\omega_i$$

该棱边撞击斜面之后关于 P 点的角动量

$$L_f = I_P\omega_f = \frac{2}{3}Ma^2\omega_f$$

角动量守恒

$$L_i = L_f \Rightarrow \frac{1}{6}Ma^2\omega_i = \frac{2}{3}Ma^2\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{1}{4}\omega_i \Rightarrow k_\omega = \frac{1}{4}$$



(b) 某一棱边撞击斜面之前和之后的动能

$$E_i = \frac{1}{2} I_P \omega_i^2$$

$$E_f = \frac{1}{2} I_P \omega_f^2 \Rightarrow \frac{E_f}{E_i} = \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} \right)^2 = \left(\frac{1}{4} \right)^2 \Rightarrow E_f = \frac{1}{16} E_i \Rightarrow k = \frac{1}{16}$$

(c) 碰撞后薄壁棱柱的质心 O 至少转动一个角度 $(45^\circ - \theta)$, 上升到最高位置

$$\Delta h = a [1 - \cos(45^\circ - \theta)]$$

$$E_f = kE_i \geq Mg\Delta h = Mg \frac{a}{\sqrt{2}} [1 - \cos(45^\circ - \theta)] \Rightarrow E_f^{\min} = k_{\min} Mga \Rightarrow k_{\min} = \frac{1 - \cos(45^\circ - \theta)}{\sqrt{2}k} = \frac{\sqrt{2} - \cos\theta - \sin\theta}{2k}$$

(d) 设某一棱边第 n 次撞击斜面之前和之后的动能分别为 E_i^n 和 E_f^n , 由题 (b) 结果有 $E_f^n = kE_i^n$.

接下来第 $n+1$ 次碰撞, 质量中心会降低一个高度 $\Delta h = a \sin\theta$, 动能变化

$$\Delta E = Mga \sin\theta$$

则有

$$E_i^{n+1} = E_f^n + \Delta E = kE_i^n + Mga \sin\theta, n = 1, 2, 3, \dots$$

即

$$E_i^2 = kE_i^1 + \Delta E$$

$$E_i^3 = kE_i^2 + \Delta E = k(kE_i^1 + \Delta E) + \Delta E = k^2 E_i^1 + (k+1)\Delta E, E_i^4 = kE_i^3 + \Delta E = k[k^2 E_i^1 + (k+1)\Delta E] + \Delta E = k^3 E_i^1 + (k^2 + k + 1)\Delta E$$

$$E_i^{n+1} = k^n E_i^1 + (k^{n-1} + \dots + k + 1)\Delta E, = k^n E_i^1 + \frac{1 - k^n}{1 - k} \Delta E$$

由于 $k < 1$ 当

$$n \rightarrow \infty, E_i^{n+1} = \frac{\Delta E}{1 - k} = E_i^0 \Rightarrow E_i^0 = \frac{\sin\theta}{1 - k} Mga$$

其中 $k_{\max} = \frac{\sin\theta}{1 - k}$;

(e) 要使薄壁棱柱的不均匀滚动无限地继续下去

$$E_i^0 \geq E_i^{\min} \Rightarrow k_0 \geq k_{\min}$$

即

$$\frac{\sin \theta}{1-k} \geq \frac{\sqrt{2}-\cos \theta-\sin \theta}{2k} \Rightarrow r \sin \theta+\cos \theta \geq \sqrt{2}$$

其中

$$r=\frac{1+k}{1-k} \Rightarrow \frac{r}{R} \sin \theta+\frac{1}{R} \cos \theta=\sin (\varphi+\theta) \geq \frac{\sqrt{2}}{R}$$

其中 $R=\sqrt{r^2+1}, \sin \varphi=\frac{1}{R}$ 和 $\cos \varphi=\frac{r}{R}$ 。

附表 1

$N =$	边角 β	顶角 α	$\tan \frac{\alpha}{2}$	$h = \frac{a}{2} \tan^{-1} \frac{\alpha}{2}$	$I = \left(\frac{h^2}{a^2} + \frac{1}{12} \right) Ma^2 = kMa^2 = lMh^2$
3	60°	120°	$\sqrt{3}$	$h = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{a}{2}$	$k = \frac{1}{6}, l = 2$
4	90°	90°	1	$h = \frac{a}{2}$	$k = \frac{1}{3}, l = \frac{4}{3}$
6	120°	60°	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$h = \sqrt{3} \frac{a}{2}$	$k = \frac{5}{6}, l = \frac{10}{9}$
8	135°	45°	$\sqrt{2}-1$	$h = (1+\sqrt{2}) \frac{a}{2}$	$k = \frac{5+3\sqrt{2}}{6}, l = \frac{2(3-2\sqrt{2})}{3}$
12	150°	30°	$2-\sqrt{3}$	$h = (2+\sqrt{3}) \frac{a}{2}$	$k = \frac{11+6\sqrt{3}}{6}, l = 4 \frac{2(3-\sqrt{3})}{3}$

附表 2

	$I_P = I_O + M \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 = I_O + \frac{1}{2} Ma^2$	(i)空心 $I_0 = \frac{1}{3} Ma^2, I_P = \frac{5}{6} Ma^2$	(ii)实心 $I_0 = \frac{1}{6} Ma^2, I_P = \frac{2}{3} Ma^2$
(a)	$L_i = I_O \omega_i + (Mv_i)^P$ 和 $L_f = I_P \omega_f$	$L_i = \frac{1}{3} Ma^2 \omega_i$ 和 $L_f = \frac{5}{6} Ma^2 \omega_f$	$L_i = \frac{1}{6} Ma^2 \omega_i$ 和 $L_f = \frac{2}{3} Ma^2 \omega_f$
	$L_i = L_f \Rightarrow \omega_f = k_\omega \omega_i$	$\frac{1}{3} \omega_i = \frac{5}{6} \omega_f \Rightarrow k_\omega = \frac{2}{5}$	$\frac{1}{6} \omega_i = \frac{2}{3} \omega_f \Rightarrow k_\omega = \frac{1}{4}$

