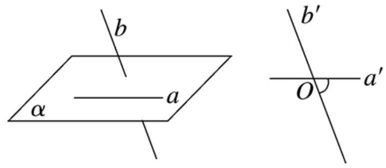
8.6　几何法求空间角

【考试要求】以空间几何体为载体考查空间角是高考命题的重点．理解异面直线所成角、直线和平面所成角和二面角的定义，并会求值．

【学问梳理】

1．异面直线所成的角



(1)定义：已知两条异面直线 a，b，经过空间任一点 O 分别作直线 $a'\parallel a$，$b'\parallel b$，把直线 a' 与 b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a 与 b 所成的角(或夹角)．

(2)范围：$\left(0，\dfrac{\pi}{2}\right]$.

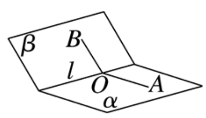
2．直线和平面所成的角

(1)定义：平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角，一条直线垂直于平面，则它们所成的角是 $90°$；一条直线和平面平行或在平面内，则它们所成的角是 $0°$．

(2)范围：$\left[0，\dfrac{\pi}{2}\right]$.

3．二面角

(1)定义：从一条直线动身的两个半平面所组成的图形叫做二面角．



(2)二面角的平面角

若有①$O\in l$；

②$OA\subset\alpha$，$OB\subset\beta$；

③$OA\perp l$，$OB\perp l$，则二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角是$\angle AOB$.

(3)二面角的平面角 α 的范围：$[0，\pi]$．

【思索辨析】

推断下列结论是否正确(请在括号中打“√”或“×”)

(1)若直线 l_1，l_2 与同一个平面所成的角相等，则 $l_1\parallel l_2$.(　×　)

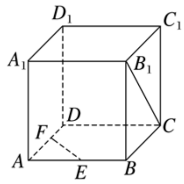
(2)异面直线所成角的范围为$\left[0，\dfrac{\pi}{2}\right]$.(　×　)

(3)假如平面 α∥平面 α_1，平面 β∥平面 β_1，那么平面 α 与平面 β 所成的二面角和平面 α_1 与平面 β_1所成的二面角相等或互补．(　√　)

(4)线面角的范围为$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，二面角的范围为$[0,\pi]$．(　√　)

【教材题改编】

1.如图所示，在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$中，E，F分别是AB，AD的中点，则异面直线B_1C与EF所成角的大小为(　　)



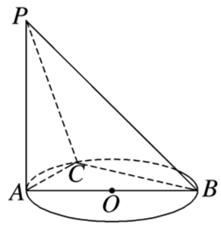
A．30°　　　　B．45°

C．60°　　　　D．90°

答案　C

解析　连接B_1D_1，D_1C(图略)，则B_1D_1∥EF，故$\angle D_1B_1C$即为所求的角或其补角．又$B_1D_1=B_1C=D_1C$，∴$\triangle B_1D_1C$为等边三角形，∴$\angle D_1B_1C=60°$．

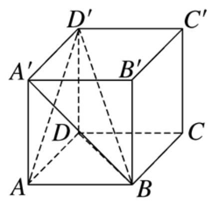
2.如图所示，AB是⊙O的直径，$PA\perp$⊙O所在的平面，C是圆上一点，且$\angle ABC=30°$，$PA=AB$，则直线PC和平面ABC所成角的正切值为________.



答案　2

解析　因为$PA\perp$平面ABC,所以AC为斜线PC在平面ABC上的射影,所以$\angle PCA$即为PC和平面ABC所成的角．在$Rt\triangle PAC$中，因为$AC=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}PA$，所以$\tan\angle PCA=\dfrac{PA}{AC}=2$.

3.如图，在正方体$ABCD—A'B'C'D'$中：



①二面角$D'—AB—D$的大小为________.

②二面角$A'—AB—D$的大小为________.

答案　①45°　②90°

解析　①在正方体$ABCD—A'B'C'D'$中，$AB\perp$平面$ADD'A'$，所以$AB\perp AD'$，$AB\perp AD$，因此$\angle D'AD$为二面角$D'—AB—D$的平面角．在$Rt\triangle D'DA$中，$\angle D'AD=45°$，所以二面角$D'—AB—D$的大小为45°．

②因为$AB\perp$平面$ADD'A'$，所以$AB\perp AD$，$AB\perp AA'$，因此$\angle A'AD$为二面角$A'—AB—D$的平面角，又$\angle A'AD=90°$，所以二面角$A'—AB—D$的大小为90°．

题型一　异面直线所成的角

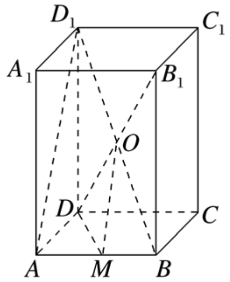
例1　(1)在长方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，$AB=BC=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，则异面直线AD_1与DB_1所成角的余弦值为(　　)

A.$\dfrac{1}{5}$　　　　B.$\dfrac{\sqrt{5}}{6}$

C. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　　　　　　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

答案　C

解析　如图，连接 BD_1，交 DB_1 于 O，取 AB 的中点 M，连接 DM，OM. 易知 O 为 BD_1 的中点，所以 $AD_1 // OM$，则 $\angle MOD$ 为异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角或其补角．因为在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，



$AD_1=\sqrt{AD^2+DD_1^2}=2$，

$DM=\sqrt{AD^2+\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

$DB_1=\sqrt{AB^2+AD^2+BB_1^2}=\sqrt{5}$.

