

四川省德阳市 2023-2024 学年高三下学期“三诊”考试（理科）

数学试题

学校：_____ 姓名：_____ 班级：_____ 考号：_____

一、单选题

1. 已知集合 $A = \{x | 1 < x < 2024\}$, $B = \{x | x < a\}$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(2024, +\infty)$ B. $[2024, +\infty)$ C. $(-\infty, 2024]$ D. $(-\infty, 2024)$

2. 欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 把自然对数的底数 e , 虚数单位 i , $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 联系在一起, 充分体现了数学的和谐美, 被誉为“数学中的天桥”, 若复数 z 满足 $(e^{i\pi} + i) \cdot z = 1 + i$, 则正确的是 ()

- A. z 的共轭复数为 $-i$ B. z 的实部为 1
C. z 的虚部为 i D. z 的模为 1

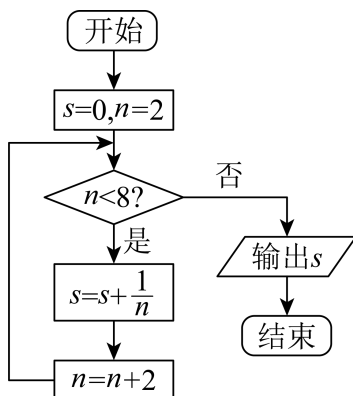
3. 在 $(2+x)(1+x)^6$ 的展开式中 x^3 的系数是 ()

- A. 30 B. 35 C. 55 D. 60

4. 已知函数 $f(x) = \sin x + \cos x$, 且 $f'(x_0) = \frac{1}{2}f(x_0)$, 则 $\tan 2x_0$ 的值是 ()

- A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{4}{3}$

5. 执行下面的程序框图, 输出的 $s =$ ()



- A. $\frac{11}{12}$ B. $\frac{25}{24}$
C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

6. 已知向量 $\overrightarrow{OA} = (1, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (1, 1)$, O 为坐标原点, 动点 $P(x, y)$ 满足约束条件 $\begin{cases} 0 \leq \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} \leq 1 \\ 0 \leq \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} \leq 2 \end{cases}$,

则 $z = x - 2y$ 的最大值为 ()

- A. -2 B. 2 C. -3 D. 3

7. 2023 年 7 月 28 日至 8 月 8 日, 第 31 届世界夏季大学生运动会在成都市举行, 组委会将 5 名大学生分配到 A, B, C 三个路口进行引导工作, 每个路口至少分配一人, 每人只能去一个路口. 若甲、乙要求去同一个路口, 则不同的分配方案共有 ()

- A. 18 种 B. 24 种 C. 36 种 D. 48 种

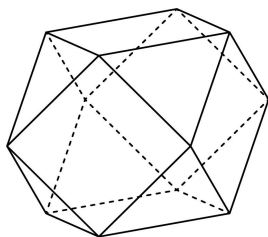
8. α, β, γ 为不同的平面, m, n, l 为不同的直线, 则 $m \perp \beta$ 的一个充分条件是

- A. $n \perp \alpha, n \perp \beta, m \perp \alpha$ B. $\alpha \cap \gamma = m, \alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$
 C. $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma, m \perp \alpha$ D. $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = l, m \perp l$

9. 如今我国物流行业蓬勃发展, 极大地促进了社会经济发展和资源整合. 已知某类果蔬的保鲜时间 y (单位: 小时) 与储藏温度 x (单位: $^{\circ}\text{C}$) 满足函数关系. $y = e^{ax+b}$ (a, b 为常数), 若该果蔬在 7°C 的保鲜时间为 288 小时, 在 21°C 的保鲜时间为 32 小时, 且该果蔬所需物流时间为 4 天, 则物流过程中果蔬的储藏温度 (假设物流过程中恒温) 最高不能超过 ()

- A. 14°C B. 15°C C. 13°C D. 16°C

10. “阿基米德多面体”也称半正多面体, 是由边数不全相同的正多边形围成的多面体, 它体现了数学的对称美. 如图是以正方体的各条棱的中点为顶点的多面体, 这是一个有八个面为正三角形, 六个面为正正方形的“阿基米德多面体”, 若该多面体的棱长为 $\sqrt{2}$, 则该多面体外接球的表面积为 ()



- A. 8π B. 4π
 C. 2π D. $\frac{4}{3}\pi$

11. 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点, O 是坐标原点, 点 P 是 C 上异于实轴端点的任意一点, 若 $|PF_1| \cdot |PF_2| - |OP|^2 = 2a^2$, 则 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 3 D. 2

12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbb{R} ，且 $(x-2)[f'(x)-f(x)] > 0$ ，

