

2024 年高二数学下学期期末考试模拟卷（六）

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

1. 复数 z 满足 $z(1-i)=i$ (i 为虚数单位)，则 z 的虚部为 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}i$ D. $-\frac{1}{2}i$

2. 若函数 $y = \cos x + ax$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -1]$ B. $(-\infty, 1]$ C. $[-1, -\infty)$ D. $[1, +\infty)$

3. 某工厂有 A, B 两套生产线，每周须要维护的概率分别为 0.2 和 0.25，且每周 A, B 两套生产线是否须要进行维护是相互独立的，则至多有一套生产线须要维护的概率为 ()

- A. 0.95 B. 0.6 C. 0.35 D. 0.15

4. $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 绽开式中 x^{-2} 的系数为 ()

- A. -14 B. 14 C. -84 D. 84

5. 一次表彰大会上，支配支配这 5 名优秀学生代表上台发言，这 5 名优秀学生分别来自高一、高二和高三三个年级，其中高一、高二年级各 2 名，高三年级 1 名．发言时若要求来自同一年级的学生不相邻，则不同的排法共有 () 种．

- A. 36 B. 48 C. 72 D. 120

6. 在一个箱子中装有大小形态完全相同的 3 个白球和 2 个黑球，现从中不放回的摸取 3 个球，设摸得的白球个数为 X ，黑球个数为 Y ，则 ()

- A. $E(X) > E(Y)$, $D(X) > D(Y)$ B. $E(X) = E(Y)$, $D(X) > D(Y)$
C. $E(X) > E(Y)$, $D(X) = D(Y)$ D. $E(X) = E(Y)$, $D(X) = D(Y)$

7. 设随机变量 ξ 听从正态分布 $N(1, 4)$ ，则 $P(\xi < 3)$ 的值为 ()

(参考数据: $P(u - \sigma < \xi < u + \sigma) = 0.6526$, $P(u - 2\sigma < \xi < u + 2\sigma) = 0.9544$)

- A. 0.1737 B. 0.3474 C. 0.6837 D. 0.8263

8. 已知函数 $f(x) = e^{x-3} + x \ln x - x^2 - ax$ 满足 $f(x) \geq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, e]$ B. $(-\infty, -2]$ C. $[2, e]$ D. $[-2, 2]$

二、多项选择题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分).

9. 从甲袋中摸出一个红球的概率是 $\frac{1}{3}$, 从乙袋中摸出一个红球的概率是 $\frac{1}{2}$, 从两袋各摸出一个球, 下列结论正确的是 ()

- A. 2 个球都是红球的概率为 $\frac{1}{6}$ B. 2 个球不都是红球的概率为 $\frac{1}{3}$
C. 至少有 1 个红球的概率为 $\frac{2}{3}$ D. 2 个球中恰有 1 个红球的概率为 $\frac{1}{2}$

10. 已知函数 $f(x) = -x^2 \ln x$, 则 ()

- A. $f(x) \leq 0$ 恒成立
B. $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的减函数
C. $f(x)$ 在 $x = e^{-\frac{1}{2}}$ 得到极大值 $\frac{1}{2e}$
D. $f(x)$ 只有一个零点

11. 已知 $\left(a + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中各项系数的和为 2, 则下列结论正确的有 ()

- A. $a = 1$
B. 展开式中常数项为 160
C. 展开式中含 x^2 项的系数为 60
D. 展开式中各项系数的肯定值的和为 1458

12. 为响应政府部门疫情防控号召. 某红十字会支配甲乙丙丁 4 名志愿者分别奔赴 A, B, C 三地参与防控工作, 下列选项正确的是 ()

- A. 若恰有一地无人去, 则共有 42 种不同的支配方法
B. 共有 64 种不同的支配方法
C. 若甲乙两人不能去 A 地, 且每地均有人去, 则共有 44 种不同的支配方法
D. 若该红十字会又支配为这三地捐赠 20 辆救援车 (救援车相同), 且每地至少支配一辆, 则共有 171 种不同的支配方法

三、填空题（本大题共 4 小题， 每小题 5 分， 共计 20 分． 请把答案填写在答题卡相应位置上）

13. 已知二项展开式 $(1+x)^9 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_9x^9$ ， 则

$a_0 = \underline{\hspace{2cm}}$ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \underline{\hspace{2cm}}$. (用数字作答)

14. 在一次期中考试中某学校高三全部学生的数学成绩 X 听从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ， 若

