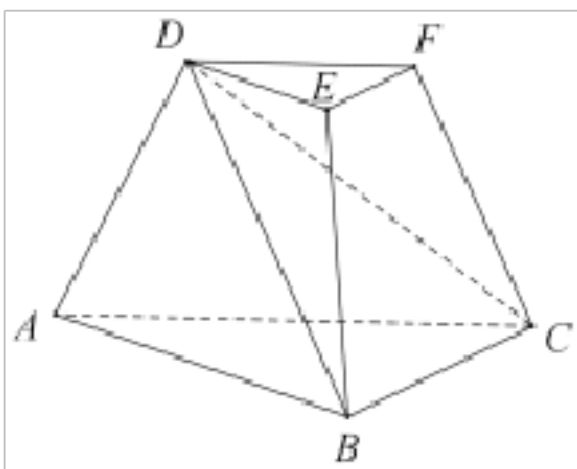


专题 19 立体几何综合

【母题来源一】【2020 年高考浙江卷】已如图，三棱台 $DEF-ABC$ 中，面 $ADFC \perp$ 面 ABC ， $\angle ACB = \angle ACD = 45^\circ$ ， $DC = 2BC$ 。



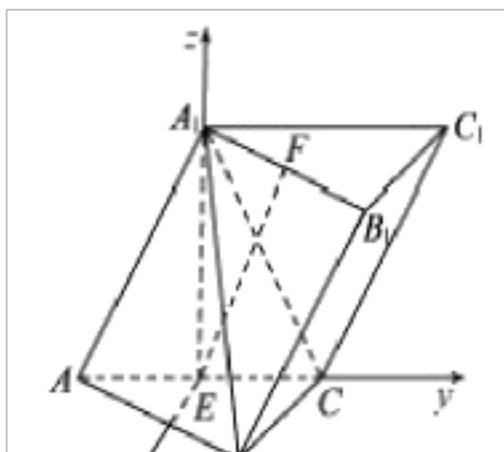
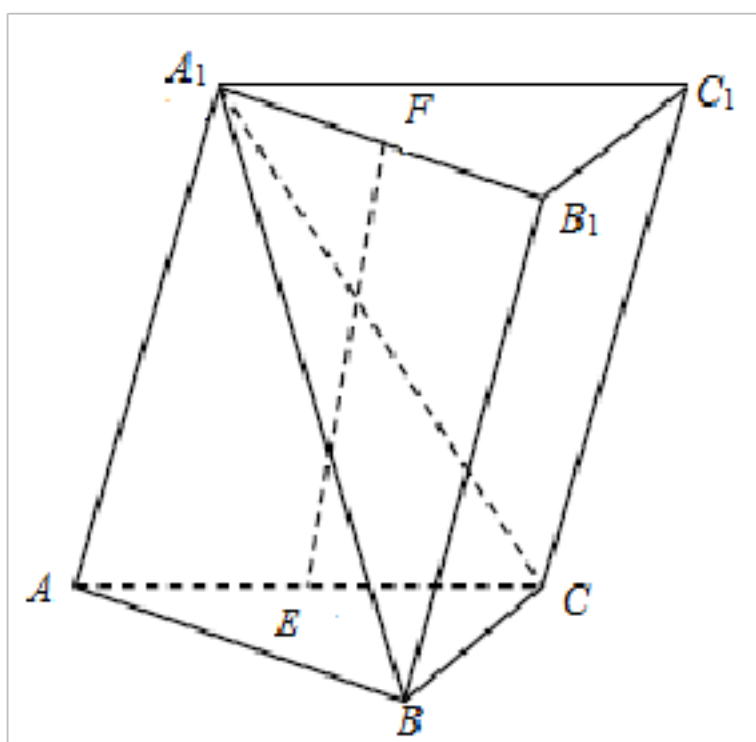
(I) 证明： $EF \perp DB$ ；

(II) 求 DF 与面 DBC 所成角的正弦值。

【母题来源二】【2019 年高考浙江卷】如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ ，平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 ABC ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ， $A_1A = AC = 1$ ， E, F 分别是 AC, A_1B_1 的中点。

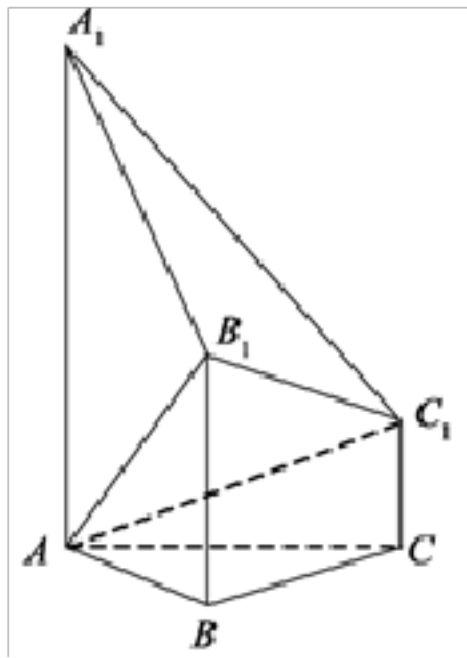
(1) 证明： $EF \perp BC$ ；

(2) 求直线 EF 与平面 A_1BC 所成角的余弦值。



【母题来源三】【2018年浙江卷】如图，已知多面体 $ABCA_1B_1C_1$ ， A_1A ， B_1B ， C_1C 均垂直于平面 ABC ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $A_1A = 4$ ， $C_1C = 1$ ， $AB = BC = B_1B = 2$ 。

- (1) 证明： $AB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ ；
- (2) 求直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角的正弦值。



