第2章 预备基础知识

本章主要内容

（参考学时为2学时）

- ★ 信号的频谱分析
- ★ 信号能量和功率
- ★ 卷积和相关
- ★ 信号带宽
- ★ 希尔伯特变换

本章要求

★ 掌握信号傅立叶变换、卷积、相关和带宽的
概念和分析方法
★ 理解信号能量与功率的概念和关系
★ 了解希尔伯特变换的方法和意义

知识要点

- 信号傅里叶变换
- 信号能量与能量谱密度
- 信号功率与功率谱密度
- 信号卷积积分与相关函数
- 信号带宽
- 希尔伯特变换

2.2 信号的频谱分析

- 2.2.1 傅里叶级数

  信号 $f(t)$ 展为傅里叶级数必须满足的条件：

  ① $f(t)$ 是周期为 T_0 的周期函数

  ② $f(t)$ 在区间 $\left[-\frac{T_0}{2},\frac{T_0}{2}\right]$ 上绝对可积

傅里叶级数的二种表示形式

傅里叶级数的三角级数表示形式

$$f(t)=a_0+2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)\qquad -\frac{T_0}{2}\le t\le\frac{T_0}{2}$$

$$f(t)=A_0+2\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n)\qquad -\frac{T_0}{2}\le t\le\frac{T_0}{2}$$

或

式中:

$$a_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\cos n\omega_0 t dt \qquad n = 0,1,2,\text{L}$$

$$b_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\sin n\omega_0 t dt \qquad n = 1,2,\text{L}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$A_0 = a_0 \qquad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = -arctg\frac{b_n}{a_n}$$

01

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

傅立叶级数的复指数形式

$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

02

$$-\frac{T_0}{2}\le t\le\frac{T_0}{2}$$

式中:

$$n=0,\pm 1,\pm 2\mathrm{L}$$

★ 信号 $f(t)$ 用傅里叶级数表示的意义：

● 把周期函数的频率 $\omega_0 = 2\pi/T_0$ 作为基本频率，用具有整数倍频率的正弦波成份对 $f(t)$ 进行分解。因此, $|n| = 1$ 的成份称为基波， $|n| > 1$ 的成份称为高次谐波 $|n| = 0$ 的成份是直流成份。

● 确定了周期性信号 $f(t)$ 的第 n 次谐波分量的幅度 $|C_n|$，故由 $|C_n|$ 与频率关系波形可得到信号 $f(t)$ 的离散幅度频谱。

2.2.2 傅里叶变换

1

函数 存在傅里叶变换的条件：

$f(t)$；

2. 在 内分段光滑，即导数

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$$

$f(t)$ $(-\infty,\ \infty)$

娫 只有第一类间断点。

2

$$f(t)=F^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

01

通 信

02

$f(t)$

$$F(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

的傅里叶变换

$F(\omega)$

傅里叶变换

的傅里叶反变换

$$f(t)=F^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

词件

$$f(t)\Leftrightarrow F(\omega)$$

上海大

提供了信号在频率域和时间域之间的相互变换关系。通常把称为 的频谱密度，简称频谱。

傅里叶变换的意义

$F(\omega)$ $f(t)$

傅里叶变换的常用特性

01

02

03

平移特性：

$$F\left[f(t \pm t_0)\right] = F(\omega)e^{\pm j\omega t_0}$$

$$F^{-1}\left[F(\omega \pm \omega_0)\right] = f(t)e^{\mp j\omega_0 t}$$

微分特性：

$$F\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = (j\omega)^n F(\omega)$$

$$F^{-1}\left[\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}\right] = (-jt)^n f(t)$$

对称特性：

$$F\left[F(t)\right] = 2\pi f(-\omega)$$

$F[f_1(t)*f_2(t)]=F[f_1(t)]\cdot F[f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$

01

- 卷积特性：

$$F[f_1(t)*f_2(t)]=F[f_1(t)]\cdot F[f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$$

$$F[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}[F_1(\omega)*F_2(\omega)]$$

式中：

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)d\tau$$

02

积分特性：

$$F\left[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{j\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$$