(b)	$E_f = kE_i$ 和 $E = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow k = (k_\omega)$	$k = \frac{4}{25}$	$k = \frac{1}{16}$
(c)	$E_f^{\min} = k_{\min} Mga \Rightarrow k_{\min} = \frac{1 - \cos(45^\circ - \theta)}{\sqrt{2}k} = \frac{\sqrt{2} - \cos\theta - \sin\theta}{2k}$	(d)	$E_i^{\max} = k_{\max} Mga \Rightarrow k_{\max} = \frac{\sin\theta}{1 - k}$
(e)	$r = \frac{1+k}{1-k}, R = \sqrt{r^2 + 1}, \sin\varphi = \frac{1}{R}$ $\sin(\varphi + \theta) \geq \frac{\sqrt{2}}{R}$	$r = \frac{29}{21}$ 及 $R \approx 1.7050$. $\sin\varphi = \frac{1}{R} \approx 0.5865 \Rightarrow \varphi \approx 35.910^\circ$ $\theta + u \geq 56.042^\circ \Rightarrow \theta \approx 20.132^\circ$	$r = \frac{17}{15}$ 及 $R \approx 1.5114$. $\sin u = \frac{1}{R} \approx 0.6616 \Rightarrow u \approx 41.424^\circ$ $\theta + u \geq 69.341^\circ \Rightarrow \theta_0 \approx 27.917^\circ$

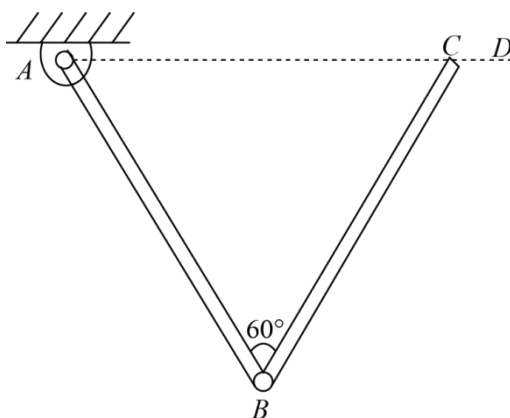
6. (2016 • 全国竞赛) 两根质量均匀分布的杆 AB 和 BC, 质量均为 m , 长均为 l , A 端被光滑铰接到一固定点 (即 AB 杆可在竖直平面内绕 A 点无摩擦转动) 开始时 C 点有外力保持两杆静止, A、C 在同一水平线 AD 上, A、B、C 三点都在同一竖直平面内, $\angle ABC = 60^\circ$. 某时刻撤去外力后两杆始终在竖直平面内运动。

(1) 若两杆在 B 点固结在一起, 求:

(i) 初始时两杆的角加速度;

(ii) 当 AB 杆运动到与水平线 AD 的夹角为 θ 时, AB 杆绕 A 点转动的角速度。

(2) 若两杆在 B 点光滑铰接在一起 (即 BC 杆可在竖直平面内绕 B 点无摩擦转动), 求初始时两杆的角加速度以及两杆间的相互作用力。



【答案】(1) (i) $\alpha = \frac{6g}{7l}$; (ii) $\omega = \sqrt{\frac{3g}{7l}(5\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 2\sqrt{3})}$; (2) $\alpha_1 = \frac{9g}{11l}$, $\alpha_2 = \frac{15g}{11l}$,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{\sqrt{37}}{22}mg \approx 0.276mg$$

【详解】(1) (i) 两杆 AB 和 BC 对于 A 点的转动惯量分别为

$$I_1 = \frac{1}{3}ml^2 \quad (1)$$

$$I_2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2 \quad (2)$$

两杆固结在一起，因而两杆可视为一个刚体绕 A 点做定轴转动，总的转动惯量为

$$I = I_1 + I_2 = \frac{7}{6}ml^2 \quad (3)$$

撤去外力作用后，两杆所受到的重力相对于 A 点的总力矩为

$$M = \frac{1}{4}mgl + \frac{3}{4}mgl \quad (4)$$

两杆的角加速度相同，设为 α （以顺时针方向为正方向），则由刚体转动定理得

$$M = I\alpha \quad (5)$$

联立①②③④⑤式得，两杆的角加速度为

$$\alpha = \frac{6g}{7l} \quad (6)$$

(ii) 考虑 AB 杆从初始位置到与水平线 AD 的夹角为 θ 位置这一过程，两杆重力势能的变化量为
两杆动能的变化量为

$$\Delta E_p = -mg\frac{l}{2}\sin\theta - mg\frac{\sqrt{3}l}{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - 2\left(-mg\frac{l}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad (7)$$

式中， ω 为 AB 杆与水平线 AD 的夹角为 θ 时绕 A 点转动的角速度。整个过程中机械能守恒定律

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0 \quad (9)$$

联立③⑦⑧⑨式得

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{7l}(5\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 2\sqrt{3})} \quad (10)$$

