培优专题 10 等腰三角形的性质与判定



◎类型一：巧用三线合一解决问题

性质：

①两腰相等

②两底角相等（简称等边对等角）

③等腰三角形顶角平分线、底边上的中线、底边上的高线互相重合（简称为“三线合一”）

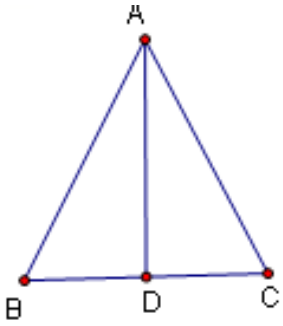
④等腰三角形是轴对称图形，其顶角平分线、底边上的中线、底边上的高线所在的直线式对称轴。

证明题目中的写法：

①已知高线：∵*AB=AC*，*AD*⊥*BC*，∴*BD=CD*，∠*BAD*=∠*CAD*

②已知中线：∵*AB=AC*，*BD=CD*，∴*AD*⊥*BC*，∠*BAD*=∠*CAD*

③已知角平分线：∵*AB=AC*，∠*BAD*=∠*CAD*，∴*AD*⊥*BC*，*BD=CD*



1.（2022·辽宁·本溪市第十二中学八年级阶段练习）等腰三角形 ABC 中，$\angle BAC=120°$，BC 中点为 D，过 D 作 $DE\perp AB$ 于 E，$AE=4\text{cm}$，则 AD 等于（　　）

A．8cm　　B．7cm　　C．6cm　　D．4cm

【答案】A

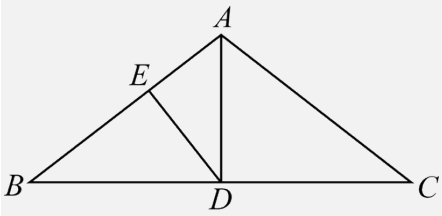
【分析】先根据等腰三角形的定义可得 $\angle BAC$ 是顶角，再画出图形，根据等腰三角形的三线合一可得 $\angle BAD=60°$，从而可得 $\angle ADE=30°$，然后利用含 30 度角的直角三角形的性质即可得.

【详解】解：∵等腰三角形 ABC 中，$\angle BAC=120°$，

∴$\angle BAC$ 是等腰三角形 ABC 的顶角

∴$AB=AC$

由题意画出图形如下：



Q D 为 BC 的中点

$\therefore \angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=60°$

$\because DE\perp AB$

$\therefore \angle ADE=30°$

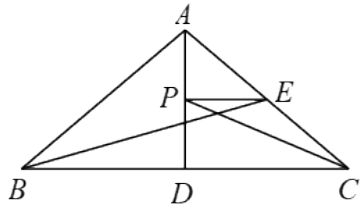
又 $\because AE=4\text{cm}$

$\therefore AD=2AE=8\text{cm}$

故选：A.

【点睛】本题考查了等腰三角形的三线合一、含 30 度角的直角三角形的性质，熟练掌握等腰三角形的三线合一是解题关键.

2.（2022·陕西·西安凤凰城初级中学七年级阶段练习）如图所示，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD，BE 是 $\triangle ABC$ 的两条中线，$AD=6$，$BE=8$，P 是 AD 上的一个动点，连接 PE，PC，则 $CP+EP$ 的最小值是（　　）

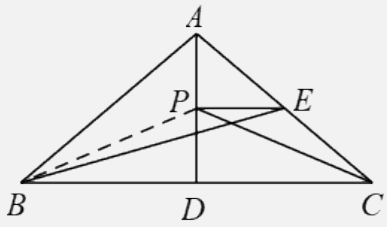


A．6　　B．7　　C．8　　D．9

【答案】C

【分析】如图连接 PB，只要证明 $PB=PC$，即可推出 $PC+PE=PB+PE$，由 $PE+PB\geq BE$，可得 P、B、E 共线时，$PB+PE$ 的值最小，最小值为 BE 的长度.

