专题 4.2　一次函数的图象与性质（一）【十大题型】

【北师大版】

题型梳理

【题型 1　一次函数的概念辨析】.....1
【题型 2　待定系数法求一次函数解析式】.....3
【题型 3　一次函数图象上点的坐标特征】.....6
【题型 4　一次函数解析式与三角形面积问题】.....7
【题型 5　根据实际问题列一次函数解析式】.....11
【题型 6　判断一次函数的图象】.....15
【题型 7　判断一次函数的增减性或经过的象限】.....18
【题型 8　根据一次函数的性质求参数的范围】.....20
【题型 9　根据一次函数的增减性求自变量的变化情况】.....21
【题型 10 根据一次函数的增减性比较函数值大小】.....23

举一反三

【知识点 1 一次函数和正比例函数的概念】

一般地，若两个变量 x，y 间的关系可以表示成 $y=kx+b$（k，b 为常数，$k\neq 0$）的形式，则称 y 是 x 的一次函数（x 为自变量，y 为因变量）。

特别地，当一次函数 $y=kx+b$ 中的 b=0 时（即 $y=kx$）（k 为常数，$k\neq 0$），称 y 是 x 的正比例函数。

【题型 1　一次函数的概念辨析】

【例 1】（2023 春·山东菏泽·八年级统考期末）下列函数中，是一次函数但不是正比例函数的是（　）

A．$y=-\frac{x}{2}$　　B．$y=-\frac{2}{x}$　　C．$y=-\frac{x-1}{2}$　　D．$y=\frac{x^2-1}{2}$

【答案】C

【分析】根据一次函数和正比例函数的概念解答即可．

【详解】解：A．是一次函数，也是正比例函数，故选项不符合题意；

B．不是一次函数，故选项不符合题意；

C．是一次函数，但不是正比例函数，故选项符合题意；

D．不是一次函数，故选项不符合题意．

故选：C．

【点睛】本题主要考查一次函数和正比例函数的概念：若两个变量 x 和 y 间的关系式可以表示成$y=kx+b$

（k，b 为常数，$k\neq 0$）的形式，则称 y 是 x 的一次函数（x 为自变量，y 为因变量）；一般地，两个变量 x，y 之间的关系式可以表示成形如$y=kx$（k 为常数，且$k\neq 0$）的函数，那么 y 就叫做 x 的正比例函数.

【变式 1-1】（2023 春·辽宁葫芦岛·八年级统考期末）若函数$y=(a-2)x^{|a|-1}+4$是一次函数，则a的值为（　）

A．-2　　B．± 2　　C．2　　D．0

【答案】A

【分析】根据一次函数$y=kx+b$的定义可知，k、b为常数，$k\neq 0$，自变量的次数为 1，即可求解.

【详解】解：$\because y=(a-2)x^{|a|-1}+4$是关于$x$的一次函数，

$\therefore |a|-1=1$，且$a-2\neq 0$，

$\therefore |a|=2$，且$a\neq 2$，

$\therefore a=\pm 2$且$a\neq 2$，

$\therefore a=-2$.

故选：A.

【点睛】本题考查了一次函数的定义，熟练掌握一次函数的定义和性质是解题的关键.

【变式 1-2】（2023 春·全国·八年级期中）在下列函数中，x是自变量，y是因变量，则一次函数有___，正比例函数有___.（将代号填上即可）①$y=\sqrt{3}x+1$；②$y=x^2+2x$；③$y=5x$；④$y=1-4x$；⑤$y=\frac{1}{x}+\sqrt{2}$.

【答案】　①③④　③

【分析】根据一次函数及正比例函数的定义，即可一一判定.

【详解】解：①$y=\sqrt{3}x+1$是一次函数，不是正比例函数；

②$y=x^2+2x$不是一次函数；

③$y=5x$是正比例函数，因为正比例函数一定是一次函数，所以还是一次函数；

④$y=1-4x$是一次函数；

⑤$y=\frac{1}{x}+\sqrt{2}$既不是正比例函数也不是一次函数.

故答案为：①③④，③.

【点睛】本题考查了一次函数及正比例函数的定义，熟知正比例函数是一次函数的特例是解决本题的关键.

【变式 1-3】（2023 春·广东东莞·八年级校考期中）已知函数$y=(k-2)x+(k^2-4)$.

(1)若该函数是一次函数，求 k 的取值范围.

(2)若该函数是正比例函数，求 k 的值.

【答案】(1)$k \neq 2$

(2)$k=-2$

【分析】（1）根据一次函数的定义，即可进行解答；

（2）根据正比例函数的定义，即可进行解答.

