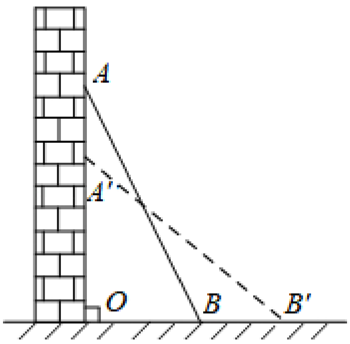
专题16 勾股定理的应用十二种类型

类型一 求梯子的滑动高度

1．如图所示，一架梯子AB斜靠在墙面上，且AB的长为2.5米．

（1）若梯子底端离墙角的距离OB为1.5米，求这个梯子的顶端A距地面有多高？

（2）在（1）的条件下，如果梯子的顶端A下滑0.5米到点A'，那么梯子的底端B在水平方向滑动的距离BB'为多少米？



【答案】（1）梯子距离地面的高度为2米；（2）梯子的底端水平后移了0.5米．

【解析】

【分析】

（1）利用勾股定理可以得出梯子的顶端距离地面的高度．

（2）由（1）可以得出梯子的初始高度，下滑0.5米后，可得出梯子的顶端距离地面的高度，再次使用勾股定理，可以得出，梯子底端水平方向上滑行的距离．

【详解】

解：（1）根据勾股定理：

所以梯子距离地面的高度为：$AO=\sqrt{AB^2-OB^2}=2$米；

（2）梯子下滑了0.5米即梯子距离地面的高度为OA′＝（2.5﹣0.5）＝2米，

根据勾股定理：OB′＝2米，

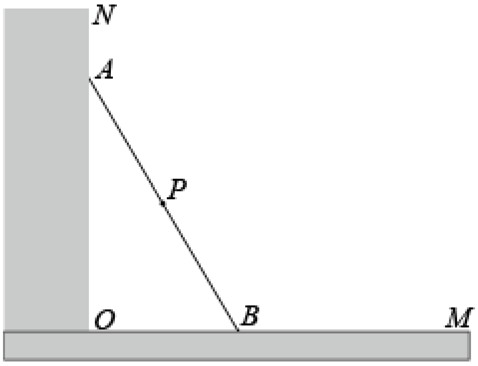
所以当梯子的顶端下滑0.5米时，梯子的底端水平后移了2﹣1.5＝0.5米，

答：当梯子的顶端下滑0.5米时，梯子的底端水平后移了0.5米．

【点睛】

本题考查正确运用勾股定理．善于观察题目的信息是解题以及学好数学的关键．

2．如图所示，一根长2.5米的木棍（AB），斜靠在与地面（OM）垂直的墙（ON）上，此时OB的距离为0.7米，设木棍的中点为P．若木棍A端沿墙下滑，且B端沿地面向右滑行．



（1）如果木棍的顶端 A 沿墙下滑 0.4 米，那么木棍的底端 B 向外移动多少距离？

（2）请判断木棍滑动的过程中，点 P 到点 O 的距离是否变化，并简述理由．

【答案】(1）0.8m；(2)不变.

【解析】

【分析】

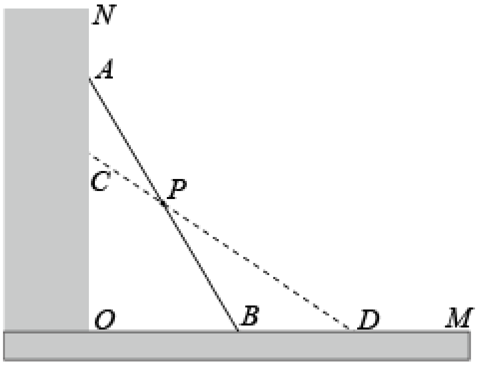
（1）在直角三角形 ABC 中，已知 AB，BC 根据勾股定理即可求 AO 的长度，根据 $AO=AC+OC$ 即可求得 OC 的长度，在直角三角形 CDO 中，已知 $AB=CD$，CO 即可求得 OD 的长度，根据 $BD=OD-OB$ 即可求得 BD 的长度．

（2）木棍滑动的过程中，点 P 到点 O 的距离不会变化．根据在直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半即可判断．