母题揭秘



【命题意图】

高考对本部分内容的考查以能力为主，重点考查线面关系、面面关系及线面角的求解，考查数形结合的思想，空间想象能力及运算求解能力等。

【命题规律】

高考对该部分内容的考查主要有两种形式：一是利用立体几何的知识证明线面关系、面面关系；二是考查学生利用空间向量解决立体几何的能力，考查空间向量的坐标运算，以及平面的法向量等，难度属于中等偏上，解题时应熟练掌握空间向量的坐标表示和坐标运算，把空间立体几何问题转化为空间向量问题。

【答题模板】

运用空间向量坐标运算求空间角的一般步骤：

- (1) 建立恰当的空间直角坐标系；
- (2) 求出相关点的坐标；
- (3) 写出向量坐标；
- (4) 结合公式进行论证、计算；
- (5) 转化为几何结论。

【方法总结】

1. 直线与平面、平面与平面的平行与垂直的向量判定方法

设直线 l 的方向向量为 $a=(a_1, b_1, c_1)$, 平面 α, β 的法向量分别为 $\mu=(a_2, b_2, c_2), \nu=(a_3, b_3, c_3)$, 则

(1) 线面平行: $l // \alpha \quad a \perp \mu \quad a \cdot \mu = 0 \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$;

(2) 线面垂直: $l \perp \alpha \quad a // \mu \quad a = k\mu \quad a_1 = ka_2, b_1 = kb_2, c_1 = kc_2$;

(3) 面面平行: $\alpha // \beta \quad \mu // \nu \quad \mu = \lambda \nu \quad a_2 = \lambda a_3, b_2 = \lambda b_3, c_2 = \lambda c_3$;

(4) 面面垂直: $\alpha \perp \beta \quad \mu \perp \nu \quad \mu \cdot \nu = 0 \quad a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0$.

注意: 用向量知识证明立体几何问题, 仍然离不开立体几何中的定理. 如要证明线面平行, 只需要证明平面外的一条直线和平面内的一条直线平行, 即化归为证明线线平行, 用向量方法证明直线 $a // b$, 只需证明向量 $a = \lambda b$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) 即可. 若用直线的方向向量与平面的法向量垂直来证明线面平行, 仍需强调直线在平面外.

2. 利用向量求异面直线所成的角

把角的求解转化为向量运算, “转化”是求异面直线所成角的关键, 一般地, 异面直线 AC, BD 的夹角 β

的余弦值为 $\cos \beta = \frac{AC \cdot BD}{|AC| |BD|}$.

注意: 两条异面直线所成的角 α 不一定是两直线的方向向量的夹角 β , 即 $\cos \alpha = |\cos \beta|$.

3. 利用向量求直线与平面所成的角

(1) 分别求出斜线和它所在平面内的射影直线的方向向量, 转化为求两个方向向量的夹角(或其补角);

(2) 通过平面的法向量来求, 即求出斜线的方向向量与平面的法向量所夹的锐角, 取其补角就是斜线和平面所成的角.

注意: 直线和平面所成的角的正弦值等于平面法向量与直线方向向量夹角的余弦值的绝对值, 即注意函数名称的变化. 设直线 l 的方向向量为 $a=(a_1, b_1, c_1)$, 平面 α 的法向量为 $\mu=(a_2, b_2, c_2)$, 直线 l 与平面

α 的夹角为 $(0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\sin \theta = \frac{|a \cdot \mu|}{|a| |\mu|} = |\cos a|$.

4. 用向量解决探索性问题的方法

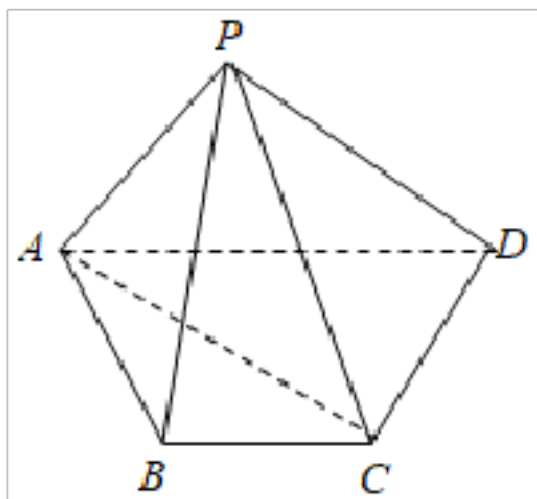
(1) 确定点在线段上的位置时, 通常利用向量共线来求.

(2) 确定点在平面内的位置时, 充分利用平面向量基本定理表示出有关向量的坐标而不是直接设出点的坐标.

(3) 解题时, 把要成立的结论当作条件, 据此列方程或方程组, 把“是否存在”问题转化为“点的坐标是否有解, 是否有规定范围内的解”等, 所以为使问题的解决更简单、有效, 应善于运用这一方法解题.