【详解】（1）解：∵函数$y=(k-2)x+(k^2-4)$是一次函数，

∴$k-2 \neq 0$，

解得：$k \neq 2$；

（2）解：∵函数$y=(k-2)x+(k^2-4)$是正比例函数，

∴$\begin{cases} k-2 \neq 0 \\ k^2-4=0 \end{cases}$，

解得：$k=-2$.

【点睛】本题主要考查了一次函数和正比例函数的定义，解题的关键是掌握一般形如$y=kx+b$的是一次函数（k，b 是常数，$k \neq 0$），其中 x 是自变量，y 是因变量．形如$y=kx$的是正比例函数$(k \neq 0)$，其中 x 是自变量，y 是因变量.

【知识点 2 正比例函数和一次函数解析式的确定】

确定一个正比例函数，就是要确定正比例函数定义式 $y=kx$（k≠0）中的常数 k。确定一个一次函数，需要确定一次函数定义式 $y=kx+b$（k≠0）中的常数 k 和 b。解这类问题的一般方法是待定系数法。

【题型 2 待定系数法求一次函数解析式】

【例 2】（2023 春·河南新乡·八年级统考期中）已知 y 与$x+3$成正比例，且当$x=1$时，$y=-8$.

(1)求 y 与 x 之间的函数关系式；

(2)设点$(m，2)$在（1）中函数的图象上，求 m 的值.

【答案】(1)$y=-2x-6$

(2)-4

【分析】（1）利用待定系数法解答，即可求解；

（2）把点$M(m,2)$代入（1）中解析式，即可求解.

【详解】（1）解：根据题意：设y与x之间的函数解析式为$y=k(x+3)$，

把$x=1$，$y=-8$代入得：$-8=k(1+3)$，

解得：$k=-2$.

则y与x函数关系式为$y=-2(x+3)$，

即y与x之间的函数解析式为$y=-2x-6$；

（2）解：把点$M(m,2)$代入$y=-2x-6$，

得：$2=-2m-6$，

解得$m=-4$.

【点睛】本题考查了正比例函数、待定系数法求一次函数的表达式、一次函数图象与函数关系式；其中熟练运用待定系数法求参数的值，是解决本题的关键.

【变式 2-1】（2023 春·辽宁大连·八年级统考期末）已知一次函数的图象过点$(6,-4)$与$(12,4)$.

(1)求这个一次函数的解析式；

(2)直接写出这个一次函数的图象与两坐标轴的交点坐标.

【答案】(1)$y=\frac{4}{3}x-12$

(2)$(9,0)$，$(0,-12)$

【分析】（1）设出一次函数的解析式是$y=kx+b$，然后把经过的点的坐标代入，求解得到k、b的值即可得解；

（2）根据一次函数的解析式即可求出图象与两坐标轴的交点坐标.

【详解】（1）设一次函数为$y=kx+b$，

∵一次函数的图象过点$(6,-4)$与$(12,4)$，

∴$\begin{cases}6k+b=-4\\12k+b=4\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=\frac{4}{3}\\b=-12\end{cases}$，

∴所求的解析式为$y=\frac{4}{3}x-12$.

（2）令$x=0$，则$y=-12$，

令$y=0$，则$\frac{4}{3}x-12=0$，解得$x=9$，

∴这个一次函数的图象与两坐标轴的交点为$(9,0)$，$(0,-12)$.

【点睛】本题考查了待定系数法求一次函数解析式，一次函数图象上点的坐标特点，待定系数法是求函数解析式常用的方法之一，需要熟练掌握.

【变式 2-2】（2023 春·江苏南通·八年级校考期中）若$y-2$与$2x+3$成正比例，且当$x=1$时，$y=12$.

(1)求 y 与 x 的函数解析式.

(2)求当$y=4$时，x 的值.

【答案】(1)$y=4x+8$

(2)$x=-1$

【分析】（1）设$y-2=k(2x+3)$，把$x=1$，$y=12$代入可得$k=2$，从而可得答案；

（2）把$y=4$代入函数解析式求解 x 即可.

【详解】（1）解：设$y-2=k(2x+3)$，

把$x=1$，$y=12$代入得$12-2=5k$，解得$k=2$，

所以$y-2=2(2x+3)$，

所以 y 与 x 之间的函数关系式为$y=4x+8$；

（2）当$y=4$时，$4x+8=4$，

解答$x=-1$.

【点睛】本题考查的是成正比例的含义，利用待定系数法求解函数解析式，求解函数自变量的值，理解成正比例的含义是解本题的关键.