【详解】

解：（1）在直角△ABC 中，已知 AB=2.5m，BO=0.7m，

则 $AO=\sqrt{2.5^2-0.7^2}=2.4m$，



∵$AO=AC+OC$，

∴OC=2m，

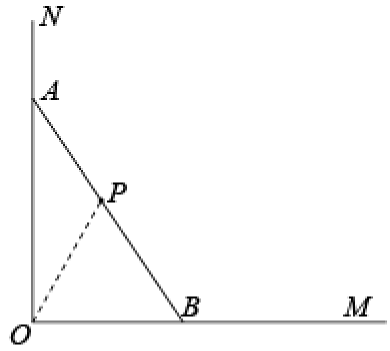
∵直角三角形 CDO 中，$AB=CD$，且 CD 为斜边，

∴$OD=\sqrt{CD^2-OC^2}$=1.5m，

∴$BD=OD-OB$=1.5m-0.7m=0.8m；

（2）不变.

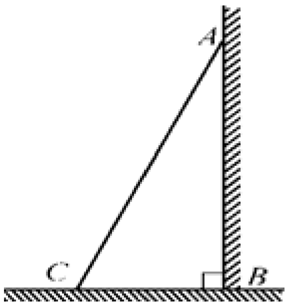
理由：在直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半，因为斜边 AB 不变，所以斜边上的中线 OP 不变.



【点睛】

考点：勾股定理的应用

3．将长为 2.5 米的梯子 AC 斜靠在墙上，梯子的底部离墙的底端 1.5 米（即图中 BC 的长）.



（1）求梯子的顶端与地面的距离；

（2）若梯子顶端 A 下滑 1.3 米，那么梯子底端 C 向左移动了多少米？

【答案】（1）2；（2）0.9

【解析】

【详解】

试题分析：在 Rt△三角形的特点根据勾股定理可以求解.

试题解析：（1）AB＝$\sqrt{AC^2-BC^2}$ ＝$\sqrt{2.5^2-1.5^2}$ ＝2；

（2）设点 A 下滑到点 A'，点 C 移动到点 C'，

则 $A'B$ ＝2－1.3＝0.7，

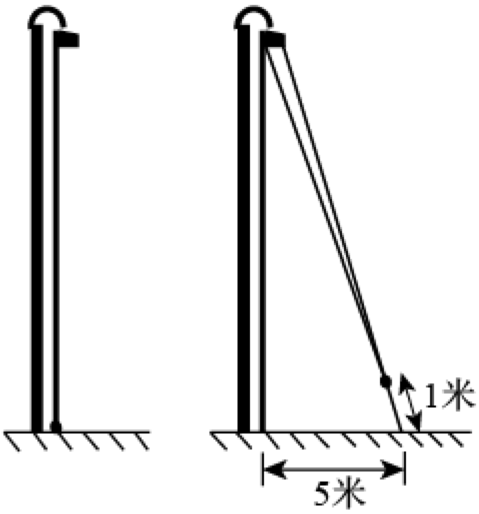
BC' ＝$\sqrt{2.5^2-0.7^2}$ ＝2.4，

CC' ＝0.9

考点：勾股定理

类型二　求旗杆高度

4．学完勾股定理之后，同学们想利用升旗的绳子、卷尺，测算出学校旗杆的高度．爱动脑筋的小明这样设计了一个方案：将升旗的绳子拉到旗杆底端，并在绳子上打了一个结，然后将绳子拉到离旗杆底端 5 米处，发现此时绳子底端距离打结处约 1 米．请你设法帮小明算出旗杆的高度．



【答案】12 米.

【解析】

【分析】

设旗杆长为 x 米，则绳长为（x+1）米，根据勾股定理即可列方程求解.

【详解】

设旗杆长为 x 米，则绳长为（x+1）米，则由勾股定理可得：

$5^2+x^2=(x+1)^2$，

解得 x=12，

答：旗杆的高度为 12 米.

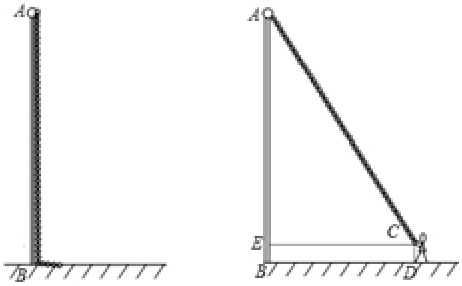
【点睛】

本题考查了勾股定理的应用，解答本题的关键是读懂题意，找准等量关系，正确列出方程，再求解.