2.2.3 常用信号的频谱

A

周期矩形脉冲信号的频谱

B

方法一：采用傅里叶级数表示

时域波形

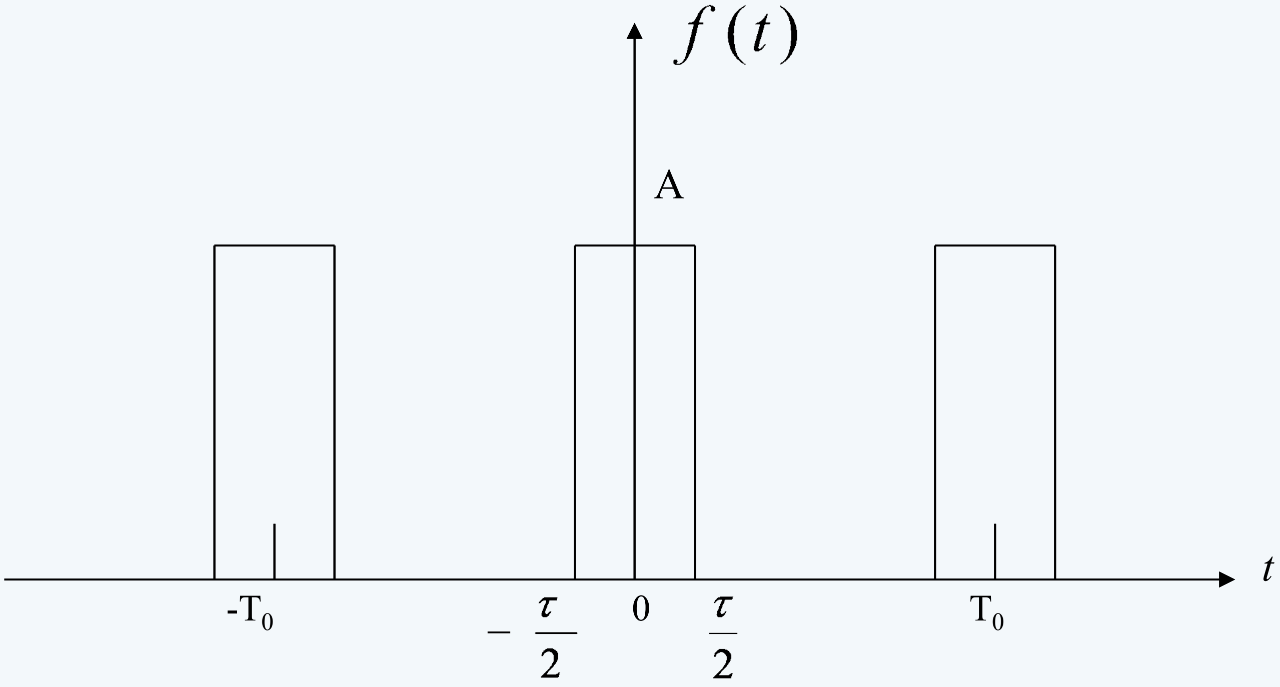


图2.2.1周期矩形脉冲波形

傅里叶级数表达式

01

复指数形式

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{A\tau}{T_0}Sa(n\pi\tau/T_0)e^{jn\omega_0 t}$$

02

三角级数形式

$$f(t)=\frac{A\tau}{T_0}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A\tau}{T_0}Sa(n\pi\tau/T_0)\cos n\omega_0 t$$

讨论

当 $\frac{\tau}{T_0}=\frac{1}{2}$ 时，

$$Sa(n\pi/2)=\begin{cases}2/\pi,-2/3\pi,2/5\pi,-2/7\pi,\cdots\cdots, & n\text{为奇数}\\ 0, & n\text{为偶数}\end{cases}$$

所以

$$f(t)=A\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\cos\omega_0 t-\frac{1}{3}\cos 3\omega_0 t+\frac{1}{5}\cos 5\omega_0 t-\frac{1}{7}\cos 7\omega_0 t+\cdots\right)\right]$$