(2) 两杆在 B 点由光滑链连接，因而杆 AB 和 BC 不能整体视为一个刚体，其角加速度不相等，分别设为 α_1 、 α_2 （以顺时针方向为正方向）；取 B 点为原点，x、y 轴正方向分别水平向右，竖直向下，设 BC 杆对 AB 杆的作用力沿 x、y 轴的分量分别为 F_x 、 F_y 。对于 AB 杆，相对于 A 点，由刚体转动定理得

$$\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\alpha_1 = \frac{1}{4}mgl + \frac{1}{2}F_y l - \frac{\sqrt{3}}{2}F_x l \quad (11)$$

对于 BC 杆，AB 杆对 BC 杆的作用力沿 x、y 轴的分量分别为 $-F_x$ 、 $-F_y$ ，设 BC 杆质心的加速度沿 x、y 轴的分量分别为 a_x 、 a_y ，由刚体质心运动定理得

$$ma_x = -F_x \quad (12)$$

$$ma_y = mg - F_y \quad (13)$$

BC 杆同时还绕其质心转动，由刚体转动定理得

$$\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\alpha_2 = \frac{1}{4}F_y l + \frac{\sqrt{3}}{4}F_x l \quad (14)$$

两杆连接点 B 的加速度沿 x、y 轴的分量 a_{Bx} 、 a_{By} 为

$$a_{Bx} = -\frac{\sqrt{3}}{2}l\alpha_2 = a_x - \frac{\sqrt{3}}{4}l\alpha_2 \quad (15)$$

$$a_{By} = -\frac{1}{2}l\alpha_1 = a_y - \frac{1}{4}l\alpha_2 \quad (16)$$

联立(11)(12)(13)(14)(15)(16)式得

$$\alpha_1 = \frac{9g}{11l}, \quad \alpha_2 = \frac{15g}{11l} \quad (17)$$

$$F_x = \frac{3\sqrt{3}}{44}mg, \quad F_y = \frac{1}{4}mg \quad (18)$$

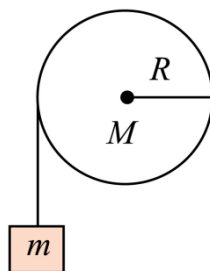
两杆间相互作用力的大小为

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{\sqrt{37}}{22}mg \approx 0.276mg \quad (19)$$

设 BC 杆对 AB 杆的作用力与竖直方向夹角为 ϕ ，则

$$\tan \phi = \frac{F_x}{F_y} = \frac{3\sqrt{3}}{11} \approx 0.472 \quad (20)$$

7. (2022 · 河西竞赛) 如图所示，一个质量为 m 的物体与绕在定滑轮上的绳子相联，绳子质量可以忽略，它与定滑轮之间无滑动。假定滑轮质量为 M 、半径为 R ，其转动惯量为 $\frac{1}{2}MR^2$ ，滑轮轴光滑。试求该物体由静止开始下落的过程中，下落速度与时间的关系。



【答案】 $\frac{mgt}{m + \frac{1}{2}M}$

【详解】对物体牛顿第二定律可得

$$mg - T = ma$$

运动学关系为

$$a = R\beta$$

$$a = \frac{mg}{m + \frac{1}{2}M}$$
$$v = at = \frac{mgt}{m + \frac{1}{2}M}$$

-

$$\omega^2 = 0.80376 \frac{g}{R}$$
$$I_O = \frac{1}{2}mr^2(1 - \frac{2}{3}\sin^2 \frac{\pi}{n}) = \frac{1}{2}MR^2(1 - \frac{2}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2})^2) = \frac{1}{4}MR^2$$

15 / 26

$$I_p = I_o + M(d_{op})^2 = \frac{1}{4}MR^2 + MR^2 = \frac{5}{4}MR^2$$

b. 频率为

$$\omega^2 = \frac{MgL_{op}}{I_p} = \frac{MgR}{5MR^2/4} = \frac{4}{5} \frac{g}{R}$$

(2) 薄板面积为 $A_1 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$, 面密度为

$$\sigma = \frac{M}{A_1} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{M}{R^2}$$

系统的面积为

$$\sum A = A_1 + A_2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{16}\right)R^2.$$

则新系统的两部分的各物理量如下表

$i=1,2$	面积 A^i	$m^i = \sigma A^i$	d_{PC}^i	转动惯量 I_c^i	转动惯量 $I_p^i = I_c^i + m^i(d_p^i)^2$
1. 三角形板	$\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$	M	R	$\frac{1}{4}m_1r_1^2 = \frac{1}{4}MR^2$	$\frac{1}{4}MR^2 + MR^2 = \frac{5}{4}MR^2$
2. 负圆洞	$\pi\left(\frac{R}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{16}R^2$	$\frac{\pi}{12\sqrt{3}}M$	$\frac{5}{4}R$	$\frac{1}{2}m_2r_2^2 = \frac{\pi}{384\sqrt{3}}MR^2$	$\frac{\pi}{384\sqrt{3}}MR^2 + \frac{\pi}{12\sqrt{3}}M\left(\frac{5}{4}R\right)^2 = \frac{51\pi}{384\sqrt{3}}MR^2$

a. 系统的质心为

$$d_{PC} = \frac{A_1x_1 + A_2x_2}{\sum A} = \frac{48\sqrt{3} - 5\pi}{48\sqrt{3} - 4\pi}R = 0.9555R$$

b. 系统转动惯量为

$$I_p = I_p^1 - I_p^2 = \frac{5}{4}MR^2 - \frac{31\pi}{384\sqrt{3}}MR^2 = \left(\frac{5}{4} - \frac{51\pi}{384\sqrt{3}}\right)MR^2 I_c = 1.0091MR^2$$