$f(4-x) = f(x)e^{4-2x}$ ，则不等式 $e^3 f(\ln x) < xf(3)$ 的解集是 ()

- A. $(0, e^3)$ B. $(1, e^3)$ C. (e, e^3) D. $(e^3, +\infty)$

二、填空题

13. 已知函数 $f(x) = \cos(x+\theta)$ 是奇函数，则 θ 的最小正值为_____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ；已知 $C = \frac{\pi}{3}$ ，若向量

$\vec{m} = (c-4, a-b)$, $\vec{n} = (a-b, c+4)$ 满足 $\vec{m} \perp \vec{n}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

15. 已知两点 $M(-1, 0), N(1, 0)$ ，若直线 $x-y+m=0$ 上存在唯一点 P 满足 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$ ，则实数 m 的值为_____.

16. 已知 F 为抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点，过点 F 的直线 l 与抛物线 C 相交于不同的两点 A 、

B ，若抛物线 C 在 A 、 B 两点处的切线相交于点 P ，则 $|PF|^2 + \frac{4}{|AB|}$ 的最小值为_____.

三、解答题

17. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列， $\{b_n\}$ 是等比数列，且 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $2a_1 = b_1 = 2, a_5 = 5(a_4 - a_3)$ ，

在① $b_3 = 4(b_4 - b_3)$ ，② $b_{n+1} = S_n + 2$ 这两个条件中任选其中一个，完成下面问题的解答.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 设数列 $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n ，是否存在 $m, n \in \mathbb{N}^*$ ，使得 $T_n = a_m$ 若存在，求出所有满足题

意的 m, n ；若不存在，请说明理由.

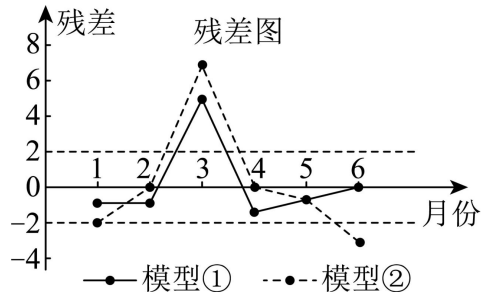
18. 某公司为了确定下季度的前期广告投入计划，收集并整理了近 6 个月广告投入量 x (单位：

万元) 和收益 y (单位：万元) 的数据如表 (其中有些数据污损不清)：

月份	1	2	3	4	5	6
广告投入量	2		7	8	10	

收益		20	30	34	37	
----	--	----	----	----	----	--

他们分别用两种模型① $y = bx + a$, ② $y = ae^{bx}$ 进行拟合, 得到相应的回归方程并进行残差分析, 得到如图所示的残差图及一些统计量的值.



(1) 根据残差图, 比较模型①, ②的拟合效果, 应选择哪个模型?

(2) 残差绝对值大于 2 的数据被认为是异常数据, 需要剔除.

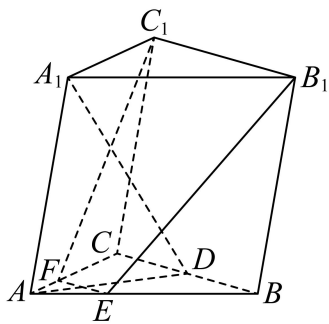
(i) 剔除异常数据后, 求出 (1) 中所选模型的回归方程;

(ii) 若广告投入量 $x=19$, 则 (1) 中所选模型收益的预报值是多少万元?(精确到 0.01)

附: 对于一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 其回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率和截距的最小二

乘估计分别为:
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

19. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 底面 ABC 是等边三角形, $\angle A_1AB = \angle A_1AC$, D 为 BC 的中点, 过 B_1C_1 的平面交棱 AB 于 E , 交 AC 于 F .



(1) 求证: 平面 $A_1AD \perp$ 平面 EB_1C_1F ;

(2) 若 $\triangle A_1AD$ 是等边三角形, $AB = 4$, 求二面角 $D - AA_1 - C$ 的正弦值.

20. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 其左右焦点分别为 F_1, F_2 , 下顶点为

A , 右顶点为 B , $\triangle ABF_1$ 的面积为 $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设不过原点 O 的直线交 C 于 M 、 N 两点, 且直线 OM, MN, ON 的斜率依次成等比数列, 求 $\triangle MON$ 面积的取值范围.

21. 设函数 $f(x) = e^{ax} + \cos x$, $g(x) = \sin x + 2$.