【详解】解：如图，连接 PB，



∵$AB=AC$，$BD=CD$，

∴$AD\perp BC$，

∴$PB=PC$，

∴$PC+PE=PB+PE$，

∵$PE+PB\geq BE$，

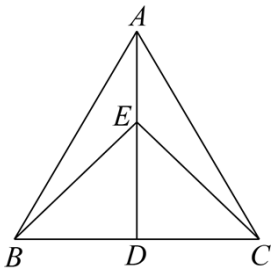
∴P、B、E 共线时，$PB+PE$ 的值最小，最小值为 BE 的长度，

$CP+EP$ 的最小值是：8．

故选：C．

【点睛】本题考查轴对称-最短问题，等腰三角形的性质、线段的垂直平分线的性质等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型．

3．（2021·辽宁·辽河油田实验中学八年级阶段练习）如图，在等边△ABC 中，$AD\perp BC$，垂足为 D，点 E 在线段 AD 上，且 $2ED=BC$，则∠ACE=_____



【答案】15°##15 度

【分析】先判断出 AD 是等边三角形 ABC 中 BC 边上的中线，进而求出∠ECB=45°，即可得出结论．

【详解】解：∵等边三角形 ABC 中，$AD\perp BC$，

∴AD 是等边三角形 ABC 中 BC 边上的中线，（三线合一）

∴$BD=CD=\frac{1}{2}BC$，

∵$2ED=BC$，即 $ED=\frac{1}{2}BC$

∴$CD=ED$，

∴△CDE 是等腰直角三角形

∴$\angle ECB=45°$，

∵△ABC 是等边三角形，

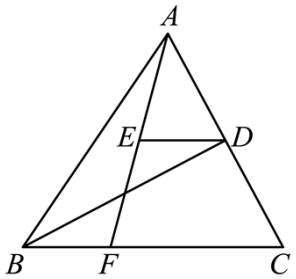
∴$\angle ACB=60°$，

∴$\angle ACE=\angle ACB-\angle ECB=15°$，

故答案为：15°.

【点睛】此题主要考查了等边三角形的性质，等腰三角形的性质与判定，求出 $\angle ECB$ 是解本题的关键.

4.（2022·江苏·沛县汉城文昌学校八年级阶段练习）如图，在△ABC 中，$AB=CB=6$，$BD\perp AC$ 于点 D，F 在 BC 上且 $BF=2$，连接 AF，E 为 AF 的中点，连接 DE，则 DE 的长为：_____



【答案】2

【分析】根据题意求出 FC，根据等腰三角形的性质得到 $AD=DC$，根据三角形中位线定理解答即可.

【详解】解：∵$CB=6$，$BF=2$，

∴$FC=CB-BF=6-2=4$，

∵$AB=CB$，$BD\perp AC$，

∴$AD=DC$，

∵E 为 AF 的中点，

∴DE 是△AFC 的中位线，

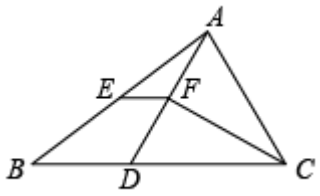
∴$DE=\frac{1}{2}FC=2$，

故答案为：2.

【点睛】本题考查的是三角形中位线定理、等腰三角形的性质，掌握三角形的中位线平行于第三边，且等于第三边的一半是解题的关键.

5.（2022·浙江省金华市永康中学八年级阶段练习）已知：如图，在△ABC 中，CF 平分 $\angle ACB$，$CA=CD$，

$AE=EB$．求证：$EF=\frac{1}{2}BD$．



【答案】见解析

【分析】由等腰三角形的性质可证明 F 为 AD 的中点，可得 EF 为△ABD 的中位线，可证得结论．

【详解】证明：∵$CA=CD$，CF 平分∠ACB，

∴CF 为 AD 边上的中线，

∴F 为 AD 的中点，

又 $AE=EB$，

∴E 为 AB 中点，

∴EF 为△ABD 的中位线，

∴$EF=\frac{1}{2}BD$．

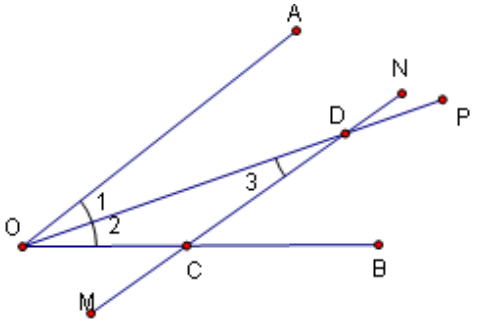
【点睛】本题主要考查等腰三角形的性质和三角形中位线定理，利用等腰三角形“三线合一”的性质证得 F 为 AD 边的中点，是解题的关键．