$P(X \geq 90) = 0.5$ ， 且 $P(X \geq 110) = 0.2$ ， 则 $P(X \leq 70) = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知 $(\frac{1}{x} - \sqrt{x})^9$ 的二项展开式中的常数项的值是 a ， 若 $3i \cdot z + a - 6i = 72 + 3i$ (其中 i

是虚数单位)， 则复数 z 的模 $|z| = \underline{\hspace{2cm}}$. (结果用数值表示)

16. 已知函数 $f(x) = x^3 + x - \sin x$ 则满足不等式 $f(2m^2) \leq f(1-m)$ 成立的实数 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题（本大题共 6 小题， 共计 70 分． 请在答题卡指定区域内作答． 解答时应写出文字说明、 证明过程或演算步骤）

17. 已知从 1, 3, 5, 7, 9 任取两个数， 从 0, 2, 4, 6, 8 中任取两个数， 组成没有重复的数字的四位数.

(I) 可以组成多少个不含有数字 0 的四位数？

(II) 可以组成多少个四位偶数？

(III) 可以组成多少个两个奇数数字相邻的四位数？ (全部结果均用数值表示)

18. 设虚数 z 满足 $|2z + 15| = \sqrt{3}|z + 10|$.

(1) 计算 $|z|$ 的值；

(2) 是否存在实数 a ， 使 $\frac{z}{a} + \frac{a}{z} \in \mathbb{R}$ ？ 若存在， 求出 a 的值； 若不存在， 说明理由.

19. 已知 $f_n(x) = (x^2 + \frac{3a}{x^3})^n$ ， $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 当 $a = 1$ 时， 求 $f_5(x)$ 展开式中的常数项；

(2) 若二项式 $f_n(x)$ 的展开式中含有 x^7 的项， 当 n 取最小值时， 展开式中含 x 的正整数次幂的项的系数之和为 10， 求实数 a 的值.

20. 为了调查国企员工对新个税法的满足程度， 探讨人员在 A 地各个国企中随机抽取了 1000 名员工进行调查， 并将满足程度以分数的形式统计成如下的频率分布表， 其中 $a = 4b$.

分数	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100]$
频率	0.08	a	0.35	0.27	b

(1) 若依据分层抽样从 $[50,60)$ ， $[60,70)$ 中随机抽取 8 人，再从这 8 人中随机抽取 4 人，记分数在 $[60,70)$ 的人数为 X ，求 X 的分布列与数学期望；

(2) 以频率估计概率，若该探讨人员从全国国企员工中随机抽取 n 人作调查，记成果在 $[60,70)$ ， $[90,100]$ 的人数为 X ，若 $D(x) \leq 2.2$ ，求 n 的最大值.

21 三阶魔方为 $3 \times 3 \times 3$ 的正方体结构, 由 26 个色块组成. 常规竞速玩法是将魔方打乱，然后在最短的时间内复原.

(1) 某魔方爱好者进行一段时间的魔方还原训练，每天魔方还原的平均速度 y （秒）与训练天数 x （天）有关，经统计得到如下数据：

x （天）	1	2	3	4	5	6	7
y （秒）	99	99	45	32	30	24	21

现用 $y = a + \frac{b}{x}$ ，作为回来方程类型，请利用表中数据，求出该回来方程，并预料该魔方爱好者经过长期训练后最终每天魔方还原的平均速度 y 约为多少秒（精确到 1 秒）；

(2) 现有一个复原好的三阶魔方，白面朝上，只可以扭动最外侧的六个表面. 某人按规定将魔方随机扭动两次，每次均顺时针转动 90° ，记顶面白色色块的个数为 X ，求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$.

参考数据（其中 $z_i = \frac{1}{x_i}$ ）.

参考公式：

$\sum_{i=1}^7 z_i y_i$	$\overline{z}$	$\sum_{i=1}^7 z_i^2 - 7 \times \overline{z}^2$
184. 5	0. 37	0. 55

对于一组数据 (u_1,v_1) ， (u_2,v_2) ， $\cdots$ ， (u_n,v_n) 其回来直线 $\hat{v}=\hat{\mu}+\hat{\mu}_1u$

的斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为 $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n\bar{u}^2}$, $\hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}$.

22. 已知函数 $f(x) = k(x-1)e^x - x^2$ ($k \in \mathbb{R}$).

(1) 当 $k=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点, 且微小值大于 -5 , 求实数 k 的取值范围.

综合一答案

1 【答案】B

【分析】

依据复数的运算法则，化简得的 $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ，结合复数的概念，即可求解.

【详解】

依据复数的运算法则，可得 $z(1-i) = i$ ，可得 $z = \frac{i}{1-i} = \frac{i \cdot (1+i)}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

故复数 z 的虚部为 $\frac{1}{2}$.