5．小明是一名升旗手，面对高高的旗杆，他想出了好几种方法测量方法，学过直角三角形后，他只用一把卷尺就测出了旗杆 AB 的高度．下面是他测量的过程和数据：

第一步：测得从旗杆顶端垂直挂下来的升旗用的绳子比旗杆长 1m（如图 1），

第二步：拉着绳子的下端往后退，当他将绳子拉直时，测得此时拉绳子的手到地面的距离 CD 为 1m，到旗杆的距离 CE 为 8m，（如图 2）．他很快算出了旗杆的高度，请你也来试一试．



【答案】解: 勾股定理，设旗杆的高度为 x 米，则绳子长为（x+1）米，

在 Rt△ACE 中，AC=x 米，AE=（x-1）米，CE=8 米，

由勾股定理可得，$(x-1)^2+8^2=(x+1)^2$，

解得：x=16．

【解析】

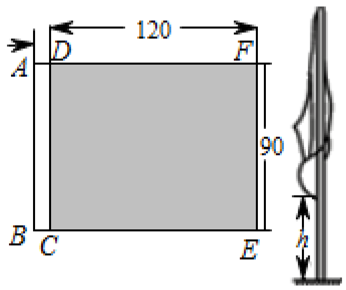
【详解】

试题分析：根据图形标出的长度，可以知道 AB 和 CC 的长度差值是 1，以及 CD=1，CE=8，从而构造直角三角形，根据勾股定理就可求出旗杆的高度．

考点：勾股定理的应用

点评: 此题主要考查了勾股定理的应用，表示出 AE 与 AC 长度利用勾股定理求出，善于挖掘题目的隐含信息是解决本题的关键．

6．如图是一面长方形彩旗完全展平时的尺寸图(单位：cm)．其中长方形 ABCD 是由双层白布缝制的穿旗杆用的旗裤，阴影部分 DCEF 为长方形绸缎旗面，将穿好彩旗的旗杆垂直插在操场上，旗杆从旗顶到地面的高度为 220cm.在无风的天气里，彩旗自然下垂．求彩旗下垂时最低处离地面的最小高度 h.



【答案】70cm

【解析】

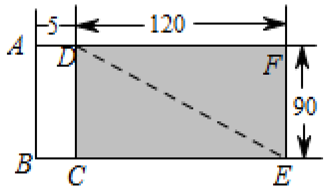
【详解】

试题分析: 首先观察题目，作辅助线构造一个直角三角形，如图，连接 DE; 已知彩旗为长方形，由题意可知，无风的天气里，彩旗自然下垂时，彩旗最低处到旗杆顶部的长度正好是长方形彩旗完全展开时的对角线的长度，根据勾股定理可求出它的长度; 然后用旗杆顶部到地面高度减去这个数值，

即可求得答案.

试题解析:

解：彩旗自然下垂的长度就是长方形 $DCEF$ 的对角线 DE 的长度，连接 DE，



在 Rt△DEF 中，根据勾股定理，得

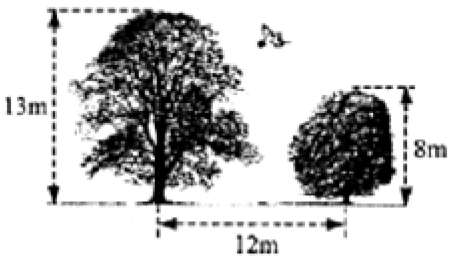
$DE=\sqrt{DF^2+EF^2}=\sqrt{120^2+90^2}=150.$

$h=220-150=70$(cm).

∴彩旗下垂时的最低处离地面的最小高度 h 为 70 cm.

类型三　求小鸟飞行距离

7．如图，有一只小鸟在一棵高 13m 的大树树梢上捉虫子，它的伙伴在离该树 12m，高 8m 的一棵小树树梢上发出友好的叫声，它立刻以 2m/s 的速度飞向小树树梢，它最短要飞多远？这只小鸟至少几秒才可能到达小树和伙伴在一起？



【答案】6.5s.