c. 系统的质量为

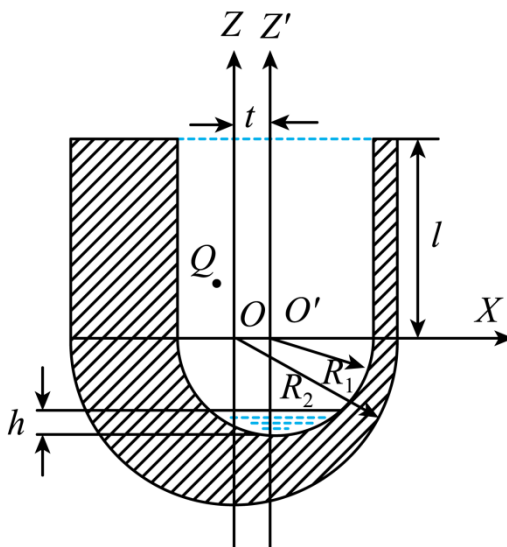
$$\sum M = \sigma \sum A = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{M}{R^2} \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{16}\right)R^2 = \frac{4}{3\sqrt{3}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{16}\right)M = \left(1 - \frac{\pi}{12\sqrt{3}}\right)M = 0.84885M.$$

频率为

$$\omega^2 = \frac{(\sum M)gd_{PC}}{I_p} = \frac{(0.84885M)g(0.9555R)}{1.0091MR^2} = 0.80376 \frac{g}{R}$$

9. (2020 • 全国竞赛) 据《荀子•有坐篇》记载, 孔子观于鲁桓公之庙, 有欹(qī)器焉。欹器者, “虚则欹, 中则正, 满则覆。”悬挂式欹器实物如图 7a 所示: 欹器空时, 器身倾斜; 注水适中, 器身正立; 注水过满, 器身倾覆。图 7b 为悬挂式欹器的正视剖面图。整个欹器的外轮廓是相对于 Z 轴的回转面, Z' 轴为内部管腔的对称轴, 容器内壁与外壁的半球壳半径分别为 $R_1 = R$ 和 $R_2 = \sqrt{3}R$, 两半球的球心 O 和 O' 均位于 X 轴上。 Z' 轴和 Z 轴相距 $t = 3R/10$, 欹器圆柱部分的长度 $l = 2R$ 。欹器的一对悬挂点所在直线与

XOZ 平面交于 Q 点, 其坐标为 $(x_Q = -R/10, z_Q = 2\sqrt{3}R/1)$ 。欹器材质均匀, 其密度 ρ_1 为水的密度 ρ_2 的 3 倍。不计摩擦。



(1) 求空欹器自由悬挂平衡时 Z 轴与竖直方向的夹角。

(2) 求空欹器绕一对悬挂点所在轴的转动惯量及其在平衡位置附近微振动的角频率 (已知密度为 ρ 、半径为 R 的匀质球体绕过其质心的轴的转动惯量为 $I_1 = \frac{8}{15}\pi\rho R^5$; 半径为 R 、长度为 L 的匀质圆柱体绕过其质心且平行于圆柱底面的轴的转动惯量为 $I_2 = \frac{\pi\rho R^2 L(3R^2 + L^2)}{12}$)。

(3) 让空欹器自由悬挂, 并开始往欹器内缓慢注水, 问欹器内水面到底部的距离 h 为多少时器身正立?

(4) 简述“满则覆”的临界条件。

【答案】 (1) 40.5333° ; (2) $12.306\rho_1\pi R^5, 0.122624\sqrt{\frac{g}{R}}$; (3) $1.23526R$; (4) 系统质心刚好高于悬挂点; 或 $x_{CH} = -x_Q, z_{CH} = z_Q$

【详解】 (1) 假设整个欹器是实心时, 它分为长圆柱部分 (I) 和半球部分 (II)。

在坐标系 XOZ 中, 圆柱部分质心的位置为:

$$x_{CI} = 0, z_{CI} = \frac{l}{2} = R$$

半球部分质心的位置为:

$$x_{CII} = 0, z_{CII} = \frac{\int_{-R_2}^0 \rho_1 \pi (R_2^2 - z^2) z dz}{\int_{-R_2}^0 \rho_1 \pi (R_2^2 - z^2) dz} = -\frac{3}{8}R_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{8}R = -0.6495R \quad (1)$$

设整个实心体的质心坐标为 $(x_{C实} = 0, z_{C实})$, 则

$$\left(\rho\pi R_2^3 l + \rho\frac{2}{3}\pi R_2^3\right)z_{C\text{实}} = \rho\pi R_2^3 l \frac{l}{2} - \rho\frac{2}{3}\pi R_2^3 \frac{3R_2}{8}$$

于是

$$x_{C\text{实}} = 0, \quad z_{C\text{实}} = \frac{3(2l^2 - R_2^2)}{4(3l + 2R_2)} = \frac{5(3 - \sqrt{3})}{16}R = 0.3962R \quad (2)$$

相应地，整个欹器空心部分的质心坐标为

$$x_{C\text{空}} = t = 0.3R, \quad z_{C\text{空}} = \frac{3(2l^2 - R_1^2)}{4(3l + 2R_1)} = \frac{21}{32}R = 0.6563R \quad (3)$$

设 $m_{\text{实}}$ 和 $m_{\text{空}}$ 分别是整个欹器是实心时欹器的质量和整个欹器空心部分刚好填实所需的质量，有

$$m_{\text{实}} = \rho_1\pi R_2^2\left(\frac{2R_2}{3} + l\right), \quad m_{\text{空}} = \rho_1\pi R_1^2\left(\frac{2R_1}{3} + l\right)$$