1. 如图, 四棱锥 $P - ABCD$ 的底面是梯形. $BC \parallel AD$, $AB = BC = CD = 1$, $AD = 2$, $PB = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $PA = PC = \sqrt{3}$

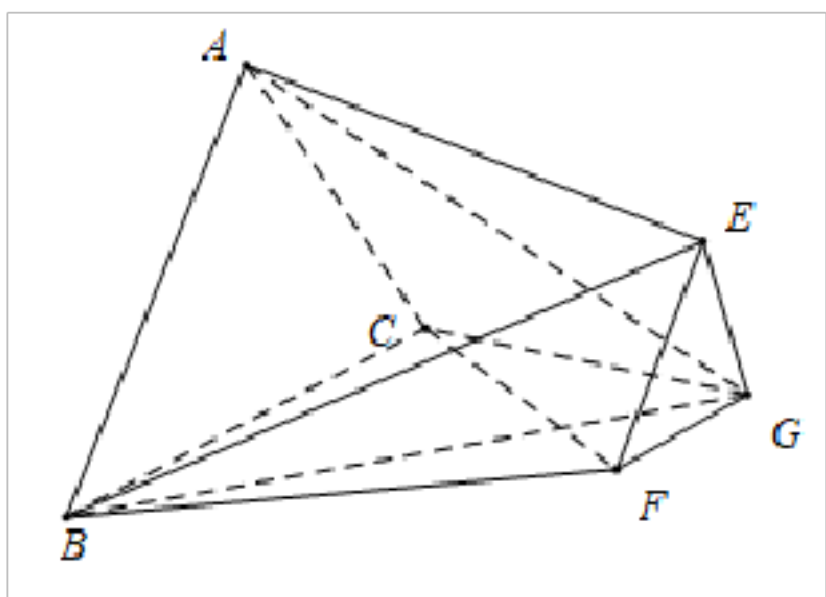


(I) 证明: $AC \perp BP$;

(II) 求直线 AD 与平面 APC 所成角的正弦值.

(2020 届浙江省温州中学高三下学期 3 月高考模拟测试数学试题)

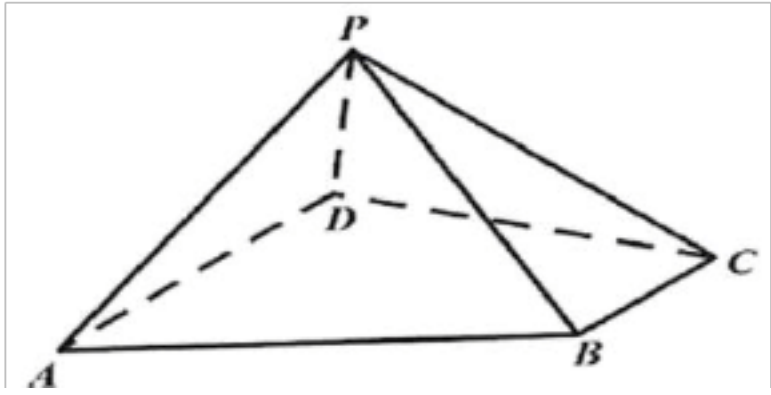
2. (浙江省温州市平阳中学 2020 届高三下学期 3 月高考模拟数学试题) 如图, 三棱台 $ABC - EFG$ 的底面是正三角形, 平面 $ABC \perp$ 平面 $BCGF$, $CB = 2GF$, $BF = CF$.



(1) 求证: $AB \perp CG$;

(2) 若 $BC = CF$, 求直线 AE 与平面 BEG 所成角的正弦值.

3. (浙江省宁波市华茂外国语学校 2020 届高三下学期 3 月高考模拟数学试题) 如图, 四棱锥 $P - ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 平面 $PAD \perp$ 平面 PBC .



(1) 若 $\angle PBC = \frac{\pi}{2}$, 证明: $\angle APB = \frac{\pi}{2}$;

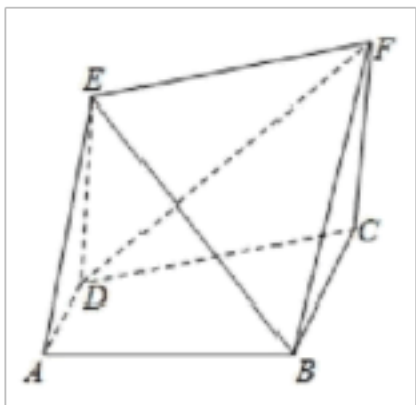
(2) 若 $AD = CD = 2BC = 2$, $\angle BCD = \frac{\pi}{3}$, 且 $PA = PC$, 求 $|PA|$ 的取值范围.

4. (浙江省 2020 届高三下学期 4 月适应性测试数学试题) 在四面体 ABCD 中, 已知 $AC = BC = DC = DA = DB = 2$, $AB = x$.

(1) 当四面体体积最大时, 求 x 的值;

(2) 当 $x = \sqrt{3}$ 时, 设四面体 ABCD 的外接球球心为 O , 求 AO 和平面 BCD 所成角的正弦值.

5. (2020 届浙江省嘉兴市桐乡市高级中学高三下学期 3 月模拟测试数学试题) 如图所示, 直角梯形 ABCD 中, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, $AE \perp AB$, $BC = 2AD = 2$, 四边形 EDCF 为矩形, $CF = \sqrt{3}$.

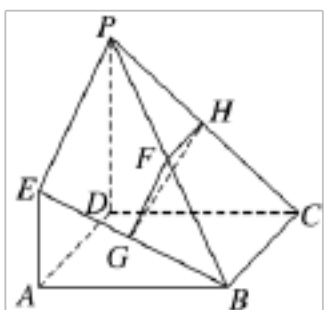


(1) 求证: 平面 ECF \perp 平面 ABCD;

(2) 在线段 DF 上是否存在点 P, 使得直线 BP 与平面 ABE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{10}$, 若存在, 求出线段 BP 的长, 若不存在, 请说明理由.

若不存在, 请说明理由.

