

2023-2024 学年安徽省定远启明中学高三第三次模拟考试数学试卷

注意事项

1. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回.
2. 答题前, 请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置.
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符.
4. 作答选择题, 必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑; 如需改动, 请用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案. 作答非选择题, 必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答, 在其他位置作答一律无效.
5. 如需作图, 须用 2B 铅笔绘、写清楚, 线条、符号等须加黑、加粗.

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle ABC = 60^\circ$, 则 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} =$ ()

- A. 4 B. 6 C. $2\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

2. 已知函数 $f(x) = a(e^2x - 2\ln x)$ ($a > 0$), $D = \left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 若所有点 $(s, f(t))$, $(s, t \in D)$ 所构成的平面区域面积为 $e^2 - 1$, 则 $a =$ ()

- A. e B. $\frac{1}{e-2}$ C. 1 D. $\frac{e}{e-2}$

3. 复数 $z(1-i) = i$ (i 为虚数单位), 则 z 的共轭复数在复平面上对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

4. 将函数 $f(x) = \cos x$ 的图象先向右平移 $\frac{5}{6}\pi$ 个单位长度, 在把所得函数图象的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ ($\omega > 0$) 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 若函数 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 上没有零点, 则 ω 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{2}{9}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{8}{9}]$ B. $(0, \frac{2}{9}]$
C. $(0, \frac{2}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ D. $(0, 1]$

5. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中, O 为 AB 的中点, $PO \perp$ 平面 ABC , $\angle APB = 90^\circ$, $PA = PB = 2$, 则有下列四个结论: ①若 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 则 $PC = 2$; ② $\triangle ABC$ 若为等边三角形, 则 $AP \perp BC$; ③当 $\angle ACB = 90^\circ$ 时, PC

与平面 PAB 所成的角的范围为 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$; ④当 $PC = 4$ 时, M 为平面 PBC 内一动点, 若 $OM \parallel$ 平面 PAC , 则 M 在

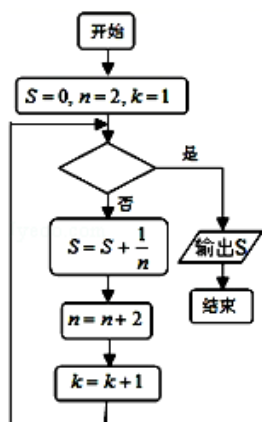
$VPBC$ 内轨迹的长度为 1. 其中正确的个数是 ().

- A. 1 B. 1 C. 3 D. 4

6. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 点 $P(x, y)$ 为该抛物线上的动点, 若点 $A(-1, 0)$, 则 $\frac{PF}{PA}$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

7. 如图是计算 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}$ 值的一个程序框图，其中判断框内应填入的条件是()



- A. $k \geq 5$
 B. $k < 5$
 C. $k > 5$
 D. $k \leq 6$

8. 已知正四面体的内切球体积为 v ，外接球的体积为 V ，则 $\frac{V}{v} = ()$

- A. 4 B. 8 C. 9 D. 27

9. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， O 为对角线的交点，点 P 为平行四边形外一点，且 $AP \perp OB$ ， $BP \perp OA$ ，则 $\overrightarrow{DP} =$ ()



- A. $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DC}$ B. $\frac{3}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$
 C. $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ D. $\frac{3}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

10. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，四面体 $OABC$ 各顶点坐标分别为：

$O(0,0,0), A(0,0,2), B\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, 0\right), C\left(0, \frac{2}{3}\sqrt{3}, 0\right)$. 假设蚂蚁窝在 O 点，一只蚂蚁从 O 点出发，需要在 AB ， AC 上

分别任意选择一点留下信息，然后再返回 O 点. 那么完成这个工作所需要走的最短路径长度是 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{11-\sqrt{21}}$ C. $\sqrt{5+\sqrt{21}}$ D. $2\sqrt{3}$

11. 已知半径为 2 的球内有一个内接圆柱, 若圆柱的高为 2, 则球的体积与圆柱的体积的比为 ()

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{9}{16}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{16}{9}$

12. 已知直线 $l: kx - y - 3k + 1 = 0$ 与椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 交于 A 、 B 两点, 与圆 $C_2:$

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ 交于 C 、 D 两点. 若存在 $k \in [-2, -1]$, 使得 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$, 则椭圆 C_1 的离心率的取值范围为 ()

- A. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$ B. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ C. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ D. $\left[\frac{\sqrt{6}}{3}, 1\right)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 2$, $S_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)a_{n+1}$, $b_n = \log_2 a_n$, 则数列 $\left\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n =$ _____.