【变式 2-3】（2023 春·江苏南通·八年级统考期末）在平面直角坐标系中有$A(-1,4)$，$B(-3,2)$，$C(0,5)$三点.

(1)求过A，B两点的直线的函数解析式；

(2)判断A，B，C三点是否在同一条直线上？并说明理由.

【答案】(1)$y=x+5$

(2)A，B，C三点在同一条直线上，详见解析

【分析】（1）根据点A、B坐标，利用待定系数法求解函数解析式即可；

（2）将点C坐标代入（1）中解析式中，判定是否符合函数解析式即可作出判断.

【详解】（1）解：设过A，B两点的直线的函数解析式$y=kx+b$，

则$\begin{cases}-k+b=4\\-3k+b=2\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=1\\b=5\end{cases}$，

∴直线AB的函数解析式为$y=x+5$

（2）解：A，B，C三点在同一条直线上，

理由：当$x=0$时，$y=5$，

∴点$C(0,5)$在直线AB上，

即A，B，C三点在同一条直线上.

【点睛】本题考查待定系数法求函数解析式、判定点是否在直线上，熟练掌握一次函数图象上的点的坐标特征是解答的关键.

【题型 3　一次函数图象上点的坐标特征】

【例 3】（2023 春·山西长治·八年级校考期中）如果点$P(2,k)$在直线$y=-2x+2$上，那么点 P 到 x 轴的距离为（　）

A．-2　　B．2　　C．-4　　D．4

【答案】B

【分析】把点$P(2,k)$代入直线$y=-2x+2$求出 k，即可点 P 到 x 轴的距离.

【详解】解：把点$P(2,k)$代入直线$y=-2x+2$得：

$k=-2\times2+2=-2$，

∴点 P 到 x 轴的距离为$|-2|=2$.

故选：B .

【点睛】本题主要考查了一次函数图像上点的坐标特征，准确分析计算是解题的关键.

【变式 3-1】（2023 春·广东深圳·八年级校考期中）下面哪个点在函数$y=-3x+4$的图象上（　）

A．$(5,13)$　　B．$(-1,1)$　　C．$(3,0)$　　D．$(1,1)$

【答案】D

【分析】将点的横坐标代入解析式，进行求解后判断即可.

【详解】解：A、当$x=5$时，$y=-3\times5+4=-11$，故$(5,13)$不在函数图象上；

B、当$x=-1$时，$y=-3\times(-1)+4=7$，故$(-1,1)$不在函数图象上；

C、当$x=3$时，$y=-3\times3+4=-5$，故$(3,0)$不在函数图象上；

D、当$x=1$时，$y=-3\times1+4=1$，故$(1,1)$在函数图象上；

故选 D.

【点睛】本题考查一次函数图象上的点的特征．熟练掌握一次函数图象上的点的横纵坐标满足函数解析式，是解题的关键.

【变式 3-2】（2023 春·江苏泰州·八年级统考期末）已知点$P(a-2,b)$在一次函数$y=3x-2$的图像上，则$10-3a+b=$_____.

【答案】2

【分析】将点$P(a-2,b)$代入一次函数$y=3x-2$中即可得出结果.

【详解】∵点$P(a-2,b)$在一次函数$y=3x-2$的图象上，

∴$b=3(a-2)-2$，

解得$3a-b=8$

$10-3a+b=10-8=2$.

故答案为：2.

【点睛】本题考查一次函数图像上点的坐标特点．熟练掌握整体代入是解题的关键.

【变式 3-3】（2023 春·福建厦门·八年级厦门外国语学校校考期末）一次函数$y=kx+k$图象一定经过点（　）

A．(1,0)　　B．(0,1)　　C．(1,1)　　D．$(-1,0)$

【答案】D

【分析】当$x=-1$时，$y=0$，由此解答即可.

【详解】解：$y=kx+k=k(x+1)$，

当$x=-1$时，$y=0$，

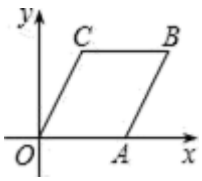
∴一次函数$y=kx+k$图象一定经过点$(-1,0)$.

故选：D.

【点睛】此题主要考查了一次函数图象上的点，解答此题的关键是理解一次函数图象上的点都满足一次函数的解析式，满足一次函数解析式的点都在一次函数的图象上.