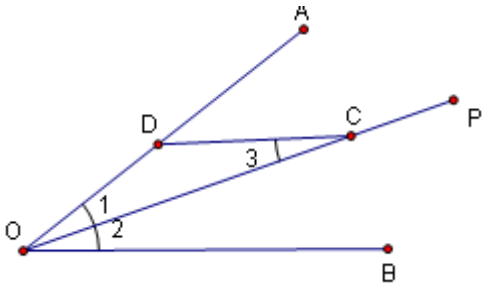
◎类型二：等腰三角形的构造

（1）“角平分线+平行线”构造等腰三角形

①如下左图所示，OP 评分∠AOB，CD∥OA，则△OCD 是等腰三角形

②如下右图所示，OP 评分∠AOB，CD∥OB，则△OCD 是等腰三角形





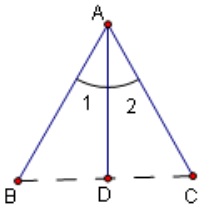
（2）“角平分线+垂线”构造等腰三角形

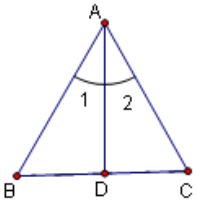
如下左图所示，已知 AD 是∠BAC 的平分线，AD⊥BC，得出等腰三角形

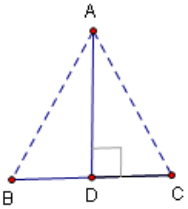
（3）“角平分线+中线”构造等腰三角形

如下中图所示，已知 *AD* 是∠*BAC* 的平分线，*D* 是 *BC* 中点，则△*ABC* 是等腰三角形

（4）“中点+垂直”构造等腰三角形（垂直平分线）如下右图所示

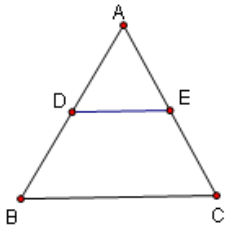


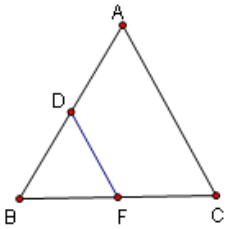




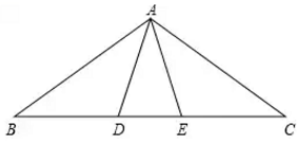
(5)“平行+等腰”构造等腰三角形

已知等腰△*ABC*，过腰或底上作腰或底的平行线





6.（2019·河北保定师范附属学校八年级期中）如图，在△*ABC* 中，∠*B* = ∠*C* = 36°，*D*，*E* 是边 *BC* 上的两点，且有∠*ADE* = ∠*AED* = 72°，则图中等腰三角形的个数是（　　）



A．2　　B．6　　C．5　　D．7

【答案】B

【分析】根据等角对等边、三角形外角的性质和三角形的内角和定理逐一判断即可.

【详解】解：∵∠*B* = ∠*C* = 36°，∠*ADE* = ∠*AED* = 72°，

∴△ABC 和△ADE 都是等腰三角形，∠DAB=∠ADE－∠B=36°，∠EAC=∠AED－∠C=36°，

∴∠DAB=∠B，∠EAC=∠C，

∴△DAB 和△EAC 都是等腰三角形，

∵∠B＋∠BEA＋∠BAE=180°，∠C＋∠CDA＋∠CAD=180°，

∴∠BAE=180°－∠B－∠BEA=72°，∠CAD=180°－∠C－∠CDA=72°，

∴∠BAE=∠BEA，∠CAD=∠CDA，

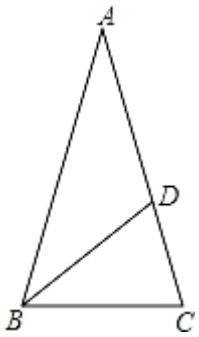
∴△BAE 和△CAD 都是等腰三角形，

综上：共有 6 个等腰三角形.