14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 $F(-\sqrt{3}, 0)$, A 、 B 为双曲线上关于原点对称的两点, AF 的中点为 H , BF 的中点为 K , HK 的中点为 G , 若 $|HK| = 2|OG|$, 且直线 AB 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 则 $|AB| =$ _____, 双曲线的离心率为 _____.

15. 平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 已知 $A(3, 1)$, $B(-1, 3)$, 若点 C 满足 $\overrightarrow{OC} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$, 其中 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 且 $\alpha + \beta = 1$, 则点 C 的轨迹方程为 _____

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 3a_n$, 且 $a_2 + a_4 + a_6 = 9$, 则 $\log_{\frac{1}{3}}(a_5 + a_7 + a_9) =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = ax - (a+1)\ln x - \frac{1}{x} + 2 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 单调性;

(2) 当 $a = -2$ 时, 求证: $f(x) < e^x - 2x - \frac{1}{x}$.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + \cos x (a \in \mathbf{R})$, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数.

(1) 当 $a = 1$ 时, 令 $h(x) = f'(x) - x + \ln x$, $h'(x)$ 为 $h(x)$ 的导数. 证明: $h'(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一的极小值点;

(2) 已知函数 $y = f(2x) - \frac{2}{3}x^4$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 求 a 的取值范围.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = x \ln x - \frac{a}{2}x^2 - x, a \in R, e \approx 2.71828 \cdots$ 是自然对数的底数.

(1) 若 $a = -e$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 求 a 的取值范围, 并证明: $x_1 x_2 > x_1 + x_2$.

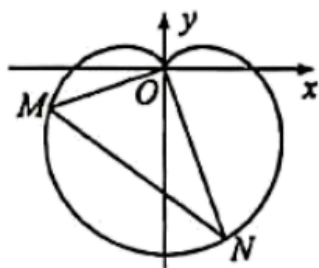
20. (12 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, 且 $b = \frac{a \sin A - c \sin C}{\sin B - \sin C}$.

(1) 求角 A 的值;

(2) 若 $a = \sqrt{3}$, 设角 $B = \theta$, $\triangle ABC$ 周长为 y , 求 $y = f(\theta)$ 的最大值.

21. (12 分) 在新中国成立 70 周年国庆阅兵庆典中, 众多群众在脸上贴着一颗红心, 以此表达对祖国的热爱之情, 在数学中, 有多种方程都可以表示心型曲线, 其中有著名的笛卡尔心型曲线, 如图, 在直角坐标系中, 以原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 图中的曲线就是笛卡尔心型曲线, 其极坐标方程为 $\rho = 1 - \sin \theta$

($0 \leq \theta < 2\pi, \rho > 0$), M 为该曲线上的任意一点.



(1) 当 $|OM| = \frac{3}{2}$ 时, 求 M 点的极坐标;

(2) 将射线 OM 绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 与该曲线相交于点 N , 求 $|MN|$ 的最大值.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2$, 当 $x = 1$ 时, 有极大值 3;

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的极小值及单调区间.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

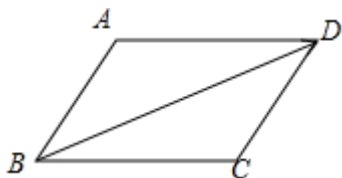
1、B

【解析】

根据菱形中的边角关系，利用余弦定理和数量积公式，即可求出结果.

【详解】

如图所示，



菱形 $ABCD$ 的边长为 2， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle C = 120^\circ, \therefore BD^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos 120^\circ = 12,$$

$$\therefore BD = 2\sqrt{3}, \text{ 且 } \angle BDC = 30^\circ,$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{BD}| \times |\overrightarrow{CD}| \times \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6,$$

故选 B.

【点睛】

本题主要考查了平面向量的数量积和余弦定理的应用问题，属于基础题..

2、D

【解析】

依题意，可得 $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 上单调递增，于是可得 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 上的值域为 $[a(e+2), e^2a]$ ，继而可得

$$a(e^2 - e - 2) \left(1 - \frac{1}{e}\right) = e^2 - 1, \text{ 解之即可.}$$

【详解】

$$\text{解: } f'(x) = a\left(e^2 - \frac{2}{x}\right) = \frac{a(e^2x - 2)}{x}, \text{ 因为 } x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right], a > 0,$$

所以 $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 上单调递增，

则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 上的值域为 $[a(e+2), e^2a]$ ，

因为所有点 $(s, f(t)) (s, t \in D)$ 所构成的平面区域面积为 $e^2 - 1$ ，

所以 $a(e^2 - e - 2) \left(1 - \frac{1}{e}\right) = e^2 - 1$,

解得 $a = \frac{e}{e-2}$,

故选: D.