- 周期矩形脉冲信号的频谱图

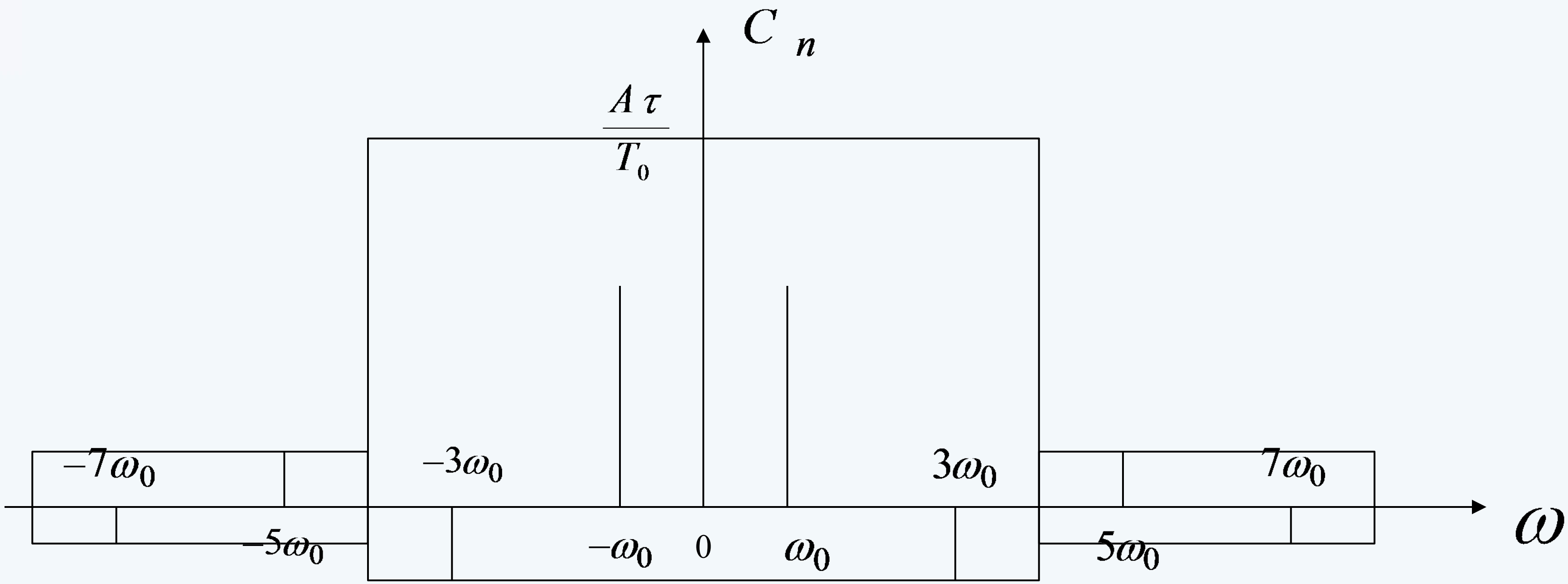


图2.2.2（a） $\frac{\tau}{T_0}=\frac{1}{2}$ 的周期矩形脉冲频谱

$\frac{\tau}{T_0}=\frac{1}{5}$

2.当 $\frac{\tau}{T_0}=\frac{1}{5}$ 时，周期矩形脉冲信号的频谱图

C_n

$\frac{A\tau}{T_0}$

图2.2.2（b） $\frac{\tau}{T_0}=\frac{1}{5}$ 的周期矩形脉冲频谱

0

$-10\omega_0$ $-5\omega_0$ $-2\omega_0$ $2\omega_0$ $5\omega_0$ $10\omega_0$ ω

周期信号的频谱是离散的；

结论

2 若脉冲宽度较宽，相应的频谱宽度就较窄
若

- 脉冲宽度较窄，对应的频谱宽度就较宽。即时
- 域的压缩对应着频谱的展宽，说明提高传信是
- 以牺牲频带宽度为代价的。

$f(t)$

（2.2-28）

方法二：对周期信号 的傅里叶级数

- 表达式取傅里叶变换
- 周期信号 的傅里叶变换
- 周期矩形脉冲信号的傅里叶变换

$f(t)$

$$F(\omega)=F[f(t)]=F\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t}\right]=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{A\tau}{T_0}Sa(n\pi\tau/T_0)\delta(\omega-n\omega_0)$$