所以 $OM=\dfrac{1}{2}AD_1=1$，$OD=\dfrac{1}{2}DB_1=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

于是在 $\triangle DMO$ 中，由余弦定理，

得 $\cos\angle MOD=\dfrac{1^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2\times1\times\frac{\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

即异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

延长探究　若将本例(1)中题干条件“$AA_1=\sqrt{3}$”变为“异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{9}{10}$”．试求 AA_1 的值．

解　设 $AA_1=t$，$\because AB=BC=1$，

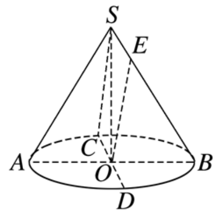
$\therefore A_1C_1=\sqrt{2}$，$A_1B=BC_1=\sqrt{t^2+1}$.

$\therefore \cos\angle A_1BC_1=\dfrac{A_1B^2+BC_1^2-A_1C_1^2}{2\times A_1B\times BC_1}$

$=\dfrac{t^2+1+t^2+1-2}{2\times\sqrt{t^2+1}\times\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{9}{10}$，

解得 $t=3$，则 $AA_1=3$.

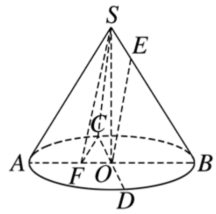
(2)(2024·衡水检测)如图，在圆锥 SO 中，AB，CD 为底面圆的两条直径，$AB\cap CD=O$，且 $AB\perp CD$，$SO=OB=3$，$SE=\dfrac{1}{4}SB$，则异面直线 SC 与 OE 所成角的正切值为(　　)



A.$\dfrac{\sqrt{22}}{2}$　B.$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　C.$\dfrac{13}{16}$　D.$\dfrac{\sqrt{11}}{3}$

答案　D

解析　如图，过点 S 作 $SF\parallel OE$，交 AB 于点 F，连接 CF，则$\angle CSF$(或其补角)为异面直线 SC 与 OE 所成的角．



$\because SE=\dfrac{1}{4}SB$，$\therefore SE=\dfrac{1}{3}BE$.

又 $OB=3$，$\therefore OF=\dfrac{1}{3}OB=1$.

$\because SO\perp OC$，$SO=OC=3$，

$\therefore SC=3\sqrt{2}$.

$\because SO\perp OF$，$\therefore SF=\sqrt{SO^2+OF^2}=\sqrt{10}$.

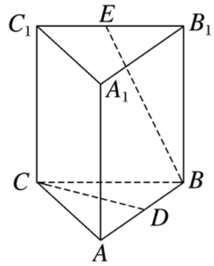
$\because OC\perp OF$，$\therefore CF=\sqrt{10}$.

$\therefore$在等腰$\triangle SCF$中，

$$\tan\angle CSF=\frac{\sqrt{(\sqrt{10})^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{11}}{3}.$$

【备选】

(2024·郑州模拟)如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC=4$，$AC\perp BC$，$CC_1=5$，D，E 分别是 AB，B_1C_1 的中点，则异面直线 BE 与 CD 所成的角的余弦值为(　　)

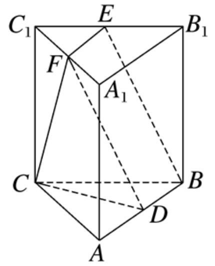


A.$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B.$\dfrac{1}{3}$

C. $\dfrac{\sqrt{58}}{29}$ D. $\dfrac{3\sqrt{87}}{29}$

答案 C

解析 如图，取 A_1C_1 的中点 F，连接 DF，EF，CF.



易知 EF 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中位线，

所以 $EF/\!/A_1B_1$ 且 $EF=\dfrac{1}{2}A_1B_1$.

又 $AB/\!/A_1B_1$ 且 $AB=A_1B_1$，D 为 AB 的中点，

所以 $BD/\!/A_1B_1$ 且 $BD=\dfrac{1}{2}A_1B_1$，

所以 $EF/\!/BD$ 且 $EF=BD$.

所以四边形 $BDFE$ 是平行四边形，

所以 $DF/\!/BE$，

所以 $\angle CDF$ 就是异面直线 BE 与 CD 所成的角或其补角.

因为 $AC=BC=4$，$AC\perp BC$，$CC_1=5$，D，E，F 分别是 AB，B_1C_1，A_1C_1 的中点，

所以 $C_1F=\dfrac{1}{2}A_1C_1=2$，

$B_1E=\dfrac{1}{2}B_1C_1=2$ 且 $CD\perp AB$.

由勾股定理得 $AB=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，

所以 $CD=\dfrac{AC\cdot BC}{AB}=\dfrac{4\times 4}{4\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

由勾股定理得 $CF=\sqrt{29}$，$DF=BE=\sqrt{29}$.

在 $\triangle CDF$ 中，由余弦定理得

$\cos\angle CDF=\dfrac{(\sqrt{29})^2+(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{29})^2}{2\times\sqrt{29}\times 2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{58}}{29}$.

思维升华 求异面直线所成的角的三个步骤

(1)一作：依据定义作平行线，作出异面直线所成的角.

(2)二证：证明作出的角是异面直线所成的角或其补角.

(3)三求：解三角形，求出所作的角.

跟踪训练1 (1)(2024·全国乙卷)在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为 B_1D_1 的中点，则直线 PB 与 AD_1 所成的角为(　　)