【点睛】

本题考查利用导数研究函数的单调性, 理解题意, 得到 $a(e^2 - e - 2)(1 - \frac{1}{e}) = e^2 - 1$ 是关键, 考查运算能力, 属于中档题.

3、C

【解析】

由复数除法求出 z , 写出共轭复数, 写出共轭复数对应点坐标即得

【详解】

解析: $Qz = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $\therefore \bar{z} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$,

对应点为 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, 在第三象限.

故选: C.

【点睛】

本题考查复数的除法运算, 共轭复数的概念, 复数的几何意义. 掌握复数除法法则是解题关键.

4、A

【解析】

根据 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律, 求得 $g(x)$ 的解析式, 根据定义域求出 $\omega x - \frac{5\pi}{6}$ 的范围, 再利用余弦函数的图象和性质, 求得 ω 的取值范围.

【详解】

函数 $f(x) = \cos x$ 的图象先向右平移 $\frac{5}{6}\pi$ 个单位长度,

可得 $y = \cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)$ 的图象,

再将图象上每个点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ ($\omega > 0$) 倍(纵坐标不变),

得到函数 $g(x) = \cos\left(\omega x - \frac{5\pi}{6}\right)$ 的图象,

$$\therefore \text{周期 } T = \frac{2\pi}{\omega},$$

若函数 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 上没有零点,

$$\therefore \frac{\omega\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} < \omega x - \frac{5\pi}{6} < \frac{3\omega\pi}{2} - \frac{5\pi}{6},$$

$$\therefore \left(\frac{3\omega\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \right) - \left(\frac{\omega\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \right) \leq \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega},$$

$$\therefore \omega^2 \leq 1, \text{ 解得 } 0 < \omega \leq 1,$$

$$\text{又 } \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq \frac{\omega\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \\ \frac{\pi}{2} + k\pi \geq \frac{3\omega\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \text{ 解得 } \frac{3\omega}{2} - \frac{4}{3} \leq k \leq \frac{\omega}{2} - \frac{1}{3},$$

$$\text{当 } k=0 \text{ 时, 解 } \frac{2}{3} \leq \omega \leq \frac{8}{9},$$

$$\text{当 } k=-1 \text{ 时, } 0 < \omega \leq 1, \text{ 可得 } 0 < \omega \leq \frac{2}{9},$$

$$\therefore \omega \in (0, \frac{2}{9}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{8}{9}].$$

故答案为: A.

【点睛】

本题考查函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的图象变换及零点问题, 此类问题通常采用数形结合思想, 构建不等关系式, 求解可得, 属于较难题.

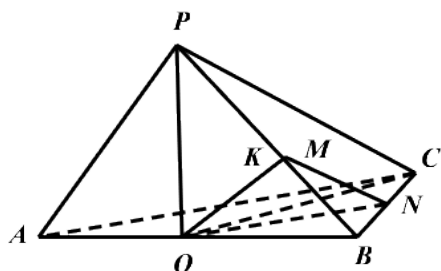
5、C

【解析】

由线面垂直的性质, 结合勾股定理可判断①正确; 反证法由线面垂直的判断和性质可判断②错误; 由线面角的定义和转化为三棱锥的体积, 求得 C 到平面 PAB 的距离的范围, 可判断③正确; 由面面平行的性质定理可得线面平行, 可得④正确.

【详解】

画出图形:



若 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 则 $OA = OB = OC = \sqrt{2}$,

$PO \perp$ 平面 ABC , 可得 $PO \perp OC$, 即 $PC = \sqrt{PO^2 + OC^2} = 2$, ①正确;

$\triangle ABC$ 若为等边三角形, $AP \perp BC$, 又 $AP \perp PB$

可得 $AP \perp$ 平面 PBC , 即 $AP \perp PC$, 由 $PO \perp OC$ 可得

$PC = \sqrt{PO^2 + OC^2} = \sqrt{2+6} = 2\sqrt{2} = AC$, 矛盾, ②错误;

若 $\angle ACB = 90^\circ$, 设 PC 与平面 PAB 所成角为 θ

可得 $OC = OA = OB = \sqrt{2}$, $PC = 2$,

设 C 到平面 PAB 的距离为 d

由 $V_{C-PAB} = V_{P-ABC}$ 可得

$$\frac{1}{3}d \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BC$$

即有 $AC \cdot BC = 2\sqrt{2}d$, $\frac{AC^2 + BC^2}{2} = 4$, 当且仅当 $AC = BC = 2$ 取等号.