故选 B.

【点睛】此题考查的是等腰三角形的判定，掌握等角对等边、三角形外角的性质和三角形的内角和定理是解决此题的关键.

7.（2019·湖北荆门·八年级期中）如图，在△*ABC* 中，∠*A*＝36°，∠*C*＝72°，∠*ABC* 的平分线交 *AC* 于 *D*，则图中共有等腰三角形（　　）



A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．3 个

【答案】D

【分析】由已知条件，根据等腰三角形的定义及等角对等边先得出∠ABC 的度数，由∠ABC 的平分线交 AC 于 D，得到其它角的度数，然后进行判断.

【详解】∵在△*ABC* 中，∠*A*＝36°，∠*C*＝72°，

∴∠*ABC*＝180°﹣∠*A*﹣∠*C*＝72°＝∠*C*，

∴*AB*＝*AC*，

∴△*ABC* 是等腰三角形；

∵*BD* 平分∠*ABC* 交 *AC* 于 *D*，

∴∠*ABD*＝∠*DBC*＝36°.

∵∠*A*＝∠*ABD*＝36°，

∴△*ABD* 是等腰三角形；

∵∠*BDC*＝∠*A*+∠*ABD*＝36°+36°＝72°＝∠*C*，

∴△*BDC* 是等腰三角形；

∴共有 3 个等腰三角形.

故选：D.

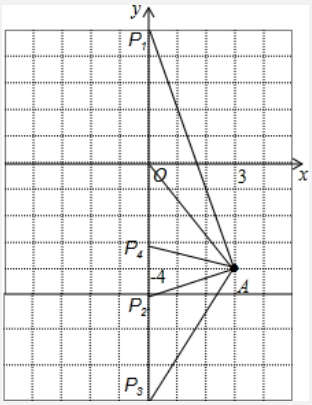
【点睛】本题考查了等腰三角形的判定、角平分线的性质及三角形内角和定理；求得各角的度数是正确解答本题的关键.

8.（2019·黑龙江·哈尔滨市第一一三中学校八年级阶段练习）在平面直角坐标系 xOy 中，已知 A(3，-4)，在 y 轴确定点 P，使△AOP 为等腰三角形，则符合条件的点 P 有_____个

【答案】4

【分析】此题要分 3 种情况：①当 OA=OP 时，②当 AO=AP 时，P（0，-8），③当 PA=PO 时，分别计算出 P 点坐标.

【详解】如图，



∵A（3，-4），

∴AO=$\sqrt{3^2+4^2}$ =5，

当 OA=OP 时，P（0，5）或（0，-5）；

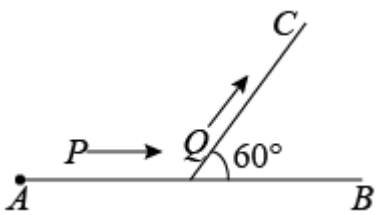
当 AO=AP 时，P（0，-8）；

当 PA=PO 时，P（0，-$\frac{25}{8}$）.

故答案为 4.

【点睛】此题综合考查了等腰三角形的性质以及坐标与图形的性质，注意分情况考虑.

9.（2022·安徽宿州·八年级期中）如图，$\angle BOC=60°$，点 A 是 BO 延长线上的一点，$OA=10$cm，动点 P 从点 A 出发沿 AB 以 2cm/s 的速度移动，动点 Q 从点 O 出发沿 OC 以 1cm/s 的速度移动，如果点 P，Q 同时出发，用 t（s）表示移动的时间，当 t=_____时，$\triangle POQ$ 是等腰三角形.



【答案】$\frac{10}{3}$s 或 10s

【分析】根据 ΔPOQ 是等腰三角形，分两种情况进行讨论：点 P 在 AO 上，或点 P 在 OB 上.

