空间中的平行与垂直(重点)

考点一

[解题必备]

1．经过平面外一点有且只有一个平面与已知平面平行．(唯一性)

2．经过空间一点有且只有一条直线与已知平面垂直．(唯一性)

3．如果一条直线与两个相交平面都平行，那么这条直线必与它们的交线平行．(线∥面⇒线∥线)

[题组通关]

1．已知直线l与平面α相交于点P，则下列结论中不正确的是(　　)

A.α内不存在直线与l平行

B．α内有无数条直线与l垂直

C．α内所有直线与l是异面直线

D．至少存在一个过l且与α垂直的平面

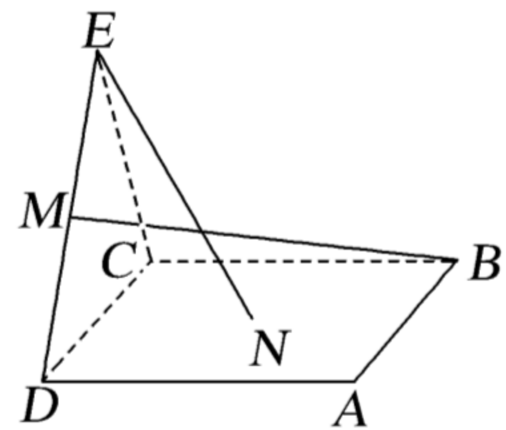
C [直线l与平面α相交于点P，故α内不存在直线与l平行，A对．

若$l\perp\alpha$，则α内的所有直线与l垂直；若l与α不垂直，设与l在平面α内的射影垂直的直线为n，则平面α内与n平行的直线都与l垂直，有无数条，B对．

平面α内过点P的直线与l相交，C错．

若$l\perp\alpha$，则过l的任一平面与α垂直；若l与α不垂直，取l上异于点P的一点Q，过Q作$QM\perp$平面α于点M，则平面$PQM\perp\alpha$，D对．综上所述，选C.]

2.如图，点N为正方形$ABCD$的中心，$\triangle ECD$为正三角形，平面$ECD\perp$平面$ABCD$，M是线段ED的中点，则(　　)



A．$BM=EN$，且直线BM，EN是相交直线

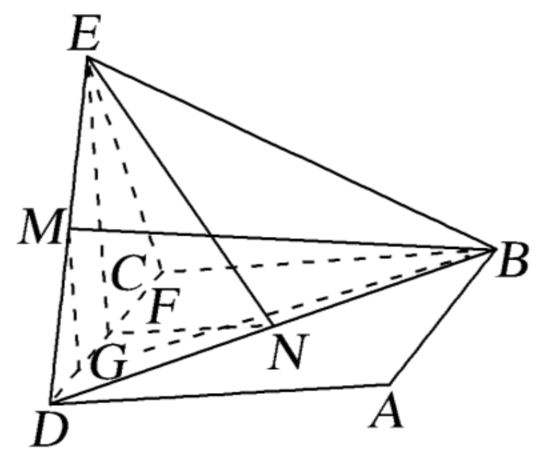
B．$BM\neq EN$，且直线BM，EN是相交直线

C．$BM=EN$，且直线BM，EN是异面直线

D．$BM\neq EN$，且直线BM，EN是异面直线

B [取CD的中点F，DF的中点G，

连接EF，FN，MG，GB，BD，BE.



∵点N为正方形$ABCD$的中心，

∴点N在BD上，且为BD的中点.

∵$\triangle ECD$是正三角形，

∴$EF\perp CD$.∵平面$ECD\perp$平面$ABCD$，

∴$EF\perp$平面$ABCD$.∴$EF\perp FN$.

不妨设$AB=2$，则$FN=1$，$EF=\sqrt{3}$，

∴$EN=\sqrt{FN^2+EF^2}=2$.

∵$EM=MD$，$DG=GF$，∴$MG\parallel EF$，

∴$MG\perp$平面$ABCD$，∴$MG\perp BG$.

$\because MG=\frac{1}{2}EF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$BG=\sqrt{CG^2+BC^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}=\frac{5}{2}$，

$\therefore BM=\sqrt{MG^2+BG^2}=\sqrt{7}$ $.\therefore BM\neq EN.\because BM$，$EN$是$\triangle DBE$的两条中线，$\therefore BM$，$EN$必相交．故选B.]