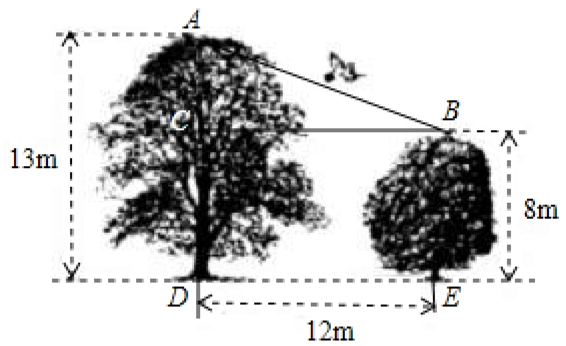
【解析】

【详解】

试题分析：过 B 作 $BC\perp AD$，垂足为点 C，利用勾股定理求出斜边的值是 13m，也就是两树树梢之间的最短距离是 13m，进而可求得最短时间.

试题解析：

解：过 B 作 $BC\perp AD$，垂足为点 C，如图所示：



根据题意，得

AC＝AD－BE＝13－8＝5m，BC＝12m．

根据勾股定理，得

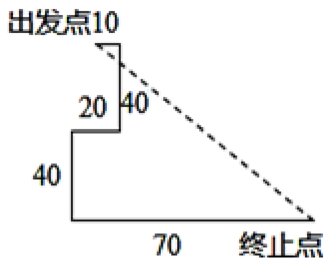
AB＝$\sqrt{AC^2+BC^2}$＝13m．

则小鸟所用的时间是 13÷2＝6.5（s）．

答：这只小鸟最短要飞 13m，至少 6.5 秒才可能到达小树和伙伴在一起．

点睛：此题主要考查勾股定理的运用．关键是构造直角三角形，同时注意：时间＝路程÷速度．

8．如图，某校科技创新兴趣小组用他们设计的机器人，在平坦的操场上进行走展示.输入指令后，机器人从出发点 *A* 先向东走 10 米，又向南走 40 米，再向西走 20 米，又向南走 40 米，再向东走 70 米到达终止点 *B*.求终止点 *B* 与原出发点 *A* 的距离 *AB*.



【答案】终止点与原出发点的距离 *AB*=100（米）

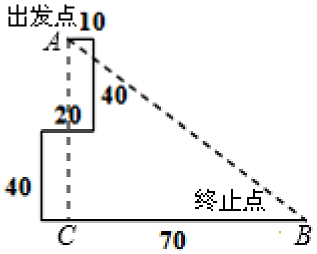
【解析】

【分析】

根据小明在操场上只向南和向东行走，而且两个方向垂直，分别求出其实际向南所走路程和实际向东所走路程，利用勾股定理求得其终止点与原出发点之间的距离即可．

【详解】

解：如图所示：过点 *A* 作 *AC*⊥*CB* 于 *C*，



则在 $Rt\triangle ABC$ 中，AC＝40＋40＝80 米，BC＝70－20＋10＝60 米，

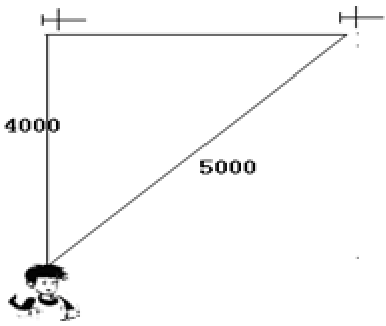
∴终止点与原出发点的距离 AB＝$\sqrt{60^2+80^2}$ ＝100（米）.

答：小明到达的终止点与原出发点的距离为 100 米.

【点睛】

本题考查了勾股定理的应用，解题的关键是正确的求出实际向南和向东所走的路程，构造出直角三角形利用勾股定理求解.

9．如图，飞机在空中水平飞行，某一时刻刚好飞到一男孩子头顶上方 4000 米处，过了 20 秒，飞机距离这个男孩头顶 5000 米.飞机每小时飞行多少千米？



【答案】150m/s

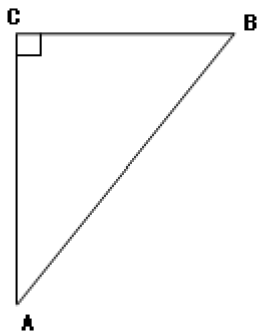
【解析】

【分析】

先由勾股定理求得 BC 的长，即可根据路程、速度、时间的关系求得结果.

