

# 《离散数学》

## 8-函数 (Function)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2023 年 11 月 9 日

- › 函数的基本概念
- › 集合基数
- › 可计算性理论简介



## 函数的基本概念

我们已经接触到各式各样的函数，比如：

- $f(x) = x^2 + 1$
- $f(x) = \sin x + \cos 2x$
- $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$
- $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

可以看到，这些函数其实反映了  $x$  与  $y$  的某种关系，现在我们从关系的角度来给出函数的定义。

## 定义 1

[函数].

令  $f$  是一个  $A$  到  $B$  的二元关系, 若  $\text{dom}(f) = A$  并且对于任意  $x \in \text{dom}(f)$ , 存在唯一的  $y \in \text{ran}(f)$  使得  $(x, y) \in f$ , 则称  $f$  是  $A$  到  $B$  的函数 (映射), 记作  $f: A \rightarrow B$ .  $xfy$  也被记作  $y = f(x)$ , 并称  $y$  为  $f$  在  $x$  的值。

## 例 2.

1.  $f_1 = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1)\}$  是一个函数。
2.  $f_2 = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_1, y_2)\}$  不是一个函数。

## 补充说明

1. 上述定义对多元函数也是符合的, 因为  $x$  可以理解成一个  $n$  元组。
2. 如果  $\text{dom}(f) \subset A$ , 则称  $f$  是  $A$  到  $B$  的部分函数 (Partial Function)。

由上述可知，一个函数可以看成是一个集合，因此两个函数相等可以视作两个集合相等。

### 定义 3

[函数相等].

令  $F, G$  是函数，则  $F = G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \subseteq F$ ，即若  $F = G$  则我们有：

1.  $\text{dom}(F) = \text{dom}(G)$
2.  $\forall x \in \text{dom}(F), F(x) = G(x)$

### 例 4.

1. 函数  $f(x) = x - 1$  和  $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$  是不相等的。
2. 函数  $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$  与函数  $g(x) = \cos 2x$  是相等的。

- 像：令函数  $f: A \rightarrow B$ ,  $A_1 \subseteq A$ , 则  $f(A_1) = \{f(x) \mid x \in A_1\}$  称为  $A_1$  在  $f$  下的像。
- 完全原像：令函数  $f: A \rightarrow B$ ,  $B_1 \subseteq B$ , 则  $f^{-1}(B_1) = \{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B_1\}$  称为  $B_1$  在  $f$  下的完全原像。
- 函数集合  $B^A$ ：令  $B^A$  表示所有从  $A$  到  $B$  的函数的集合。

### 例 5.

令  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{a, b\}$ ,  $f = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$ ,  $A_1 = \{1, 2\}$ ,  $B_1 = \{a\}$ , 则：

1.  $f$  在  $A_1$  下的像为  $f(A_1) = \{a\}$ .
2.  $f$  在  $B_1$  下的完全原像为  $f^{-1}(B_1) = \{1, 2\}$ .
3.  $B^A = \{f_0, \dots, f_7\}$ , 这里  $f_0 \sim f_7$  代表  $A$  到  $B$  的不同的 8 个函数。

- **常值函数**: 设  $f: A \rightarrow B$ , 如果存在  $c \in B$  使得对所有的  $x \in A$ , 都有  $f(x) = c$ , 即  $f(A) = \{c\}$ , 则称  $f$  是常值函数。
- **恒等函数**: 集合  $A$  上的恒等关系  $I_A$  被称作恒等函数, 即对于任意的  $x \in A$ , 都有  $I_A(x) = x$ 。
- **特征函数**: 令  $A$  是集合, 对于  $A' \subseteq A$ 。定义  $A$  上的特征函数  $\chi_{A'}$  为:

$$\chi_{A'}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A' \\ 0, & x \notin A' \end{cases}$$



- **n 元运算**: 我们将函数  $f: A^n \rightarrow A$  称为  $A$  上的  $n$  元运算。
  - $f(x, y) = x + y$ ,  $f(x, y, z) = x + y \cdot z$  定义了  $A$  上的二元运算和三元运算。
- **单调函数**: 令  $(A, \leq_A), (B, \leq_B)$  是一个偏序集,  $f: A \rightarrow B$ :
  - 如果对于任意的  $x, y \in A$ , 都有  $x \leq_A y \Rightarrow f(x) \leq_B f(y)$ , 则称  $f$  是**单调递增函数**
  - 如果对于任意的  $x, y \in A$ , 都有  $x <_A y \Rightarrow f(x) <_B f(y)$ , 则称  $f$  是**严格单调递增函数**类似可定义**单调递减函数**和**严格单调递减函数**。
- **泛函**: 称  $f: A \rightarrow C^B$  称为一个泛函。  
比如: 令  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, F(a) = (f_a(x) = x + a)$ ,  $F$  也可以写成:  $F: a \rightarrow [x \rightarrow a]$ :
  - $F(1) = f_1(x) = x + 1$
  - $F(2)(3) = f_2(3) = 3 + 2 = 5$