整个瓶子的质心坐标为

$$x_C = \frac{m_{\text{实}}x_{C\text{实}} + (-m_{\text{空}})x_{C\text{空}}}{m_{\text{实}} + (-m_{\text{空}})} = -\frac{R_1^2 t(3l + 2R_1)}{3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_2^3 - R_1^3)}$$

$$= \frac{3(5 - 3\sqrt{3})}{5}R = -0.1177R \quad (4)$$

$$z_C = \frac{m_{\text{实}}z_{C\text{实}} + (-m_{\text{空}})z_{C\text{空}}}{m_{\text{实}} + (-m_{\text{空}})} = \frac{3(R_2 + R_1)(2l^2 - R_2^2 - R_1^2)}{4[3l(R_2 + R_1) + 2(R_2^2 + R_2R_1 + R_1^2)]} \quad (5)$$

$$= \frac{3}{2}(3\sqrt{3} - 5)R = 0.2942R$$

悬挂点的位置为 $(-\frac{1}{10}R, \frac{2\sqrt{3}}{11}R)$ ，欹器内没装水悬挂时欹器倾斜的角度为

$$\theta_0 = \text{arccot} \frac{z_C - z_Q}{x_C - x_Q} = \text{arccot} \frac{25(5\sqrt{3} - 3)}{121}$$

$$= 0.707439 \times \frac{180^\circ}{\pi} = 40.5333^\circ \quad (6)$$

(2) 由球绕直径的转动惯量知，半球绕其底面圆直径的转动惯量为

$$I_{11} = \frac{1}{2}I_1 = \frac{4}{15}\pi\rho R^5$$

由平行轴定理知，半球绕穿过其质心且平行其底面的转轴的转动惯量为

$$I_{1c} = I_{11} - \frac{2}{3}\pi\rho R^3\left(\frac{3}{8}R\right)^2 = \frac{83}{480}\pi\rho R^5 = 0.1729\pi\rho R^5 \quad (7)$$

中间为实心时欹器绕悬挂点连线的转动惯量

$$I_{\text{实}} = \frac{83}{480} \pi \rho_1 R_2^5 + \frac{2}{3} \rho_1 \pi R_2^3 \left[x_Q^2 + \left(\frac{3}{8} R_2 + z_Q \right)^2 \right] + I_2 + \rho_1 \pi R_2^2 l \left[x_Q^2 + \left(\frac{l}{2} - z_Q \right)^2 \right] \quad (8)$$

$$= \frac{79588 + 7591\sqrt{3}}{6050} \rho_1 \pi R^5 = 15.3283 \rho_1 \pi R^5$$

空心部分绕悬挂点连线的转动惯量

$$I_{\text{空}} = I_2 + \rho_1 \pi R_1^2 l \left[(x_Q + t)^2 + \left(\frac{l}{2} - z_Q \right)^2 \right] + I_{1c} + \frac{2}{3} \rho_1 \pi R_1^3 \left[(x_Q + t)^2 + \left(\frac{3}{8} R_1 + z_Q \right)^2 \right] \quad (9)$$

$$= \frac{(24953 - 3850\sqrt{3})}{6050} \rho_1 \pi R^5 = 3.0223 \rho_1 \pi R^5$$

欹器绕悬挂点连线的转动惯量

$$I = I_{\text{实}} - I_{\text{空}} = \frac{(54635 + 11441\sqrt{3})}{6050} \rho_1 \pi R^5 = 12.306 \rho_1 \pi R^5 \quad (10)$$

质心到悬挂点轴线的距离

$$d = \sqrt{\left(-\frac{R_1^2 t (3l + 2R_1)}{3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_2^3 - R_1^3)} + x_Q \right)^2 + \left(\frac{3(R_2 + R_1)(2l^2 - R_2^2 - R_1^2)}{4[3l(R_2 + R_1) + 2(R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2)]} - z_Q \right)^2}$$

$$= \frac{(3\sqrt{3} - 5)\sqrt{2}}{220} \sqrt{30848 - 17541\sqrt{3}} \rho_1 \pi R^3 = 0.02722 \rho_1 \pi R^3$$

$$m_{\text{欹}} = m_{\text{实}} - m_{\text{空}} = \rho_1 \pi \left[R_2^2 \left(\frac{2R_2}{3} + l \right) - R_1^2 \left(\frac{2R_1}{3} + l \right) \right] = \frac{2}{3} (5 + 3\sqrt{3}) \rho_1 \pi R^3$$

欹器绕悬挂点连线摆动的角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{m_{\text{欹}} g d}{I}} = \sqrt{\frac{110\sqrt{2(30848 - 17541\sqrt{3})}}{163905 + 34323\sqrt{3}}} \sqrt{\frac{g}{R}} = 0.122624 \sqrt{\frac{g}{R}} \quad (11)$$

(3) (解法一) 设欹器竖直时里面装的水的质量为 m_s 。

此时水、欹器以及整个体系质心的横坐标 x_{CS} 、 x_C 和 x_{Ct} 分别为

$$x_{CS} = t \quad (12)$$

$$x_C = \frac{3(5 - 3\sqrt{3})}{5} R = -0.1177R$$

$$x_{Ct} = x_Q \quad (13)$$

故有

$$x_{Ct} (m_s + m_q) = m_s x_{CS} + m_q x_C \quad (14)$$

解得：

$$m_s = \frac{m_q(x_C - x_{C_t})}{x_{C_t} - x_{CS}} = \frac{m_q(x_C - x_Q)}{x_Q - t} = 0.3006\rho_1\pi R^3 = 0.9018\rho_2\pi R^3 \quad (15)$$

$$\text{由于 } m_s = 0.9018\rho_2\pi R^3 > \frac{2}{3}\rho_2\pi R^3 \quad (16)$$

故水的体积大于底部半球的容器，即 $h > R$ 。

因而有

$$m_s = \frac{2}{3}\rho_2\pi R^3 + \rho_2\pi R^2(h - R) = 0.9018\rho_2\pi R^3 \quad (17)$$