可得 d 的最大值为 $\sqrt{2}$, $\sin \theta = \frac{d}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$

即 θ 的范围为 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, ③正确;

取 BC 中点 N , PB 的中点 K , 连接 OK, ON, KN

由中位线定理可得平面 $OKN \parallel$ 平面 PAC

可得 M 在线段 KN 上, 而 $KN = \frac{1}{2}PC = 2$, 可得④正确;

所以正确的是: ①③④

故选: C

【点睛】

此题考查立体几何中与点、线、面位置关系有关的命题的真假判断, 处理这类问题, 可以用已知的定理或性质来证明, 也可以用反证法来说明命题的不成立. 属于一般性题目.

6、B

【解析】

通过抛物线的定义, 转化 $PF = PN$, 要使 $\frac{|PF|}{|PA|}$ 有最小值, 只需 $\angle APN$

最大即可，作出切线方程即可求出比值的最小值。

【详解】

解：由题意可知，抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线方程为 $x = -1$ ， $A(-1, 0)$ ，

过 P 作 PN 垂直直线 $x = -1$ 于 N ，

由抛物线的定义可知 $PF = PN$ ，连结 PA ，当 PA 是抛物线的切线时， $\frac{|PF|}{|PA|}$ 有最小值，则 $\angle APN$ 最大，即 $\angle PAF$

最大，就是直线 PA 的斜率最大，

设在 PA 的方程为： $y = k(x+1)$ ，所以 $\begin{cases} y = k(x+1) \\ y^2 = 4x \end{cases}$ ，

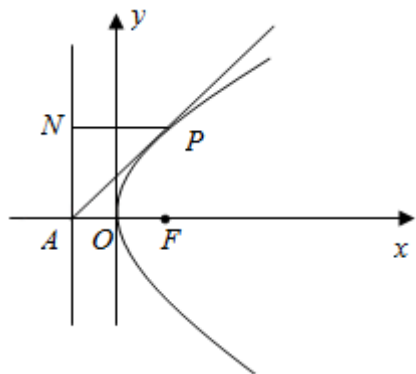
解得： $k^2x^2 + (2k^2 - 4)x + k^2 = 0$ ，

所以 $\Delta = (2k^2 - 4)^2 - 4k^4 = 0$ ，解得 $k = \pm 1$ ，

所以 $\angle NPA = 45^\circ$ ，

$$\frac{|PF|}{|PA|} = \cos \angle NPA = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故选：B。



【点睛】

本题考查抛物线的基本性质，直线与抛物线的位置关系，转化思想的应用，属于基础题。

7、B

【解析】

根据计算结果，可知该循环结构循环了 5 次；输出 S 前循环体的 n 的值为 12， k 的值为 6，进而可得判断框内的不等式。

【详解】

因为该程序图是计算 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}$ 值的一个程序框图

所以共循环了 5 次

所以输出 S 前循环体的 n 的值为 12, k 的值为 6,

即判断框内的不等式应为 $k \geq 6$ 或 $k > 5$

所以选 C

【点睛】

本题考查了程序框图的简单应用, 根据结果填写判断框, 属于基础题.

8、D

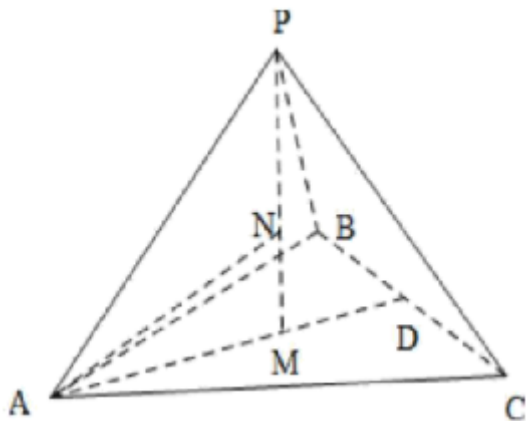
【解析】

设正四面体的棱长为 1, 取 BC 的中点为 D , 连接 AD , 作正四面体的高为 PM , 首先求出正四面体的体积, 再利用等体法求出内切球的半径, 在 $Rt\triangle AMN$ 中, 根据勾股定理求出外接球的半径, 利用球的体积公式即可求解.

【详解】

设正四面体的棱长为 1, 取 BC 的中点为 D , 连接 AD ,

作正四面体的高为 PM ,



$$\text{则 } AD = \frac{\sqrt{3}}{2}, AM = \frac{2}{3}AD = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore PM = \sqrt{PA^2 - AM^2} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12},$$

设内切球的半径为 r , 内切球的球心为 O ,

$$\text{则 } V_{P-ABC} = 4V_{O-ABC} = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} r,$$

$$\text{解得: } r = \frac{\sqrt{6}}{12};$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/157116006164006063>