在目前函数的定义上，我们要求了  $\text{dom}(f) = A$ ，即每一个  $A$  中的元素都有唯一的一个函数值。下面我们再定义基于此的一些函数的性质，

## 定义 6

### [单射 (Injective/One-to-one)].

令  $f: A \rightarrow B$ ，如果对于任意的  $x, y \in A$ ，都有  $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ ，则称  $f$  是单射。

## 定义 7

### [满射 (Surjective/Onto)].

令  $f: A \rightarrow B$ ，如果对于任意的  $y \in B$ ，都存在  $x \in A$  使得  $f(x) = y$ ，则称  $f$  是满射。

## 定义 8

### [双射 (Bijective/One-to-one correspondence)].

令  $f: A \rightarrow B$ ，如果  $f$  是单射且满射，则称  $f$  是双射。双射也被称为一一映射。



### 例 9.

请判断, 下列函数是否为单射、满射、双射。

1.  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x^2$ .
2.  $f_2 : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \ln x$ .
3.  $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f_3(x) = \lceil x \rceil$ .
4.  $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_4(x) = 2x + 1$ .

### 解 10.

1.  $f_1$  不是单射, 也不是满射。
2.  $f_2$  是单射, 但是不是满射。
3.  $f_3$  是满射, 但是不是单射。
4.  $f_4$  是双射。

### 例 11.

请根据下列集合  $A$  和  $B$  给出一个函数  $f: A \rightarrow B$ , 使得  $f$  是双射。

1.  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$ .
2.  $A = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ ,  $B = \{0, 1\}^{\{1, 2, 3\}}$
3.  $A = \mathbb{Z}$ ,  $B = \mathbb{N}$ .
4.  $A = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $B = \mathbb{R}$

### 解 12.

1.  $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ .
2.  $f = \{(A_i, f_i)\}$ .
3.  $f = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$ .
4.  $f = \tan x$ .

函数是一种特殊的关系，因此我们也可以在其上面进行复合与逆运算。先来考虑复合运算。

## 定理 13

## [函数的复合].

给定两个函数  $f: A \rightarrow B$  和  $g: B \rightarrow C$ ，则：

1. 其复合  $f \circ g$  也是函数。
2.  $f \circ g(x) = g(f(x))$ .

## 额外说明

可以看到，由于我们关系的定义用的是右复合，所以我们会看到：

$$f \circ g(x) = g(f(x))$$

有的书上会用左复合，则函数复合的形式会转换为： $f \circ g(x) = f(g(x))$ .

## 证明.

1. 我们先证明  $f \circ g$  是个函数。

- $\forall x \in A$ , 存在  $y \in B$  s.t.  $f(x) = y$ . 由于  $g$  是函数, 从而存在  $z \in C$  s.t.  $g(y) = z$ , 因此  $(x, z) \in f \circ g$ , 即  $\text{dom}(f \circ g) = A$ .
- 假设存在  $x \in A$  s.t.  $(x, y_1), (x, y_2) \in f \circ g$ , 则存在  $z_1, z_2 \in B$  s.t.  $(x, z_1), (x, z_2) \in f, (z_1, y_1), (z_2, y_2) \in g$ , 由函数的定义  $z_1 = z_2$ , 从而  $y_1 = y_2$ , 即  $f \circ g$  是函数。

2. 对任意的  $x \in A$ , 我们有  $(x, f(x)) \in f, (f(x), g(f(x))) \in g$ , 从而  $(x, g(f(x))) \in f \circ g$ , 即  $f \circ g(x) = g(f(x))$ .

□

## 定理 14

## [函数的逆].

给定函数  $f: A \rightarrow B$ , 则  $f^{-1}$  也是函数当且仅当  $f$  是双射。

证明.

- $(\Rightarrow)$  假设  $f^{-1}$  是函数。则对于任意的  $y \in B$ , 都存在  $x \in A$  s.t.  $f^{-1}(y) = x$ , 即  $f(x) = y$ , 从而  $f$  是**满射**。 $f$  是**单射**则是显然的, 否则:

$$(x_1, y), (x_2, y) \in f \Rightarrow (y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$$

从而  $f^{-1}$  不是函数。因此  $f$  是双射。

- $(\Leftarrow)$  先证  $f^{-1}$  的定义域是  $B$ 。

$$\forall x \in B \exists y \in A f(y) = x \Rightarrow f(x) = y \Rightarrow x \in \text{dom}(f^{-1}) \Rightarrow \text{dom}(f^{-1}) = B$$

再证  $f^{-1}$  是函数。若  $(x, y_1), (x, y_2) \in f^{-1}$ , 则  $(y_1, x), (y_2, x) \in f$ , 从而  $y_1 = y_2$ , 即  $f^{-1}$  是函数。

## 定义 15

[反函数].