【详解】

如图，



由题意得，AC=4000 米，∠C=90°，AB=5000 米，由勾股定理得 BC=$\sqrt{5000^2-4000^2}=3000$（米），

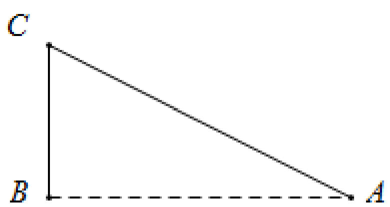
所以飞机飞行的速度为$\dfrac{3}{\dfrac{20}{3600}}=540$（千米/小时）

【点睛】

本题考查的是勾股定理的应用.

类型四　求大树折断前的高度

10．如图，一棵竖直生长的竹子高为 8 米，一阵强风将竹子从 C 处吹折，竹子的顶端 A 刚好触地，且与竹子底端的距离 AB 是 4 米．求竹子折断处与根部的距离 CB．



【答案】3 米

【解析】

【分析】

竹子折断后刚好构成一直角三角形，设竹子折断处离地面的高度是 x 米，则斜边为（8﹣x）米．利用勾股定理解题即可．

【详解】

解：由题意知 $BC+AC=8$，$\angle CBA=90°$，

∴设 BC 长为 x 米，则 AC 长为（$8-x$）米，

∴在 Rt△CBA 中，有 $BC^2+AB^2=AC^2$，

即：$x^2+16=(8-x)^2$，

解得：$x=3$，

∴竹子折断处 C 与根部的距离 CB 为 3 米．

【点睛】

此题考查了勾股定理的应用，解题的关键是利用题目信息构造直角三角形，从而运用勾股定理解题.

11．《九章算术》中有“折竹抵地”问题：今有竹高一丈，末折抵地，去根七尺，问折高者几何？意思是：一根竹子，原高一丈（一丈＝10 尺），一阵风将竹子折断，其竹稍恰好抵地，抵地处距竹子底端 7 尺远，问折断处离地面的高度是多少尺？

【答案】2.55 尺.

【解析】

【分析】

竹子折断后刚好构成一直角三角形，设竹子折断处离地面 x 尺，则斜边为（10﹣x）尺，利用勾股定理解题即可.

【详解】

解：设竹子折断处离地面 x 尺，则斜边为（10﹣x）尺，

根据勾股定理得：$x^2+7^2=(10-x)^2$,

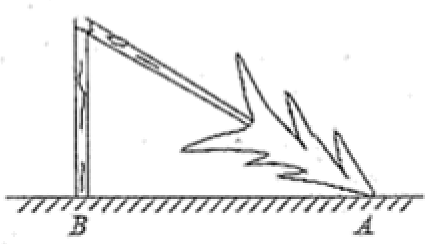
解得：$x=2.55$，

∴折断处离地面的高度为 2.55 尺.

【点睛】

此题考查勾股定理的实际应用，正确理解题意构建直角三角形利用勾股定理求解是解题的关键.

12．如图，一棵大树在一次强台风中在距地面 $5m$ 处折断，倒下后树顶端着地点 A 距树底端 B 的距离为 $12m$，则这棵大树在折断前的高度为多少？



【答案】18m.

【解析】

【分析】

根据大树的折断部分与未断部分、地面恰好构成直角三角形，再根据勾股定理求出 AC 的长，进而可得答案.

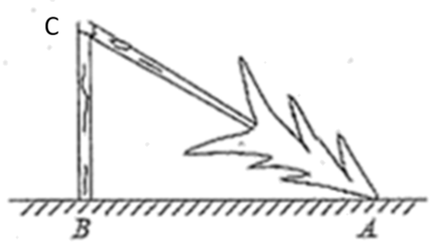
【详解】

解：∵树的折断部分与未断部分、地面恰好构成直角三角形，且 BC=5m，AB=12m，

∴ $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13m$

∴这棵树原来的高度= $BC+AC=5+13=18m$

答：这棵大树在折断前的高度为 18m.

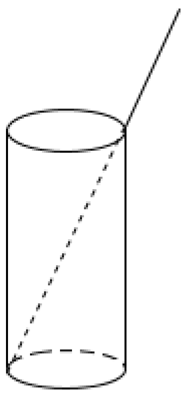


【点睛】

本题考查的是勾股定理的实际应用，能够用勾股定理解答实际问题是解题的关键.