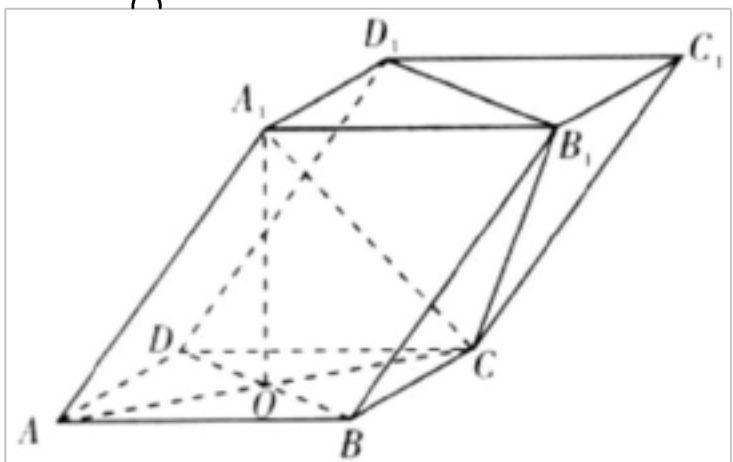
6. 如图, 已知四边形 ABCD 是正方形, $AE \perp$ 平面 ABCD, $PD \parallel AE$, $PD = AD = 2EA = 2$, G, F, H 分别为 BE, BP, PC 的中点.



(1) 求证: 平面 ABE \perp 平面 GHF;

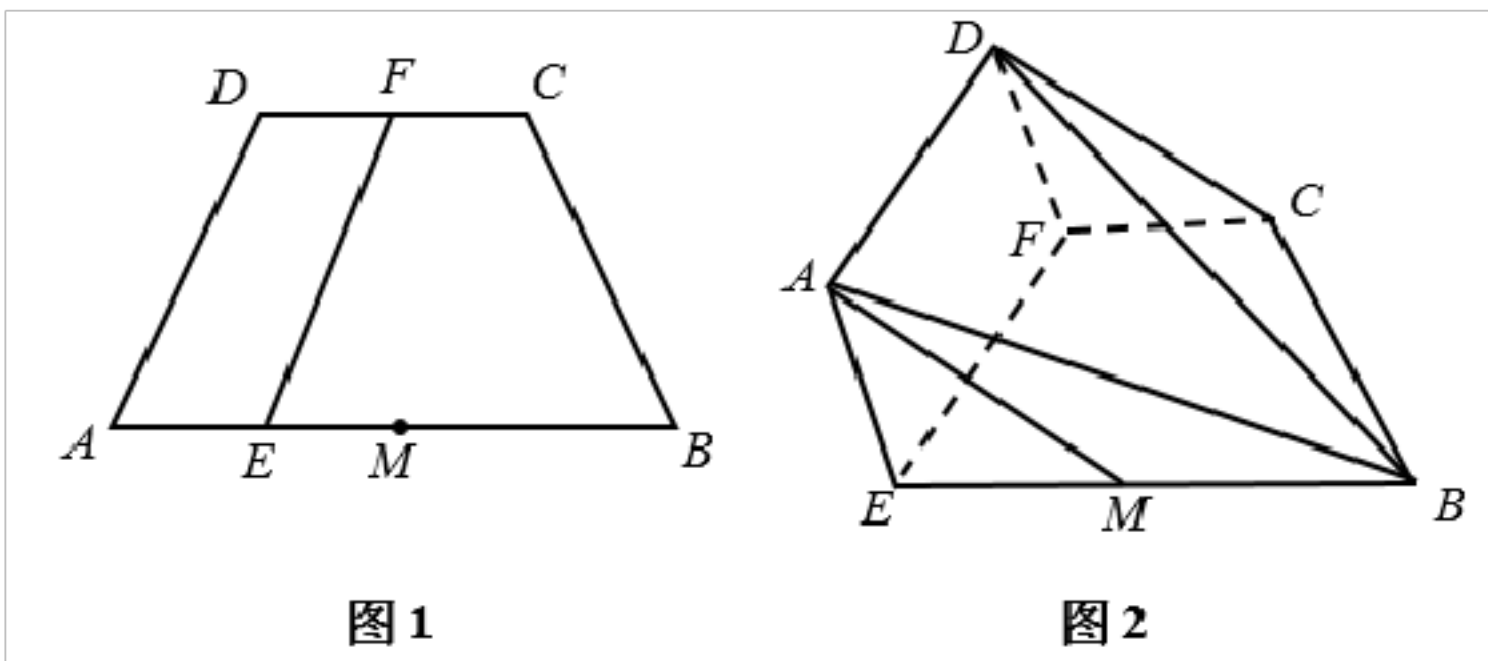
(2) 求直线 GH 与平面 PBC 所成的角 θ 的正弦值.

7. (浙江省 2020 届高三下学期高考压轴卷数学试题) 如图, 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形 $AC \perp BD$, O 为 AC 与 BD 的交点, $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$, $AA_1 = AB = 2$.



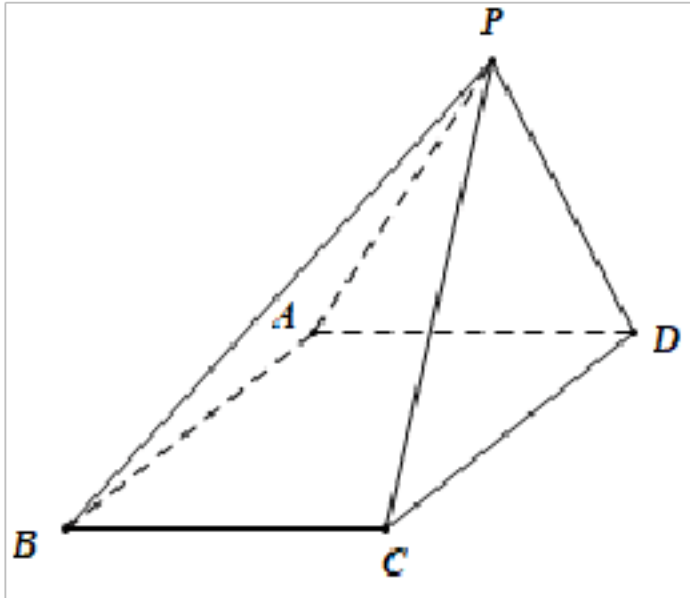
- (1) 求证: 平面 AA_1CO \perp 平面 BB_1D_1D ;
 (2) 若 $\angle BAD = 60^\circ$, 求 OB 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成角的正弦值.