3．(多选)下列关于点、线、面的位置关系的命题中不正确的是(　　)

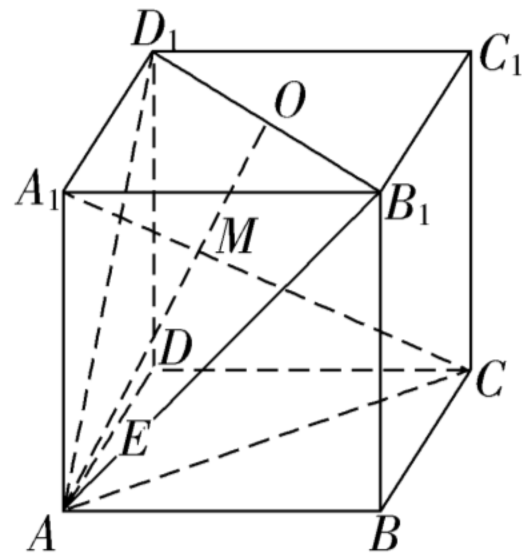
A．若两个平面有三个公共点，则它们一定重合

B．空间中，相交于同一点的三条直线在同一平面内

C．两条直线a，b分别和异面直线c，d都相交，则直线a，b是异面直线

D．正方体$ABCD$ $A_1B_1C_1D_1$中，点O是B_1D_1的中点，直线A_1C交平面AB_1D_1于点M，则A，M，O三点共线，且A，M，O，C四点共面

ABC　[如图，在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，A，D，E三个点在一条直线上，平面$ABCD$与平面ADD_1A_1相交，不重合，故A不正确；从点A出发的三条棱AA_1，AB，AD不在同一平面内，故B不正确；若$a /\!/ b$，则a，b确定一个平面，且a，b分别与直线c，d的交点都在此平面内，则c，d共面，与c，d是异面直线矛盾，所以直线a，b可能是异面直线，也可能是相交直线(c，d中的一条直线过a，b的交点)，故C不正确；平面$AA_1C\cap$平面$AB_1D_1=AO$，因为直线A_1C交平面AB_1D_1于点M，所以$M\in AO$，即A，M，O三点共线，因为A，M，O三点共线，直线和直线外一点可以确定一个平面，所以A，O，C，M四点共面，故D正确．故选ABC.]



练后悟道

判断与空间位置关系有关命题真假的4种方法

(1)借助空间线面平行、面面平行、线面垂直、面面垂直的判定定理和性质定理进行判断；

(2)借助空间几何模型，如从长方体模型、四面体模型等模型中观察线面位置关系，结合有关定理，进行肯定或否定；

(3)借助于反证法，当从正面入手较难时，可利用反证法，推出与题设或公认的结论相矛盾的命题，进而作出判断；

(4)判断空间两条直线是否相交，首先判断两直线是否共面.

考点二

[解题必备]

1．直线、平面平行的判定及其性质

(1)线面平行的判定定理：$a\not\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a /\!/ b\Rightarrow a /\!/ \alpha$.

(2)线面平行的性质定理：$a /\!/ \alpha$，$a\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=b\Rightarrow a /\!/ b$.

(3)面面平行的判定定理：$a\subset\beta$，$b\subset\beta$，$a\cap b=P$，$a /\!/ \alpha$，$b /\!/ \alpha\Rightarrow\alpha /\!/ \beta$.

(4)面面平行的性质定理：$\alpha /\!/ \beta$，$\alpha\cap\gamma=a$，$\beta\cap\gamma=b\Rightarrow a /\!/ b$.

2．直线、平面垂直的判定及其性质

(1)线面垂直的判定定理：$m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m\cap n=P$，$l\perp m$，$l\perp n\Rightarrow l\perp\alpha$.

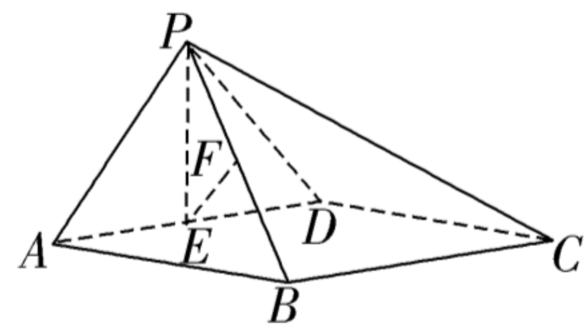
(2)线面垂直的性质定理：$a\perp\alpha$，$b\perp\alpha\Rightarrow a/\!/b$.

(3)面面垂直的判定定理：$a\subset\beta$，$a\perp\alpha\Rightarrow\alpha\perp\beta$.

(4)面面垂直的性质定理：$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$a\subset\alpha$，$a\perp l\Rightarrow a\perp\beta$.

[典题研磨]

[例1]　如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$PA\perp PD$，$PA=PD$，E，F分别为AD，PB的中点．



(1)求证：$PE\perp BC$；

(2)求证：平面$PAB\perp$平面PCD；

(3)求证：$EF\parallel$平面PCD.

[证明]　(1)因为 $PA=PD$，且 E 为 AD 的中点，

所以 $PE\perp AD$.因为底面 $ABCD$ 为矩形，

所以 $BC\parallel AD$，所以 $PE\perp BC$.

(2)因为底面 $ABCD$ 为矩形，所以 $AB\perp AD$，

因为平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，

又平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$.

所以 $AB\perp$平面 PAD，

所以 $AB\perp PD$.又 $PA\perp PD$，$PA\cap AB=A$，PA，$AB\subset$平面 PAB，

所以 $PD\perp$平面 PAB，又 $PD\subset$平面 PCD，

所以平面 $PAB\perp$平面 PCD.