解得

$$h = \frac{(23 - 9\sqrt{3})}{6}R = 1.23526R \quad (18)$$

此时整个体系质心的纵坐标

$$\begin{aligned} z_{C_t} &= \frac{mz_C + m_{s2}z_{Cs}}{m + m_{s2}} = \frac{3\left\{\left[\rho_1(R_2^2 - R_1^2)(2l^2 - R_1^2 - R_2^2) + \rho_2R_1^2(2h^2 - 4hR_1 + R_1^2)\right]\right\}}{4\left\{\rho_1\left[3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_1^3 - R_1^3)\right] + \rho_2R_1^2(3h - R_1)\right\}} \\ &= \frac{3(2h^2 - 4hR + 25R^2)}{4[3h + (29 + 18\sqrt{3})R]} = 0.271326R < z_Q \end{aligned}$$

故 $h = 1.23526R$ 时欹器正立。

(解法二)

若 $h \leq R_1$ 时欹器竖直位置， $h \leq R_1$ 时，水的质心位置为

$$\begin{cases} x_{CS_1} = t = 0.3R \\ z_{CS_1} = \frac{\int_{-R}^{-(R-h)} \rho_2\pi(R^2 - z^2)zdz}{\int_{-R}^{-(R-h)} \rho_2\pi(R^2 - z^2)dz} = -\frac{3(2R - h)^2}{4(3R - h)} \end{cases} \quad (12)$$

欹器的质量 m 和此时欹器中水的质量 m_s 分别为

$$\begin{aligned} m &= \rho_1\left[\left(\frac{2}{3}\pi R_2^3 + \pi R_2^2l\right) - \left(\frac{2}{3}\pi R_1^3 + \pi R_1^2l\right)\right] = \frac{1}{3}\rho_1\pi\left[3l(R_2^2 - R_1^2) + 2(R_2^3 - R_1^3)\right] \\ &= \frac{1}{3}\rho_1\pi(R_2 - R_1)\left[3l(R_2 + R_1) + 2(R_2^2 + R_1R_2 + R_1^2)\right] \\ m_{s_1} &= \int_{-R}^{-(R-h)} \rho_2\pi(R^2 - z^2)dz = \frac{\rho_2\pi h^2(3R - h)}{3} \end{aligned}$$

整个装置的质心 C_t ，的位置坐标为

$$x_{\text{Ct}} = \frac{mx_{\text{C}} + m_{\text{S}}x_{\text{CS}}}{m + m_{\text{S}}} = \frac{[\rho_1 R_1^2 (3l + 2R_1) + \rho_2 h^2 (h - 3R_1)]t}{\rho_1 [3l(R_1^2 - R_2^2) + 2(R_1^3 - R_2^3)] + \rho_2 h^2 (h - 3R_1)} \quad (13)$$

$$= \frac{3R(24R^3 - 3h^2 R + h^3)}{10[(h - 3R)h^2 - 6(5 + 3\sqrt{3})R^3]}$$

欹器身正立时，悬挂点与系统质心的连线为竖直线必有

$$x_{\text{Ct}} = x_{\text{O}} = -0.1h, \quad (14)$$

解得

$$h = -0.8394R, \quad h = 1.2389R, \quad h = 2.5996R, \quad \text{均不满足 } 0 < h < R, \quad (15)$$

故此时无解。

因此欹器竖直时，必有 $h > R_1$ 。

当 $h > R_1$ 时，与③、④式对比（③、④式中可视为 $l = h - R_1$ ），得水的质心位置为

$$x_{\text{CS}} = t = 0.3R$$

$$z_{\text{CS}} = \frac{\int_{-R_1}^0 \rho_2 \pi (R_1^2 - z^2) z dz + \int_0^{h-R_1} \rho_2 \pi R_1^2 z dz}{\int_{-R_1}^0 \rho_2 \pi (R_1^2 - z^2) dz + \int_0^{h-R_1} \rho_2 \pi R_1^2 dz} = \frac{3(2h^2 - 4hR + R^2)}{4(3h - R)} \quad (16)$$

此时欹器中水的质量 m_{S_2} 为

$$m_{\text{S}_2} = \rho_1 \pi R_1^2 (h - \frac{R_1}{3})$$

整个装置的质心位置为

$$x_{\text{Ct2}} = \frac{mx_{\text{C}} + m_{\text{S}_2}x_{\text{CS}_2}}{m + m_{\text{S}_2}} = \frac{R_1^2 [\rho_1 (3l + 2R_1) + \rho_2 (R_1 - 3h)]t}{\rho_1 [3l(R_1^2 - R_2^2) + 2(R_1^3 - R_2^3)] + \rho_2 R_1^2 (R_1 - 3h)} \quad (17)$$