8. (2020 届浙江省衢州二中高三下学期第一次模拟考试数学试题) 已知等腰梯形 $ABCD$ 中 (如图 1), $AB = 4$, $BC = CD = DA = 2$, F 为线段 CD 的中点, E, M 为线段 AB 上的点, $AE = EM = 1$, 现将四边形 $AEDF$ 沿 EF 折起 (如图 2)



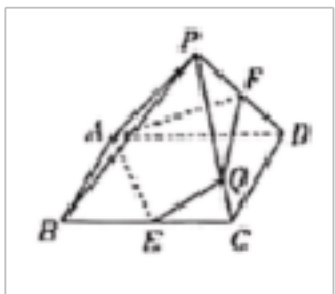
- (1) 求证: $AM \parallel$ 平面 BCD ;
 (2) 在图 2 中, 若 $BD = \sqrt{6}$, 求直线 CD 与平面 $BCFE$ 所成角的正弦值.

9. (浙江省金华市义乌市 2019-2020 学年高三上学期一模试题) 如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, 侧面 PAD 是边长为 2 的正三角形, 底面 $ABCD$ 为菱形, 其中 $\angle BCD = 120^\circ$, $PC = \sqrt{3}$.



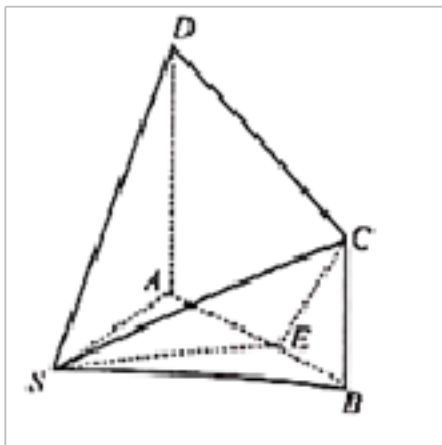
- (1) 证明: $AD \perp PC$;
 (2) 求 AC 与面 PBC 所成角的正弦值.

10. (浙江省百校 2019-2020 学年高三联考数学试题) 如图, 在底面为菱形的四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle PAD$ 为等腰直角三角形, $\angle APD = \frac{\pi}{2}$, $\angle BAD = \frac{2\pi}{3}$, 点 E, F 分别为 BC, PD 的中点, 直线 PC 与平面 AEF 交于点 Q .



- (1) 若平面 $PAB \perp$ 平面 PCD , 求证: $AB \perp AD$.
 (2) 求直线 AQ 与平面 PCD 所成角的正弦值. //

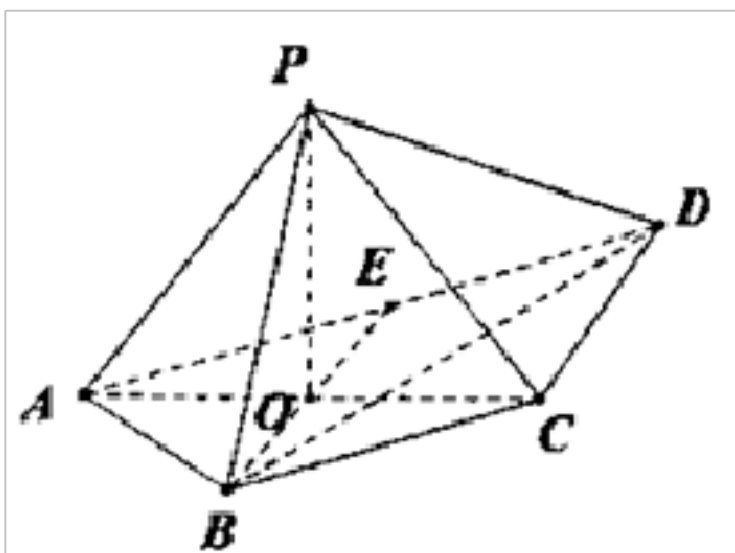
11. (2019 年 10 月浙江省金丽衢十二校零模数学试题) 如图, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, $AD = 2BC = 2\sqrt{3}$, $AB = 3$, $SA = SC$, $AD \parallel BC$, $AD \perp$ 平面 SAB , E 是线段 AB 靠近 B 的三等分点.



- (I) 求证: $CD \perp$ 平面 SCE ;
 (II) 若直线 SB 与平面 SCE 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$, 求 SA 的长.

12. (浙江省金华市东阳中学 2021 届高三(上)第二次暑期检测数学试题) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AP \perp$ 平面 PCD , $AD \parallel BC$, $\angle DAB = \frac{\pi}{2}$, $AP = AB = BC = \frac{1}{2}AD$, E 为 AD 的中点, AC 与 BE 相交于

点O.