【详解】解：当 $PO=QO$ 时， ΔPOQ 是等腰三角形；

如图 1 所示：

$\because PO=AO-AP=10-2t$ ， $OQ=t$

$\therefore$ 当 $PO=QO$ 时，

$10-2t=t$

解得 $t=\dfrac{10}{3}$；

当 $PO=QO$ 时， ΔPOQ 是等腰三角形；

如图 2 所示：

$\because PO=AP-AO=2t-10$ ， $OQ=t$；

$\therefore$ 当 $PO=QO$ 时， $2t-10=t$；

解得 $t=10$；

故答案为： $\dfrac{10}{3}$s 或 10s.

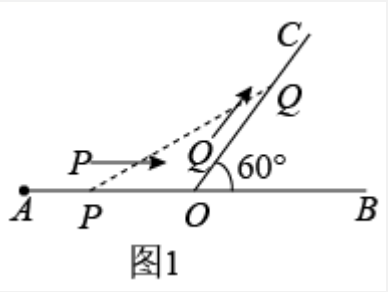


图1

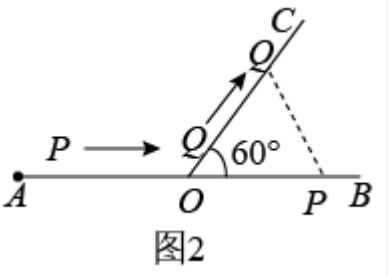


图2

【点睛】本题主要考查了等腰三角形的性质，解题的关键是掌握等腰三角形的性质得出方程进行求解，注意分类讨论.

10.（2021·辽宁·盘锦市第一完全中学八年级期中）在等边三角形 ABC 中，点 E 在 AB 上，点 D 在 CB 的延长线上，且 $ED=EC$.

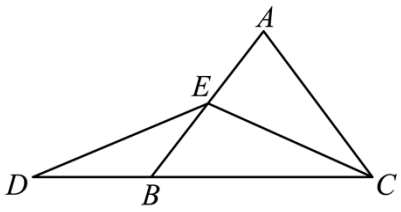


图1

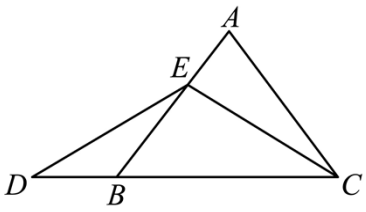


图2

(1)如图 1，当点 E 为 AB 的中点时，确定线段 AE 与 DB 的大小关系，并说明理由.

(2)如图 2，当点 E 为 AB 上任意一点时，确定线段 AE 与 DB 的大小关系，并说明理由.

(3)在等边三角形 ABC 中，若点 E 在直线 AB 上，点 D 在线段 CB 的延长线上，且 $ED=EC$，若$\triangle ABC$ 的边长为 1，$AE=2$，请直接写出 CD 的长.

【答案】(1)$AE=DB$，理由见解析

(2)$AE=DB$，理由见解析

(3)$CD=3$

【分析】（1）由等腰三角形的性质得$\angle D=\angle ECD$，再由等边三角形的性质得$\angle ECD=\frac{1}{2}\angle ACB=30°$，然后证$\angle DEB=\angle D$，得 $DB=BE$，即可得出结论；

（2）过点 E 作 $EF\parallel BC$，交 AC 于点 F，证$\triangle AEF$ 为等边三角形，得 $AE=EF$，再证$\triangle DBE\cong\triangle EFC$（AAS），得 $DB=EF$，即可得出结论；

（3）过点 E 作 $EF\parallel BC$，交 AC 的延长线于点 F，可证得$\triangle AEF$ 是等边三角形，$\triangle DEB\cong\triangle ECF$(AAS)，由 $DB=EF=2$，$BC=1$，即可得出答案.