(1) 试研究 $F(x) = \frac{1}{6}x^3 - x + g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的极值点;

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$, 求实数 a 的取值范围.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} + 2 \\ y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$
 直线 l 的方程为

$x - y - 1 = 0$. 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的极坐标方程;

(2) 点 P 的极坐标为 $(1, \frac{3\pi}{2})$, 设直线 l 与曲线 C 的交点为 A 、 B 两点, 若线段 AB 的中点为 D , 求线段 PD 的长.

23. 已知 a 、 b 、 c 、 d 均为正数, 且 $ad = bc$.

(1) 证明: 若 $a + d > b + c$, 则 $|a - d| > |b - c|$;

(2) 若 $t\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{a^4 + c^4} + \sqrt{b^4 + d^4}$, 求实数 t 的取值范围.

参考答案:

1. B

【分析】根据给定条件，利用集合的包含关系求解即得.

【详解】集合 $A = \{x | 1 < x < 2024\}$ ， $B = \{x | x < a\}$ ，又 $A \subseteq B$ ，则 $a \geq 2024$ ，

所以实数 a 的取值范围是 $[2024, +\infty)$.

故选：B

2. D

【分析】由欧拉公式计算可得 $z = -i$ ，再根据共轭复数、实部、虚部定义以及模长公式可得结果.

【详解】由 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 可得 $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$ ，

所以 $(e^{i\pi} + i) \cdot z = (-1+i) \cdot z = 1+i$ ，可得 $z = \frac{1+i}{-1+i} = \frac{(1+i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-1-i^2-2i}{1-i^2} = -i$ ，

所以 z 的共轭复数为 i ，即 A 错误；

z 的实部为 0，即 B 错误；

z 的虚部为 -1 ，所以 C 错误；

z 的模为 1，可知 D 正确.

故选：D

3. C

【分析】利用二项式定理求出所有含 x^3 的项，计算可得系数.

【详解】由二项展开式的通项可得展开式中含 x^3 的项包括两项，

即 $2C_6^3 \cdot 1^3 \cdot x^3 + xC_6^2 \cdot 1^4 \cdot x^2 = (2C_6^3 + C_6^2)x^3 = 55x^3$ ，

所以展开式中 x^3 的系数是 55.

故选：C

4. B

【分析】求出函数 $f(x)$ 的导函数，利用给定等式求出 $\tan x_0$ ，再利用二倍角的正切计算即得.

【详解】函数 $f(x) = \sin x + \cos x$ ，求导得 $f'(x) = \cos x - \sin x$ ，

由 $f'(x_0) = \frac{1}{2}f(x_0)$ ，得 $\cos x_0 - \sin x_0 = \frac{1}{2}(\cos x_0 + \sin x_0)$ ，解得 $\tan x_0 = \frac{1}{3}$ ，

$$\text{所以 } \tan 2x_0 = \frac{2 \tan x_0}{1 - \tan^2 x_0} = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - (\frac{1}{3})^2} = \frac{3}{4}.$$

故选：B

5. A

【分析】由程序框图的循环结构，代入计算可得结果.

【详解】根据流程框图可知，第一次计算结果为 $s = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, n = 4 < 8$;

第二次循环计算可得 $s = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, n = 6 < 8$;

第三次循环计算可得 $s = \frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}, n = 8 = 8$ ，不满足 $n < 8$ ，循环结束，

此时输出 $s = \frac{11}{12}$.

故选：A

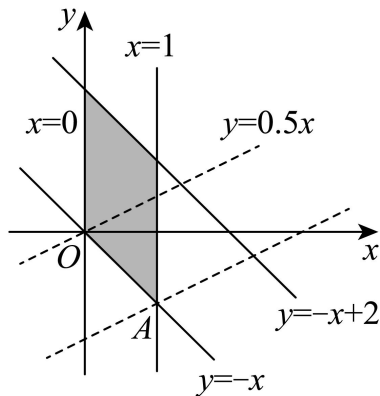
6. D

【分析】利用向量数量积的坐标表示得出约束条件，画出可行域并利用直线的截距的几何意义求得结果.

【详解】易知 $\overrightarrow{OP} = (x, y)$,

$$\text{所以约束条件 } \begin{cases} 0 \leq \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} \leq 1 \\ 0 \leq \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} \leq 2 \end{cases} \text{ 即为 } \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq x + y \leq 2 \end{cases},$$

画出可行域如下图阴影部分所示：



将目标函数 $z = x - 2y$ 变形可得 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z$,

当其在 y 轴上的截距最小时， z 的取值最大；

对直线 $y = -x$ ，令 $x = 1$ ，则 $y = -1$ ，则 $A(1, -1)$ ，

显然当直线 $y = \frac{1}{2}x$ 平移到过点 $A(1, -1)$ 时, z 取最大值 3.

故选: D

7. C

【分析】按照分组分配问题先将 5 人分情况讨论并分成三组, 再分配到三个路口进行计算可得结果.