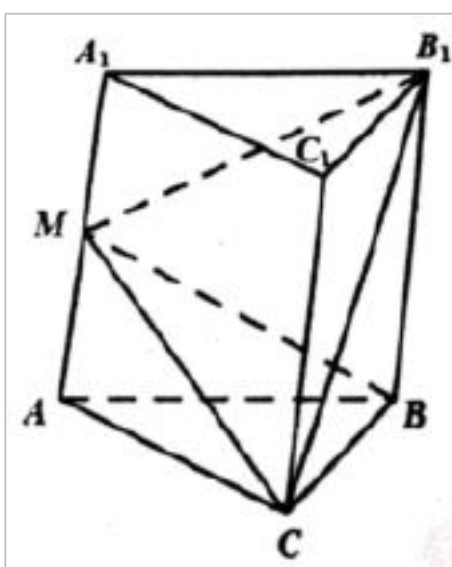
(I) 求证: $PO \perp$ 平面 $ABCD$;

(II) 求直线 AB 与平面 PBD 所成角的正弦值.

13. (浙江省名校联盟 2019-2020 学年高三上学期第一次联考数学试题) 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面

ABC 是等腰三角形, 且 $\angle ABC = 90^\circ$, 侧面 ABB_1A_1 是菱形, $\angle BAA_1 = 60^\circ$, 平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 BAC ,

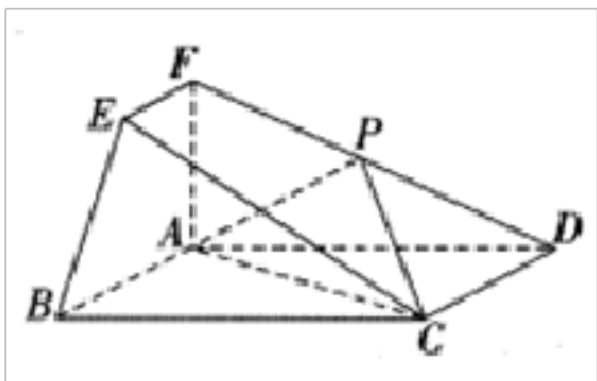
点 M 是 AA_1 的中点.



(1) 求证: $BB_1 \perp CM$;

(2) 求直线 BM 与平面 CB_1M 所成角的正弦值.

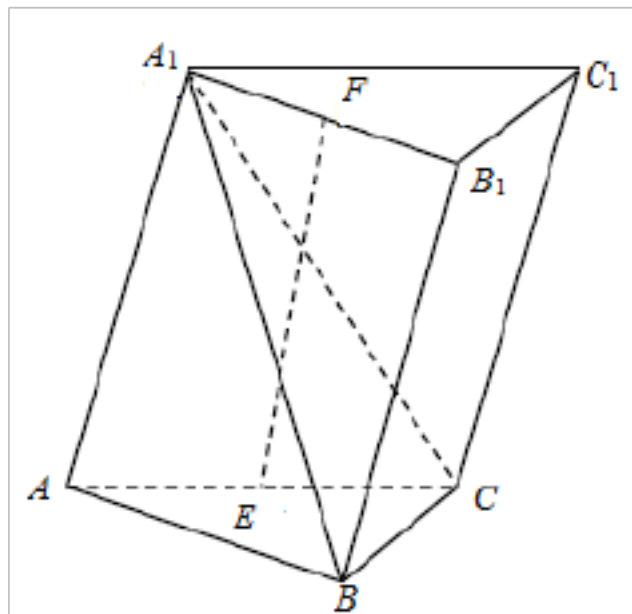
14. (2019 届浙江省杭州市高三教学质量检测数学试题) 如图, 四边形 $ABCD$ 为矩形, 平面 $ABEF \perp$ 平面 $ABCD$, $EF \parallel AB$, $\angle BAF = 90^\circ$, $AD = 2$, $AB = AF = 1$, 点 P 在线段 DF 上.



(1) 求证: $AF \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 若二面角 $D-AP-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 求 PF 的长度.

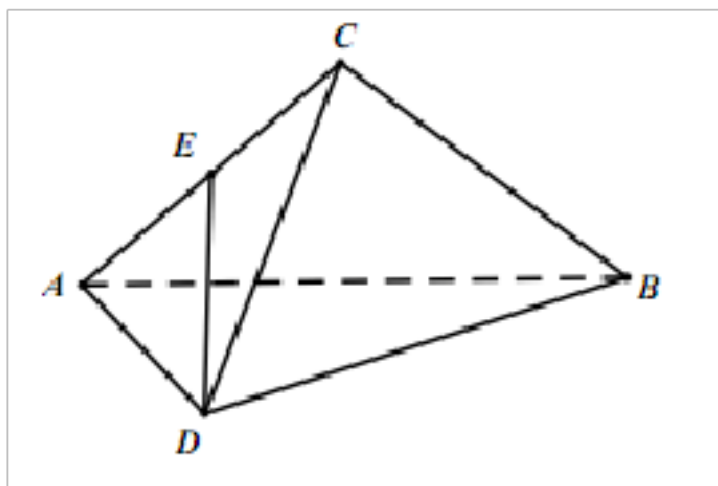
15. (2020 学年浙江省嘉兴市高中教师学科专业知识考试数学试题) 如图, 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 ABC , $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $AA_1 \perp AC$, E, F 分别是 AC, A_1B_1 的中点.



(1) 证明: $EF \perp BC$;

(2) 求直线 EF 与平面 A_1BC 所成角的余弦值.