类型五　解决水杯中筷子的问题

13．如图是一种盛饮料的圆柱形玻璃杯，测得玻璃杯内部底面半径为 2.5 cm，高为 12 cm，吸管按图中所示的方式放进杯里，露在杯口外面的吸管长 4.6 cm 则吸管有多长?



【答案】吸管长 17.6 cm.

【解析】

【分析】

根据勾股定理计算出吸管在杯内部分的长度，再计算得出结果．

【详解】

解：设吸管在杯内部分的长为 x cm，

由勾股定理得：$x=\sqrt{12^2+\left(2.5\times 2\right)^2}=13$，

∴13+4.6=17.6(cm)，

答：吸管长 17.6 cm．

【点睛】

本题考查了勾股定理，熟练掌握勾股定理是解题的关键．

14．一根 70cm 的木棒，要放在长、宽、高分别是 50cm,40cm,30cm 的长方体木箱中，能放进去吗？（提示：长方体的高垂直于底面的任何一条直线．）

【答案】能放进去．

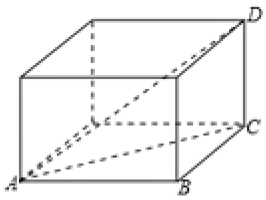
【解析】

【分析】

根据题意，画出图形，然后连接 AC，AD，在 $Rt\triangle ABC$ 中，利用勾股定理求出 AC 的长，在 $Rt\triangle ACD$ 中，利用勾股定理求出 AD，然后与木棒的长度进行比较，即可求解．

【详解】

解：根据题意，画出图形，如下图：



根据题意得：AB=50cm，BC=40cm，CD=30cm，连接 AC，AD，

在 $Rt\triangle ABC$ 中，由勾股定理得：

$AC^2=AB^2+BC^2=50^2+40^2=4100$，

在 $Rt\triangle ACD$ 中，由勾股定理得：

$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{4100+30^2}=\sqrt{5000}=50\sqrt{2}>70$，

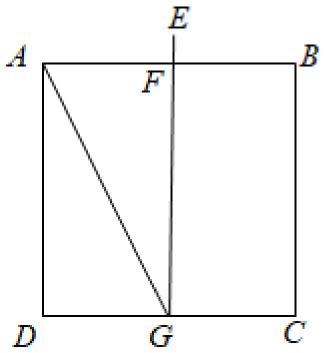
∴木棒能放进去．

【点睛】

本题主要考查了勾股定理的应用，利用勾股定理求出 AD 的长是解题的关键．

15．《九章算术》中“勾股”一章有记载：今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺．引葭赴岸，水面

是一个边长为10尺的正方形，在水池正中央有一根芦苇，它的顶端恰好到达池边的水面，求芦苇的长度.（1丈=10尺）



解决下列问题：

（1）示意图中，线段 AF 的长为_____尺，线段 EF 的长为_____尺；

（2）求芦苇的长度.

【答案】（1）5，1；（2）芦苇长13尺.

【解析】

【分析】

（1）直接利用水池正中央有一根芦苇，它高出水面1尺，且边长为10尺的正方形，F 为 AB 中点，即可得出答案；

（2）根据题意，可知 AB 的长为10尺，则 AF=5尺，设芦苇长 $EG=AG=x$ 尺，表示出水深 FG，根据勾股定理建立方程，求出的方程的解即可得到芦苇的长和水深.

【详解】

解：（1）由题意可得：EF=1尺，$AF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 10=5$ 尺；

故答案为：5，1；

（2）设芦苇长 $EG=AG=x$ 尺，

则水深 $FG=(x-1)$ 尺，

在 $Rt\triangle AGF$ 中，

$5^2+(x-1)^2=x^2$，

解得：$x=13$，

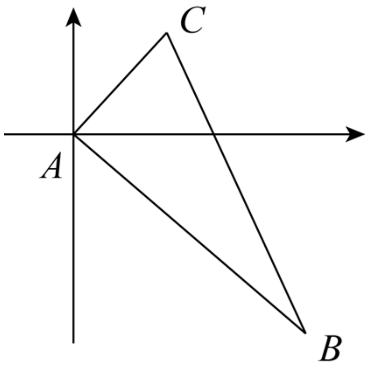
∴芦苇长13尺.