结论

周期信号的傅里叶变换由发生在原信号基波

● 频率整数倍（谐波）频率处的冲激所组成；

2. 由（2.2-28）式画出的 $f(t)$ 频谱与图

是一致的。

门函数的频谱

傅里叶变换

时域表达式

C

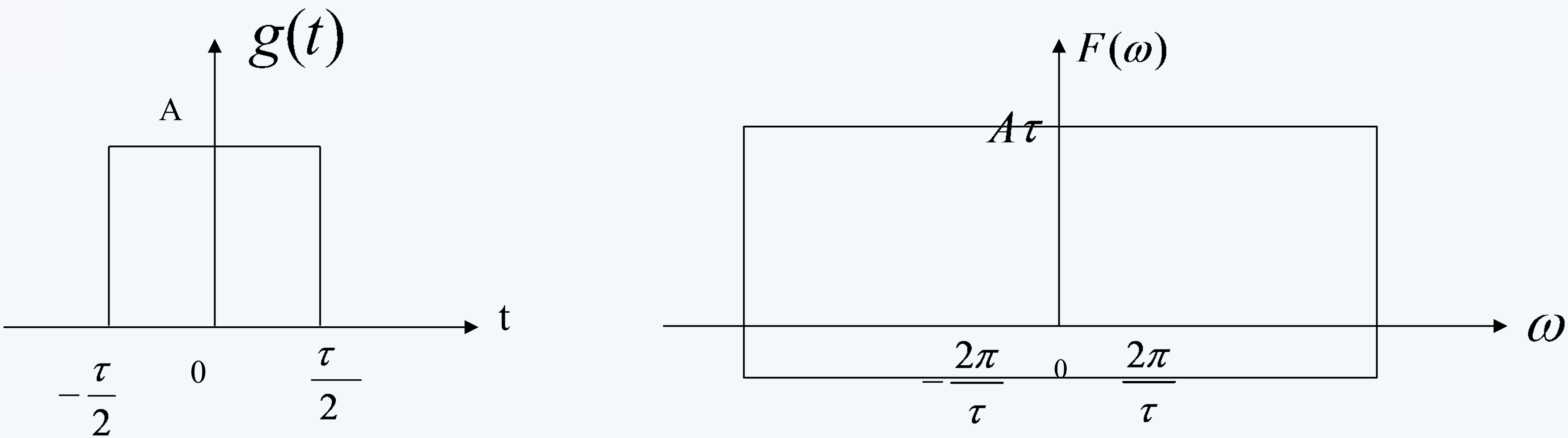
$$g(t)=\begin{cases}A, & |t|\le \tau/2 \\ 0, & |t|>\tau/2\end{cases} \quad (2.2\text{-}29)$$

B

A

$$g(t)\Leftrightarrow F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j\omega t}dt = A\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

- 时域波形和频谱图



（a） 门函数　　（b） 门函数的频谱

图2.2.3门函数及其频谱

结论

1　非周期信号的频谱是连续的；

2. 门函数 $g(t)$ 的第一零点频带宽度为 $B = \frac{1}{\tau}$

3. （Hz），因此脉冲宽度越窄，信号的频带宽

- 度越宽。

单位冲激函数的频谱

A

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$$

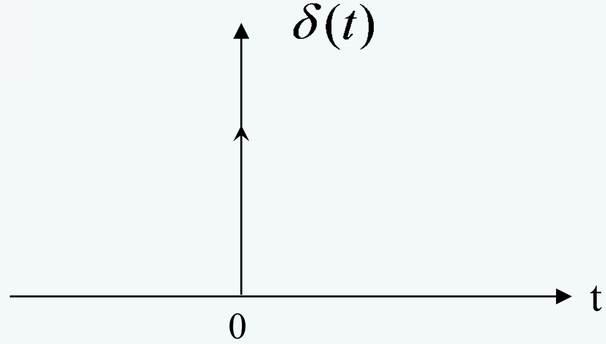
单位冲激函数的时域表达式

单位冲激函数的傅里叶变换

B

$$\delta(t)\Leftrightarrow\delta(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1$$

• 单位冲激函数的波形和频谱图



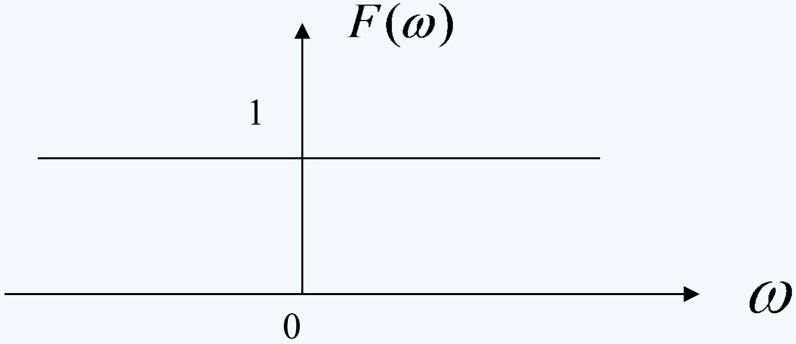


图2.2.4单位冲激函数及其频谱

• 结论 ： $\delta(t)$的能量均匀分布在整个频率域。

周期冲激序列的频谱

时域表达式

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0)$$

● 傅里叶级数展开式

$$\delta_T(t)=\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-jn\omega_0 t}$$

傅里叶变换

$$\delta_T(t)\Leftrightarrow\delta_T(\omega)=\frac{2\pi}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$$

时域波形和频谱特性图

- 图2.2.5 周期冲激序列及其频谱
- 周期冲激序列
- 0
- t
- 0
- 周期冲激序列频谱

$\delta_T(t)$

$\delta_T(\omega)$

ω

$-2T_0$ $2T_0$ $-2\omega_0$ $2\omega_0$

- 结论
  时域内的一个周期冲激序列，其傅里叶变换在 频率域内也是一个周期冲激序列，但冲激强度增加

$2\pi/T_0$

倍

1

2