$$= \frac{3(3h - 25R)R}{10[3h + (29 + 18\sqrt{3})R]}$$

$$z_{\text{Ct2}} = \frac{mz_{\text{C}} + m_{\text{S}_2}z_{\text{CS}}}{m + m_{\text{S}_2}} = \frac{3\left\{\rho_1 (R_2^2 - R_1^2)(2l^2 - R_1^2 - R_2^2) + \rho_2 R_1^2 (2h^2 - 4hR_1 + R_1^2)\right\}}{4\left\{\rho_1 [3l(R_1^2 - R_2^2) + 2(R_1^3 - R_2^3)] + \rho_2 R_1^2 (3h - R_1)\right\}} \quad (18)$$

$$= \frac{3(2h^2 - 4hR + 25R^2)}{4[3h + (29 + 18\sqrt{3})R]}$$

欹器身正立，悬挂点与系统质心的连线为竖直线必有

$$x_{\text{Ct2}} = x_{\text{O}} = -0.1h$$

且 $z_{C12} < z_Q = \frac{2\sqrt{3}}{11}h$

当 $h > R_1$ 时, 由式, 有

$$h = \frac{1}{3} \left[R_1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(3l + 2R_1 - \frac{x_Q R_2^2 (3l + 2R_2)}{R_1^2 (t - x_Q)} \right) \right] = \frac{(23 - 9\sqrt{3})}{6} R = 1.23526R \quad (19)$$

而由 $z_{C12} < z_Q = \frac{2\sqrt{3}}{11}h$ 得

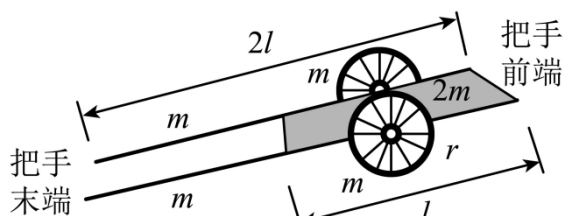
$$0 < h < 2.67979R \text{ 或 } h < -20.059R$$

故 $h = 1.23526R$ 时欹器正立。

(4) 欹器“满则覆”的临界条件是: 系统质心刚好高于悬挂点; 或

$$x_{CH} = -x_Q, \quad z_{CH} = z_Q \quad (20)$$

10. (2019 • 全国竞赛) 农用平板车的简化模型如图 a 所示, 两车轮的半径均为 r (忽略内外半径差), 质量均为 m (车轮辐条的质量可忽略), 两轮可 $2m$ 绕过其中心的光滑细车轴转动 (轴 m 的质量可忽略); 车平板长为 l 、质把手量为 $2m$, 平板的质心恰好位于车轮的轴上; 两车把手 (可视为细直杆) 的长均为 $2l$ 、质量均为 m , 且把手前端与平板对齐, 平板、把手和车轴固连成一个整体, 车轮、平板和把手各自的质量分布都是均匀的. 重力加速度大小为 g .



图a. 农用平板车的简化模型

(1) 该平板车的车轮被一装置 (图中未画出) 卡住而不能前后移动, 但仍可绕车轴转动. 将把手提至水平位置由静止开始释放, 求把手在与水平地面碰撞前的瞬间的转动角速度.

(2) 在把手与水平地面碰撞前的瞬间立即撤去卡住两车轮的装置, 同时将车轮和轴锁死, 在碰后的瞬间立即解锁, 假设碰撞时间较短 (但不为零), 碰后把手末端在竖直方向不反弹. 已知把手与地面、车轮与地面之间的滑动摩擦系数均为 μ (最大静摩擦力等于滑动摩擦力). 求在车轮从开始运动直至静止的过程中, 车轴移动的距离.

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{gr}}{l}$ (2) $\left[\frac{57}{78408} + \frac{16(11\mu r + 6\sqrt{9l^2 - 4r^2})}{9801\sqrt{9l^2 - 4r^2}} \right] \frac{(2r - \mu\sqrt{9l^2 - 4r^2})^2 r}{\mu l^2}$

【详解】 (1) 车轮被一装置卡住而不能前后移动, 但仍可绕轮轴转动. 把手绕车轴的转动惯量为

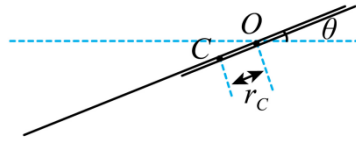
$$J_1 = 2 \left[\frac{1}{12} m (2l)^2 + m \left(\frac{1}{2} l \right)^2 \right] = 2 \left(\frac{4}{12} m^2 + \frac{1}{4} m l^2 \right) = \frac{7}{6} m l^2$$

平板绕车轴的转动惯量为

$$J_2 = \frac{1}{12} 2 m l^2 = \frac{1}{6} m l^2$$

平板与把手整体绕车轴的转动惯量为

$$J = J_1 + J_2 = \frac{4}{3} m l^2 \quad (1)$$

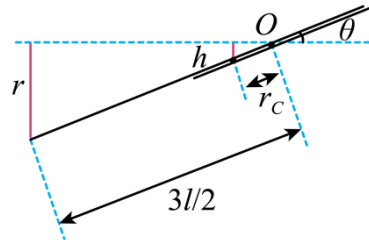


解题图a

把手和平板整体的质心位置到车轴的距离 r_c (见解题图 a) 为

$$r_c = \frac{2m \frac{l}{2}}{4m} = \frac{l}{4} \quad (2)$$

设把手与地面碰撞前的瞬间的角速度为 ω ，由机械能守恒有



解题图b

$$\frac{1}{2} J \omega^2 = 4 m g h \quad (3)$$

式中 h 是把手和平板整体的质心下降的距离 (见解题图 b)

$$\frac{h}{r_c} = \frac{r}{\frac{3l}{2}}$$

将 (2) 式代入上式得

$$h = \frac{2r}{3l} \cdot \frac{l}{4} = \frac{r}{6}$$

由上式和 (1) (3) 式得

$$\omega = \frac{\sqrt{g r}}{l} \quad (4)$$

(2) 在把手与地面碰撞前的瞬间，把手和平板车的质心的速度大小为

$$v_{C1} = \omega r_c = \frac{\sqrt{gr}}{l} \cdot \frac{l}{4} = \frac{\sqrt{gr}}{4}$$