【点睛】

此题主要考查了勾股定理的应用，解本题的关键是数形结合以及表示出直角三角形的各边长.

类型六　解决航海问题

16．如图，甲乙两船从港口A同时出发，甲船以15海里/时速度向北偏东40°航行，乙船向南偏东50°航行，4小时后，甲船到达C岛，乙船到达B岛，若C、B两岛相距100海里，问乙船的航速是多少？



【答案】20海里/时

【解析】

【分析】

通过两船的航线角度可知，∠CAB=90°，则三角形ABC为直角三角形，可以通过勾股定理计算出AB的长度，然后求乙船的速度.

【详解】

解：通过两船的航线角度可知，∠CAB=90°，则△ABC为直角三角形，又AC为甲船航行的路程，则AC=15×4=60（海里），

由$AB^2=BC^2-AC^2$，可知：

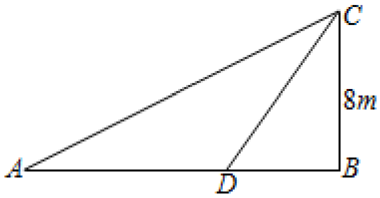
$AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{100^2-60^2}=80$（海里），

所以乙船的航速为80÷4=20（海里/时）.

【点睛】

本题考察了方位角的判断，构造出直角三角形，运用勾股定理解题，解题的关键是需要清楚勾股定理是指，直角三角形中两个直角边的平方和等于斜边的平方.

17．位于沈阳周边的红河峡谷漂流项目深受欢迎，在景区游船放置区，工作人员把偏离的游船从点A拉回点B的位置（如图）．在离水面高度为8m的岸上点C，工作人员用绳子拉船移动，开始时绳子AC的长为17m，工作人员以0.7米/秒的速度拉绳子，经过10秒后游船移动到点D的位置，问此时游船移动的距离AD的长是多少？



【答案】游船移动的距离 AD 的长是 9 米

【解析】

【分析】

根据条件先计算经过10秒拉回绳子的长，然后计算出绳子 CD 的长，在 $Rt\triangle BCD$ 中 $BD=\sqrt{CD^2-BC^2}$，

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{AC^2-BC^2}$，即可求出最终结果.

【详解】

解：∵工作人员以 0.7 米/秒的速度拉绳子，

∴经过 10 秒拉回绳子$10\times0.7=7$米，

∵开始时绳子 AC 的长为 17m，

∴拉了 10 秒后，绳子 CD 的长为 17-7=10 米，

∴在 $Rt\triangle BCD$ 中，

$BD=\sqrt{CD^2-BC^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$米，

∵在 $Rt\triangle ABC$ 中，

$AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{17^2-8^2}=15$米，

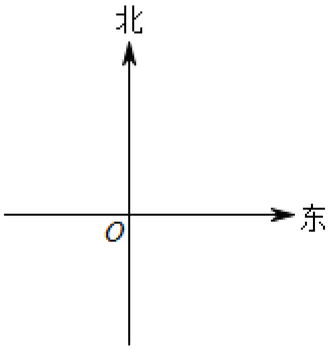
∴AD=15-6=9 米，

答：游船移动的距离 AD 的长是 9 米.

【点睛】

本题主要考查勾股定理的运用，属于综合题，难度一般，熟练掌握勾股定理解三角形是解决本题的关键.

18．一艘轮船以 30 千米/时的速度离开港口，向东南方向航行，另一艘轮船同时离开港口，以 40 千米/时的速度航行，它们离开港口一个半小时后相距 75 千米，求第二艘船的航行方向.



【答案】第二艘船的航行方向为东北或西南方向

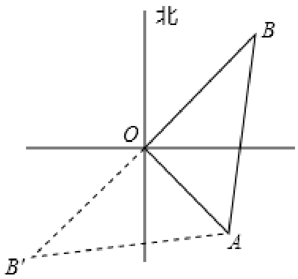
【解析】

【分析】

根据路程=速度×时间分别求得 OA、OB 的长，再进一步根据勾股定理的逆定理可以证明三角形 OAB 是直角三角形，从而求解.

【详解】

解：如图，



根据题意，得

$OA=30\times1.5=45$（千米），$OB=40\times1.5=60$（千米），$AB=75$ 千米.