（1）

解：如图 1，

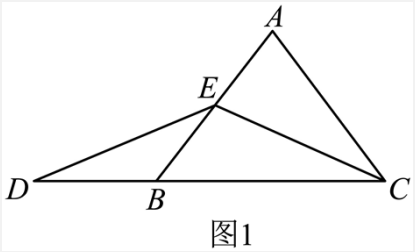


图1

$\because\triangle ABC$ 是等边三角形，点 E 是 AB 的中点，

$\therefore CE$ 平分$\angle ACB$，$CE\perp AB$，

$\therefore\angle ACB=60°$，$\angle BEC=90°$，$AE=BE$，

又$\because ED=EC$，

$\therefore\angle D=\angle ECB=30°$，

∴∠*DEC*=120°，

∴∠*DEB*=120°−90°=30°，

∴∠*D*=∠*DEB*=30°，

∴*BD*=*BE*=*AE*，

即 *AE*=*DB*.

（2）

解：当点 *E* 为 *AB* 上任意一点时，如图 2，*AE* 与 *DB* 的大小关系不会改变．理由如下：

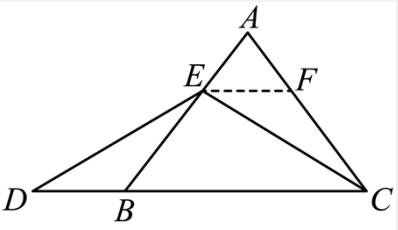


图2

如图 2，过 *E* 作 *EF*∥*BC* 交 *AC* 于 *F*，

∵△*ABC* 是等边三角形，

∴∠*ABC*=∠*ACB*=∠*A*=60°，*AB*=*AC*=*BC*，

∴∠*AEF*=∠*ABC*=60°，∠*AFE*=∠*ACB*=60°，

即∠*AEF*=∠*AFE*=∠*A*=60°，

∴△*AEF* 是等边三角形，

∴*AE*=*EF*=*AF*，

∵∠*ABC*=∠*ACB*=∠*AFE*=60°，

∴∠*DBE*=∠*EFC*=120°，∠*D*+∠*BED*=∠*FCE*+∠*ECD*=60°，

∵*DE*=*EC*，

∴∠*D*=∠*ECD*，

∴∠*BED*=∠*ECF*，

在△*DEB* 和△*ECF* 中，

$$\begin{cases} \angle DEB = \angle ECF \\ \angle DBE = \angle EFC \\ DE = CE \end{cases},$$

∴△*DEB*≌△*ECF*(AAS)，

∴*BD*=*EF*=*AE*，即 *AE*=*BD*，

（3）

解：过点 E 作 $EF \parallel BC$，交 AC 的延长线于点 F，如图 3 所示：

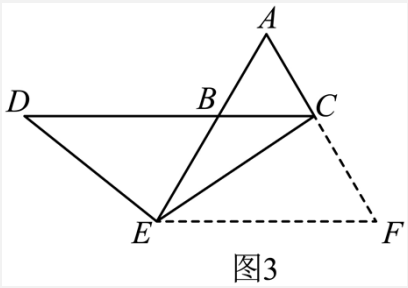


图3

∵△ABC 是等边三角形，

∴$\angle ABC=\angle ACB=\angle A=60°$，$AB=AC=BC$，

∴$\angle AEF=\angle ABC=60°$，$\angle AFE=\angle ACB=60°$，

即$\angle AEF=\angle AFE=\angle A=60°$，

∴△AEF 是等边三角形，

∴$AE=EF=AF=2$，

∵$\angle ABC=\angle ACB=\angle EFC=60°$，

∴$\angle DBE=\angle ABC=\angle EFC=60°$，

∵$DE=EC$，

∴$\angle D=\angle ECD$，

∵$EF \parallel BC$，

∴$\angle ECD=\angle CEF$，

∴$\angle D=\angle CEF$，

在△DEB 和△ECF 中，

$$\begin{cases} \angle D=\angle CEF \\ \angle DBE=\angle EFC \\ DE=CE \end{cases},$$

∴△DEB≌△ECF(AAS)，

∴$DB=EF=2$，

∵$BC=1$，

∴$CD=BC+DB=3$.

【点睛】本题是三角形综合题目，考查了等边三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的性质、平行线的性质等知识，本题综合性强，熟练掌握等边三角形的判定与性质，证明三角形全等是

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/158001136112006112