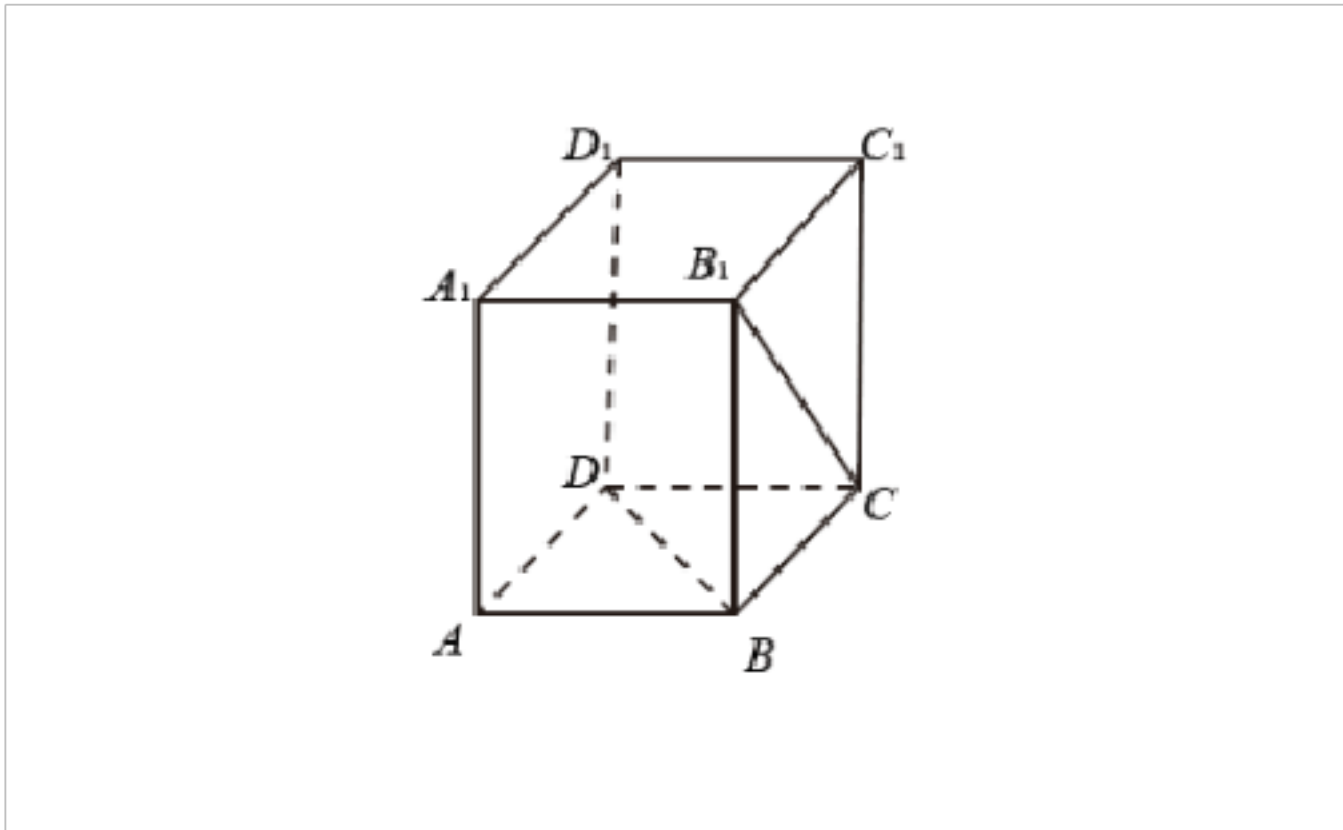
16. 【市级联考】浙江省温州市 2019 届高三 2 月高考适应性测试数学试题) 在三棱锥 $D-ABC$ 中, $AD \perp DC$, $AC \perp CB$, $AB = 2AD = 2DC = 2$, 且平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , E 为 AC 的中点.



(I) 证明: $AD \perp BC$;

(II) 求直线 DE 与平面 ABD 所成的角的正弦值.

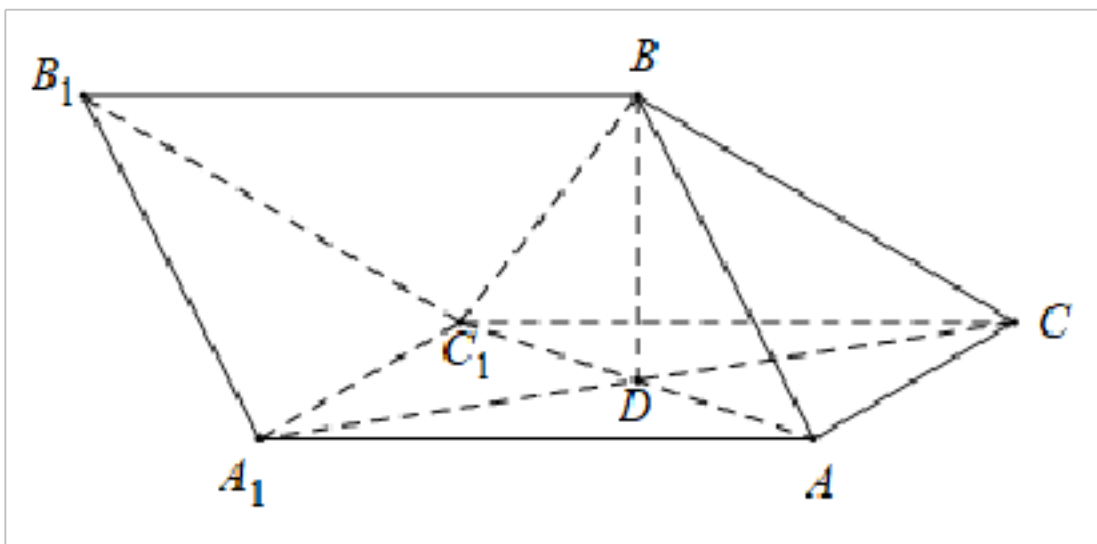
17. (云贵川桂四省 2021 届高三上学期联合考试理科数学试题) 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 其外接球的表面积为 5π .