$\because 45^2+60^2=75^2$，

$\therefore OA^2+OB^2=AB^2$，$\therefore \angle AOB=90°$

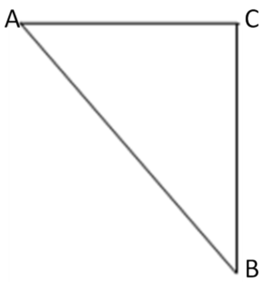
∴第二艘船的航行方向为东北或西南方向.

【点睛】

此题考查了勾股定理的逆定理：如果三角形的三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形就是直角三角形．根据条件得出第二艘船的航行方向与第一艘船的航行方向成 90°是解题的关键.

类型七　求河宽

19．为修建高速铁路需凿通隧道 AC，测得∠A=50°，∠B=40°，AB=15km，BC=12km，若每天凿隧道 0.3km，问几天才能把隧道凿通?



【答案】需要 30 天才能把隧道 AC 凿通

【解析】

【分析】

由题意得∠C 为 90°，在直角△ABC 中，已知 AB，BC 根据勾股定理即可求 AC，则需要天数为

$AC \div 0.3$.

【详解】

$\because \angle BAC = 50^\circ$， $\angle B = 40^\circ$，

$\therefore \angle C = 90^\circ$

∴由勾股定理，得

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$，

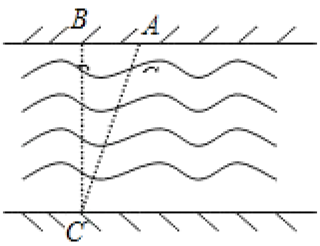
$\therefore 9 \div 0.3 = 30$(天).

答：需要 30 天才能把隧道 AC 凿通.

【点睛】

本题主要考查了勾股定理的应用，正确的记忆勾股定理并确定好斜边与直角边是解决问题的关键.

20．如图，某人欲横渡一条河，由于水流的影响，实际上岸地点 A 偏离欲到达地点 B 相距 50 米，结果他在水中实际游的路程比河的宽度多 10 米，求该河的宽度 BC 为多少米？



【答案】该河的宽度 BC 为 120 米

【解析】

【分析】

根据题意可知△ABC 为直角三角形，根据勾股定理就可求出直角边 BC 的距离.

【详解】

根据题意可知 AB＝50 米，AC＝BC+10 米，

设 BC＝x，由勾股定理得 $AC^2＝AB^2+BC^2$，

即（x+10）^{2}＝50^2+x^2，解得 x＝120．

答：该河的宽度 BC 为 120 米．

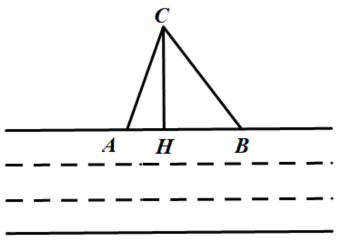
【点睛】

此题考查勾股定理的实际应用，根据题意构建直角三角形及三边的数量关系是解题的关键．

21．笔直的河流一侧有一旅游地 C，河边有两个漂流点 A，B．其中 $AB＝AC$，由于某种原因，由 C 到 A 的路现在已经不通，为方便游客决定在河边新建一个漂流点 H（A，H，B 在一条直线上），并新修一条路 CH 测得 $BC＝5$ 千米，$CH＝4$ 千米，$BH＝3$ 千米，

（1）问 CH 是否为从旅游地 C 到河的最近的路线？请通过计算加以说明；

（2）求原来路线 AC 的长．



【答案】（1）CH 是从旅游地 C 到河的最近的路线，见解析；（2）$\frac{25}{6}$千米

【解析】

【分析】

（1）根据勾股定理的逆定理解答即可；

（2）根据勾股定理解答即可．

【详解】

解：（1）是，理由如下：

在△CHB 中，

∵CH^2+BH^2＝（2.4）^{2}＋（1.8）^{2}＝ BC^2＝25，

∴$CH \perp AB$，

所以 CH 是从村庄 C 到河边的最近路．

（2）设 AC＝x，

在 Rt△ACH 中，由已知得 $AC＝x$，$AH＝x－3$，$CH＝4$，

由勾股定理得：$AC^2＝AH^2＋CH^2$，