对于一个双射  $f: A \rightarrow B$ , 我们称其逆  $f^{-1}$  为反函数。

## 例 16.

令  $f(x) = x + 2$ ,  $g(x) = x^2$  都是  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  的函数, 则我们有:

- $f$  的反函数为  $f^{-1}(x) = x - 2$ .
- $g$  不是双射, 因此不存在反函数。
- $f \circ g(x) = g(f(x)) = x^2 + 4x + 4$
- $g \circ f(x) = f(g(x)) = x^2 + 2$



## 定理 17.

给定函数  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ , 则:

1. 若  $f$  和  $g$  都是单射, 则  $f \circ g$  也是单射。
2. 若  $f$  和  $g$  都是满射, 则  $f \circ g$  也是满射。
3. 若  $f$  和  $g$  都是双射, 则  $f \circ g$  也是双射。
4.  $f = f \circ I_B = I_A \circ f$
5. 若  $f$  是双射, 则有  $f \circ f^{-1} = I_A$ ,  $f^{-1} \circ f = I_B$ .

## 证明.

1. 假设存在  $x_1, x_2 \in A$  s.t.  $f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$ , 则  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , 由于  $g$  是单射, 从而  $f(x_1) = f(x_2)$ , 由于  $f$  是单射, 从而  $x_1 = x_2$ , 即  $f \circ g$  是单射。
2. 对  $\forall x \in C$ , 存在  $y \in B$  s.t.  $g(y) = x$ , 由于  $f$  是满射, 从而存在  $z \in A$  s.t.  $f(z) = y$ , 从而  $f \circ g(z) = x$ , 即  $f \circ g$  是满射。
3. 由上述性质立马可得。
4. 只证  $f = f \circ I_B$ .

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (x, y) \in f \wedge (y, y) \in I_B \Leftrightarrow (x, y) \in f \circ I_B$$

5. 只证  $f \circ f^{-1} = I_A$ .

$$(x, y) \in f \circ f^{-1} \Leftrightarrow \exists z(x, z) \in f \wedge (z, y) \in f^{-1} \Leftrightarrow (z, x), (z, y) \in f^{-1} \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow (x, y) \in I_A$$

□

 集合基数

判断有限集合之间的大小我们可以用元素个数来衡量，但是对于无限集合，我们该如何衡量其大小呢？

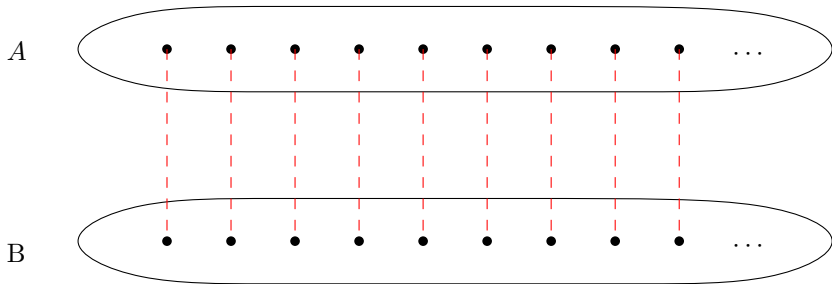
- $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  哪个更大？

我们利用**双射函数**的概念来对无限集合进行比较。

## 定义 18

[集合等势].

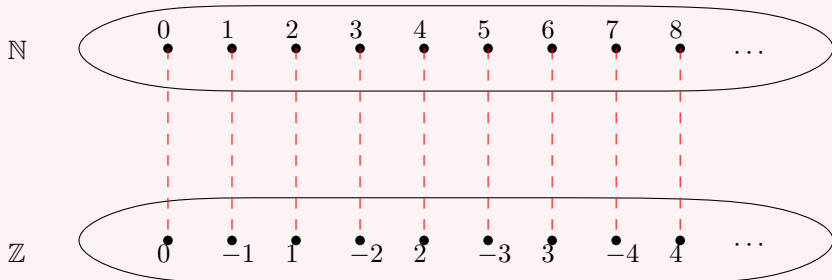
令  $A, B$  是两个集合, 如果存在一个双射  $f: A \rightarrow B$ , 则称  $A$  与  $B$  等势, 记作  $A \approx B$ , 若  $A$  和  $B$  不等势, 则记作  $A \not\approx B$ .



显然等势关系满足自反性、对称性、传递性, 从而其是一个**等价关系**。

## 例 19.

1.  $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$ .



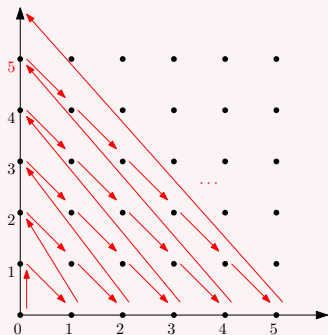
$$\bullet f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ 为偶数} \\ -\frac{n+1}{2}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

## 例 20.

2.  $\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

•  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$f((m,n)) = \frac{(m+n+1)(m+n)}{2} + m$$



## 推论 21.

$\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$ .

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/165031133312011044>