(1) 求该长方体的表面积;

(2) 求异面直线 BD 与 B_1C 所成角的余弦值.

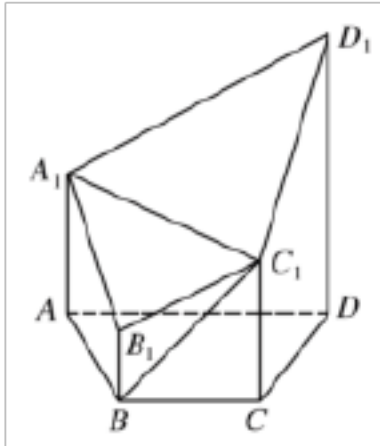
18. (2021 届普通高等学校招生全国统一考试数学考向卷 (七)) 如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC_1$ 是边长为 2 的等边三角形,平面 $ABC_1 \perp$ 平面 A_1AC_1C , 四边形 A_1AC_1C 为菱形, $\angle A_1AC_1 = 60^\circ$, AC_1 与 A_1C 相交于点 D .



(1) 求证: $BD \perp C_1C$.

(2) 求平面 ABC_1 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成锐二面角的余弦值.

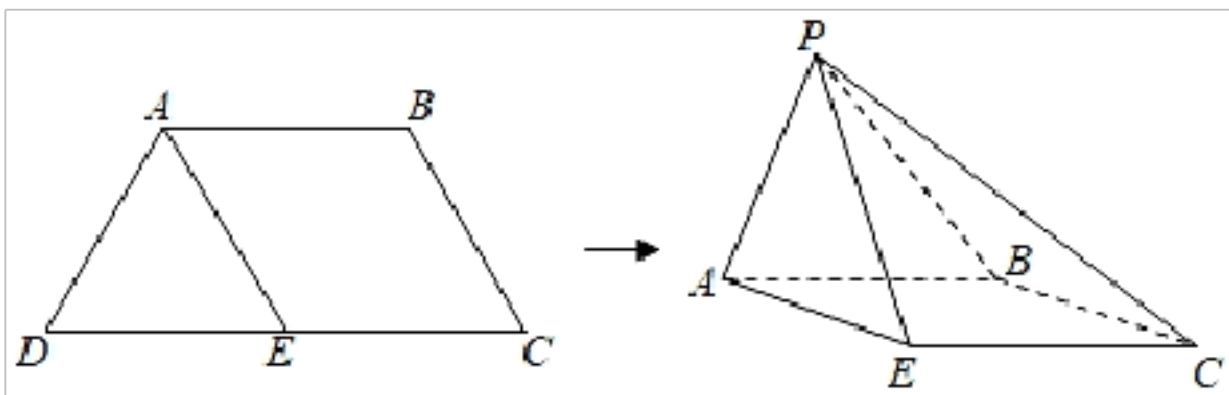
19. (普通高等学校招生全国统一考试 2020-2021 学年高三上学期 数学 (理) 考向卷 (三)) 如图, 已知多面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 均垂直于平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AB \perp BC \perp CD$, $AA_1 = CC_1 = 2, BB_1 = 1, AD = DD_1 = 4$.



(I) 证明: $A_1C_1 \perp$ 平面 CDD_1C_1 ;

(II) 求直线 BC_1 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成角的正弦值.

20. (湘豫名校联考 2020 届高三数学 (理科) 6 月模拟试题) 如图, 等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD = AB = BC = 1$, $CD = 2$, E 为 CD 中点, 以 AE 为折痕把 $\triangle ADE$ 折起, 使点 D 到达点 P 的位置 ($P \perp$ 平面 $ABCE$).



(1) 证明: $AE \perp PB$;

(2) 若直线 PB 与平面 $ABCE$ 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$, 求二面角 $A - PE - C$ 的余弦值.

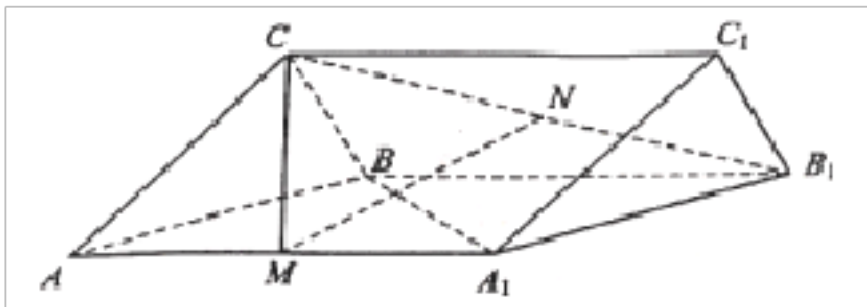
21. (2020 年全国普通高等学校统一招生考试试验检测卷 1 数学 (理科) 试题如图, 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,

底面 ABC 是等边三角形, 侧面 BCC_1B_1 是矩形, $AB = A_1B_1$, N 是 B_1C_1 的中点, M 是棱 AA_1 上的点, 且

$AA_1 \perp CM$.

(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 ABC ;

(2) 若 $AB = A_1B_1$, 求二面角 $A - CM - N$ 的余弦值.



22. (山东省 2020 年普通高等学校招生统一考试数学必刷卷 (四)) 如图, 已知四棱锥 $P - ABCD$ 的底面是梯形, $AB \parallel CD$, $AD = AB$, 且 $AD = CD = 2AB = 4$, $PA = PD = PC = 3$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/158015134056007001>