【详解】第一步: 先将 5 名大学生分成三组, 每组人数为 1, 1, 3 或 1, 2, 2;

当分为 1, 1, 3 时, 且甲、乙要求去同一个路口, 则甲、乙必须在 3 人组,

因此只需从剩下的 3 人中任选一人, 其余两人各自一组, 共有 C_3^1 种分法;

当分为 1, 2, 2 时, 且甲、乙要求去同一个路口, 则将剩下的 3 人分成两组即可, 共有 $C_3^1 C_2^2$ 种分法;

第二步: 再将分好的三组人员分配到三个路口, 共有 A_3^3 种分配方案;

因此共 $(C_3^1 + C_3^1 C_2^2) A_3^3 = 36$ 种.

故选: C

8. A

【详解】解: 因为 α, β, γ 为不同的平面, m, n, l 为不同的直线, 则 $m \perp \beta$ 的一个充分条件是 $n \perp \alpha, n \perp \beta, m \perp \alpha$, 选 A

9. A

【分析】根据给定的函数模型建立方程组, 再列出不等式即可求解.

【详解】依题意, $\begin{cases} e^{7a+b} = 288 \\ e^{21a+b} = 32 \end{cases}$, 则 $e^{14a} = \frac{1}{9}$, 即 $e^{7a} = \frac{1}{3}$, 显然 $a < 0$,

设物流过程中果蔬的储藏温度为 $t^\circ\text{C}$, 于是 $e^{at+b} \geq 96 = 3 \cdot e^{21a+b} = e^{-7a} \cdot e^{21a+b} = e^{14a+b}$,

解得 $at+b \geq 14a+b$, 因此 $t \leq 14$,

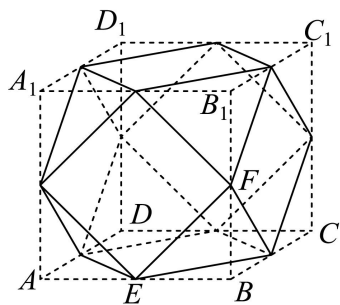
所以物流过程中果蔬的储藏温度最高不能超过 14°C .

故选: A

10. A

【分析】将该多面体补全为正方体, 得出该多面体的外接球即为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱切球, 求出该正方体的棱长得棱切球半径, 计算得到表面积.

【详解】将“阿基米德多面体”补全为正方体, 如下图所示:



不妨取两棱中点为 E, F ，由题知 $EF = \sqrt{2}$ ，

易知 $BE \perp BF, BE = BF$ ，可得 $BE = BF = 1$ ，

所以正方体的棱长为 2，该多面体的外接球即为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱切球，

所以棱切球的直径为该正方体的面对角线，长度为 $2\sqrt{2}$ ，

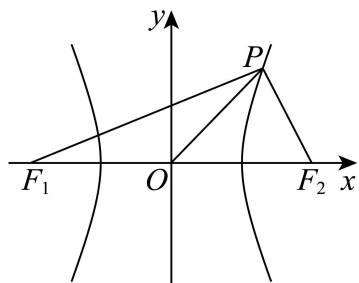
因此该多面体的外接球的半径为 $\sqrt{2}$ ，所以其表面积为 $S = 4\pi(\sqrt{2})^2 = 8\pi$ 。

故选：A

11. D

【分析】设出点 P 的坐标，利用两点间距离公式，结合点 P 在双曲线上及给定等式化简计算即得。

【详解】令双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦点 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ ，设 $P(x_0, y_0), y_0 \neq 0$ ，



$$\text{则 } \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \text{ 即有 } y_0^2 = \frac{b^2}{a^2}x_0^2 - b^2, \quad |PF_1| = \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} = \sqrt{x_0^2 + 2cx_0 + c^2 + \frac{b^2}{a^2}x_0^2 - b^2}$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_0^2 + 2cx_0 + a^2} = \left| \frac{c}{a}x_0 + a \right|, \quad \text{同理 } |PF_2| = \left| \frac{c}{a}x_0 - a \right|,$$

而 $x_0^2 \geq a^2$ ，故 $\frac{c^2}{a^2}x_0^2 - a^2 \geq c^2 - a^2 > 0$ ，

$$\text{因此 } 2a^2 = |PF_1| |PF_2| - |OP|^2 = \frac{c^2}{a^2}x_0^2 - a^2 - x_0^2 - y_0^2 = \frac{b^2}{a^2}x_0^2 - y_0^2 - a^2 = b^2 - a^2,$$

即 $b^2 = 3a^2$ ，所以双曲线 C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 2$ 。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/158133112051006063>