由几何关系有

$$\sin \theta = \frac{2r}{3l}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{9l^2 - 4r^2}}{3l}$$

碰前瞬间把手和平板质心速度的水平与竖直分量（从把手末端朝向把手前端为正）分别为

$$v_{C1x} = v_{C1} \sin \theta = \frac{\sqrt{gr}}{4} \cdot \frac{2r}{3l} = \frac{r\sqrt{gr}}{6l} \quad (5)$$

$$v_{C1y} = v_{C1} \cos \theta = -\frac{\sqrt{gr}}{4} \sqrt{\frac{9l^2 - 4r^2}{3l}} = -\frac{\sqrt{gr(9l^2 - 4r^2)}}{12l} \quad (6)$$

记碰撞时间间隔为 Δt ，由题设，把手、平板与车轮组成的系统在碰撞过程中可视为一个物体。刚碰时，由于把手末端与地面之间有相对速度，把手末端与地面之间在碰撞过程中水平方向的相互作用力是滑动摩擦力。设碰撞过程中地面对系统在竖直方向上总的支持力为 N' ，在碰撞后的瞬间系统的水平速度为 v_0 （ $v_0 \geq 0$ ）。在水平和竖直方向上分别对此系统应用动量定理有

$$\int_0^{\Delta t} (-\mu N') dt = 0 - (-4mv_{C1y}) \quad (7)$$

$$\int_0^{\Delta t} (-\mu N') dt = 6mv_0 - 4mv_{C1x} \quad (8)$$

值得注意的是，（8）式左端的冲量不可能等于零，因而（7）式左端的冲量也不可能等于零。由（7）（8）式得

$$6mv_0 = 4mv_{C1x} - \mu 4mv_{C1y} = 4mv_{C1} \sin \theta - \mu 4mv_{C1} \cos \theta$$

即

$$v_0 = \frac{2}{3} (\sin \theta - \mu \cos \theta) v_{C1} = \frac{2}{3} (\sin \theta - \mu \cos \theta) \frac{\sqrt{gr}}{4} = (\sin \theta - \mu \cos \theta) \frac{\sqrt{gr}}{6}$$

当 $\mu \geq \tan \theta = \frac{2r}{\sqrt{9l^2 - 4r^2}}$ 系统静止，故

$$s = 0 \quad (9)$$

当

$$\mu < \tan \theta = \frac{2r}{\sqrt{9l^2 - 4r^2}}$$

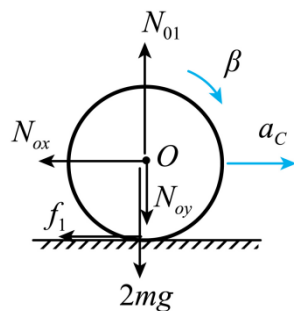
系统开始运动，下面分两阶段讨论系统开始运动后直至停止的过程：

阶段 I. 车轮又滑又滚阶段

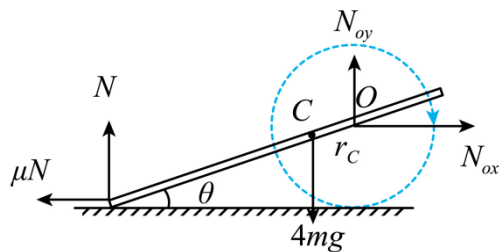
两车轮的受力如解题图 c 所示，图中 N_{01} 是地面对两车轮的正压力， N_{0x} 和 N_{0y}

是把手和平板通过轴对两车轮分别在水平方向和竖直方向的作用力，地面对车轮的滑动摩擦力

$f_1 = \mu N_{01}$.把手和平板作为一个整体的受力解题图 d 所示，图中 N 是地面对把手末端的正压力.



解题图c



解题图d

地面与车之间的总滑动摩擦力为

$$f = -\mu(N + N_{01}) = -\mu(6mg) \quad (10)$$

把手、平板和车轮组成的系统的质心加速度 a_c 为

$$a_c = \frac{f}{6m} = -\mu g \quad (11)$$

对把手和平板系统应用质心运动定理有

$$N_{ox} - \mu N = 4ma_c \quad (12)$$

$$N + N_{oy} - 4mg = 0 \quad (13)$$

对把手和平板系统应用相对于过质心的水平轴的转动定理有

$$\mu N \frac{5l}{4} \sin \theta + N \frac{5l}{4} \cos \theta + N_{ox} \frac{l}{4} \sin \theta + N_{oy} \frac{l}{4} \cos \theta = 0$$

由 (11) (12) (13) 式得

$$N_{ox} = \mu N + 4m(-\mu g) = \mu N - 4\mu mg$$

$$N_{oy} = 4mg - N$$

将以上两式代入 (14) 式得

$$\mu N \frac{5l}{4} \sin \theta + N \frac{5l}{4} \cos \theta + (\mu N - 4\mu mg) \frac{l}{4} \sin \theta + (4mg - N) \frac{l}{4} \cos \theta = 0 \quad (14)$$

于是

$$N = \frac{2}{3} mg$$

因而

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/157041114034010015>