故选：B.

2 【答案】D

【分析】

求得导函数，依据函数单调性与导数的关系得到 $a \geq \sin x$ ，对于 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，利用

正弦函数的性质得到 a 的取值范围.

【详解】

解：由已知得 $y' = -\sin x + a \geq 0$ ，即 $a \geq \sin x$ ，对于 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，

$\therefore a \geq 1$ ，

故选：D.

【点睛】

本题考查导数与函数的单调性的关系，涉及三角函数的性质，不等式恒成立问题，属基础题.

3 【答案】A

【分析】

由相互独立事务概率计算公式可得结果.

【详解】

由题可得至多有一套生产线须要维护的概率 $P = 0.2 \times 0.75 + 0.8 \times 0.25 + 0.75 \times 0.8 = 0.95$.

故选：A.

4 【答案】B

【分析】

求得二项展开式的通项，结合通项公式，确定 r 的值，代入即可求解.

【详解】

由题意，二项展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_7^r (2x)^{7-r} \cdot (-1)^r \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^r = (-1)^r 2^{7-r} \cdot C_7^r x^{7-\frac{3}{2}r}$,

令 $7 - \frac{3}{2}r = -2$ ，得 $r = 6$ ，所以 x^{-2} 的系数为 $2C_7^6 = 14$.

故选：B.

5 【答案】B

【分析】

把两个高一学生排列，然后按一个高三学生是否在两个高一学生之间分类，在中间，把 2 个高二学生插入四个空档；不在时，选一个高二排在中间，然后在两边选一位置插入高三学生，再插入另一高二学生，由此可得排法数.

【详解】

先排高一年级学生，有 A_2^2 种排法，①若高一年级学生中间有高三学生，有 A_4^2 种排法；②若高一学生中间无高三学生，有 $C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_3^1$ 种排法，所以共有 $A_2^2 \cdot (A_4^2 + C_2^1 C_2^1 C_3^1) = 48$ 种排法.

故选：B.

【点睛】

关键点点睛：本题考查排列组合的应用，解题关键是确定完成事务的方法，是分类还是分步. 不相邻问题插空处理，即先考虑不受限制的元素排列，再将不相邻的元素插在前面元素排列的空中.

6 【答案】C

【分析】

由题意可知， X 的取值可能为 1, 2, 3，求出其对应的概率，从而可求得 $E(X)$ ， Y 的取值可能为 0, 1, 2，求出其对应的概率，从而可求得 $E(Y)$ 的值，而 $X + Y = 3$ ，所以

$$D(X) = D(3 - Y) = D(Y)$$

【详解】

X 的取值可能为 1, 2, 3，易知 $P(X=1) = \frac{C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10}$ ， $P(X=2) = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{6}{10}$ ，

$$P(X=3)=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}, \text{ 所以 } E(X)=\frac{18}{10}.$$

$$Y \text{ 的取值可能为 } 0, 1, 2, \text{ 易知 } P(Y=0)=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}, \quad P(Y=1)=\frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3}=\frac{6}{10},$$

$$P(Y=2)=\frac{C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}, \text{ 所以 } E(Y)=\frac{12}{10}. \text{ 易知 } E(X) > E(Y).$$

$$\text{又 } X+Y=3, \text{ 所以 } D(X)=D(3-Y)=D(Y)$$

故选: C

7 【答案】 D

【分析】

由已知得 $\mu=1$, $\sigma=2$, 再依据正态分布密度函数的对称性和参考数据可得选项.

【详解】

因为随机变量 ξ 听从正态分布 $N(1, 4)$, 所以 $\mu=1$, $\sigma^2=4$, 即 $\sigma=2$,

$$\text{所以 } P(\xi < 3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} P(u - \sigma < \xi < u + \sigma) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0.6526 = 0.8263,$$

故选: D.

8 【答案】 B

【分析】

由 $f(x) \geq 0$ 转化为 $a \leq \frac{e^{x-3}}{x} + \ln x - x$, 设 $g(x) = \frac{e^{x-3}}{x} + \ln x - x = e^{x-3-\ln x} + \ln x - x$, 利用

$$e^{x-3-\ln x} + \ln x - x \geq (x-3-\ln x+1) + \ln x - x, \text{ 即可求解.}$$

【详解】

由题意, 函数 $f(x) = e^{x-3} + x \ln x - x^2 - ax$ 满足 $f(x) \geq 0$ 恒成立,

可得 $ax \leq e^{x-3} + x \ln x - x^2$ 恒成立, 即 $a \leq \frac{e^{x-3}}{x} + \ln x - x$,

$$\text{设 } g(x) = \frac{e^{x-3}}{x} + \ln x - x = e^{x-3-\ln x} + \ln x - x,$$

又由函数 $h(x) = e^x - (x+1) = e^x - x - 1$, 可得 $h'(x) = e^x - 1$,

当 $x > 0$ 时, 可得 $h'(x) = e^x - 1 > 0$, 所以 $h(x)$ 为单调递增函数, 且 $h(0) = 0$,

所以 $x > 0$ 时, 可得 $h(x) > h(0) = 0$, 即 $e^x > x + 1$,

则 $g(x) = e^{x-3-\ln x} + \ln x - x \geq (x - 3 - \ln x + 1) + \ln x - x = -2$,

当且仅当 $x - 3 - \ln x = 0$, 即 $x = 3 + \ln x$ 时取 “=” 号,

所以 $a \leq -2$, 即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2]$.

故选: B.

【点睛】

对于利用导数探讨不等式的恒成立与有解问题的求解策略:

- 1、通常要构造新函数, 利用导数探讨函数的单调性, 求出最值, 从而求出参数的取值范围;
- 2、利用可分别变量, 构造新函数, 干脆把问题转化为函数的最值问题.
- 3、依据恒成立或有解求解参数的取值时, 一般涉及分类参数法, 但压轴试题中很少遇到分别参数后构造的新函数能干脆求出最值点的状况, 进行求解, 若参变分别不易求解问题, 就要考虑利用分类探讨法和放缩法, 留意恒成立与存在性问题的区分.

9 **【答案】** ACD

【分析】

利用独立事务的概率乘法公式、对立事务的概率公式求出各选项中事务的概率, 进而可推断各选项的正误.

【详解】

对于 A 选项, 2 个球都是红球的概率为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, A 选项正确;

对于 B 选项, 2 个球不都是红球的概率为 $1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$, B 选项错误;

对于 C 选项, 至少有 1 个红球的概率为 $1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$, C 选项正确;

对于 D 选项, 2 个球中恰有 1 个红球的概率 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, D 选项正确.

故选: ACD.

10 **【答案】** CD

【分析】

利用导数分析函数 $f(x)$ 的单调性与极值, 由此可推断 BC 选项的正误, 取 $0 < x < 1$

可推断 A 选项的正误, 解方程 $f(x)=0$ 可推断 D 选项的正误.

【详解】

Q $f(x)=-x^2 \ln x$, 该函数的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x)=-2x \ln x - x = -x(2 \ln x + 1)$.

当 $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$ 时, $f'(x) > 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递增,

当 $x > e^{-\frac{1}{2}}$ 时, $f'(x) < 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递减,

$\therefore f(x)_{\text{极大值}} = f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -e^{-1} \ln e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2e}$, 故 B 选项错误, C 选项正确;

当 $0 < x < 1$ 时, $\ln x < 0$, 此时 $f(x) = -x^2 \ln x > 0$, A 选项错误;

由 $f(x) = -x^2 \ln x = 0$, 可得 $\ln x = 0$, 解得 $x = 1$, D 选项正确.

故选: CD.

11 【答案】ACD

【分析】

利用赋值法推断 A, D; 利用通项公式推断 BC

【详解】

$\because \left(a + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{2}{x}\right)^6$ 的绽开式中各项系数的和为 2, 令 $x = 1$,

$\therefore \left(a + \frac{1}{1}\right)\left(1 - \frac{2}{1}\right)^6 = 2$, 解得 $a = 1$, 故 A 正确;

$\because \left(a + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{2}{x}\right)^6 = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{2}{x}\right)^6 = \left(x - \frac{2}{x}\right)^6 + \frac{1}{x}\left(x - \frac{2}{x}\right)^6$,

$\left(x - \frac{2}{x}\right)^6$ 绽开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \left(-\frac{2}{x}\right)^r = (-2)^r C_6^r x^{6-2r}$,

令 $6 - 2r = 0$, 得 $r = 3$, 可得绽开式中常数项为: $T_4 = (-2)^3 C_6^3 = -160$,

令 $6 - 2r = 2$, 得 $r = 2$, 可得绽开式中含 x^2 项为: $T_3 = (-2)^2 C_6^2 x^2 = 60x^2$,

$\frac{1}{x} \cdot (-2)^r C_6^r x^{6-2r} = (-2)^r C_6^r x^{5-2r}$,

令 $5 - 2r = 0$, 得 $r = \frac{5}{2}$ (舍去), 令 $5 - 2r = 2$, 得 $r = \frac{3}{2}$ (舍去).

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/158140134050006140>