【题型 4　一次函数解析式与三角形面积问题】

【例 4】（2023 春·江苏南通·八年级统考期中）如图，在平面直角坐标系中，$\square OABC$ 的顶点 A 在 x 轴上，顶点 B 的坐标为（6，4）．若直线 l 经过点（1，0），且将$\square OABC$ 分割成面积相等的两部分，则直线 l 的函数解析式是（　　）



A．$y=x+1$　　B．$y=\frac{1}{3}x+1$　　C．$y=3x-3$　　D．$y=x-1$

【答案】D

【分析】首先根据条件 l 经过点 D（1，0），且将▱OABC 分割成面积相等的两部分，求出 E 点坐标，然后设出函数关系式，再利用待定系数法把 D，E 两点坐标代入函数解析式，可得到答案.

【详解】解：设 D（1，0），

∵线 l 经过点 D（1，0），且将▱OABC 分割成面积相等的两部分，

∴OD＝BE＝1，

∵顶点 B 的坐标为（6，4）.

∴E（5，4）

设直线 l 的函数解析式是 y＝kx+b，

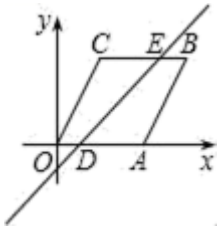
∵图象过 D（1，0），E（5，4），

∴$\begin{cases} k+b=0 \\ 5k+b=4 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} k=1 \\ b=-1 \end{cases}$，

∴直线 l 的函数解析式是 y＝x﹣1.

故选 D.



【点睛】此题主要考查了待定系数法求一次函数解析式，解题的关键是求出 E 点坐标.

【变式 4-1】（2023 春·湖南长沙·八年级校联考期中）一次函数经过点$(1，2)$、点$(-1，6)$，

(1)求这个一次函数的解析式；

(2)求这个一次函数图象与两坐标轴围成的三角形的面积.

【答案】(1)$y=-2x+4$

(2)4

【分析】（1）利用待定系数法，求一次函数解析式即可；

（2）先求出直线与坐标轴的交点坐标，然后再求出三角形的面积即可.

【详解】（1）解：设这个一次函数的解析式为$y=kx+b$，将点$(1，2)$，$(-1，6)$代入得：

$\begin{cases} k+b=2 \\ -k+b=6 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} k=-2 \\ b=4 \end{cases}$，

∴这个一次函数的解析式为$y=-2x+4$；

（2）解：设这个一次函数与x轴交于点 A，与y轴交于点 B，

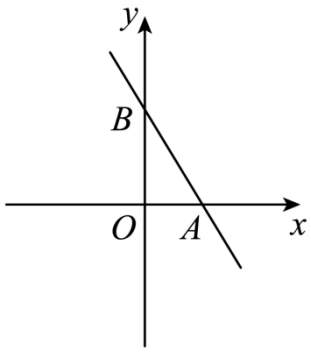
把$y=0$代入得$-2x+4=0$，

解得：$x=2$，

把$x=0$代入得：$y=4$，

∴$A(2,0)$，$B(0,4)$，

∴$S_{\triangle AOB}=2\times4\div2=4$.



【点睛】本题主要考查了求一次函数解析式，一次函数图象与坐标轴围成的图形面积，解题的关键是熟练掌握待定系数法.

【变式 4-2】（2023 春·江西上饶·八年级统考期末）一次函数的图象经过点$A(-3,5)$和$B(0,2)$两点.

(1)求出该一次函数的表达式；

(2)若直线 AB 与 x 轴交于点 C，求 $\triangle AOC$的面积.

【答案】(1)$y=-x+2$

(2)5

【分析】（1）用待定系数法求解即可；

（2）先求出点 C 的坐标，再根据三角形的面积公式求解.

【详解】（1）设一次函数解析式为$y=kx+b$，

∵图象经过$A(-3,5)$，$B(0,2)$两点，

∴$\begin{cases} 5=-3k+b \\ 2=b \end{cases}$

解得：$k=-1$，$b=2$

∴一次函数解析式为$y=-x+2$；

（2）当$y=0$时，$0=-x+2$，

∴$x=2$，

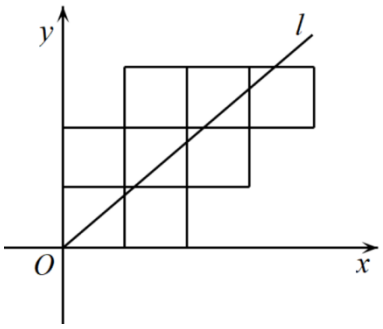
∴$C(2,0)$

∴$S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times OC\times y_A=\frac{1}{2}\times 2\times 5=5$，

答：$\triangle AOC$的面积为 5．

【点睛】本题考查了待定系数法求一次函数解析式，一次函数与坐标轴的交点，以及三角形的面积，熟练掌握待定系数法是解答本题的关键．

【变式 4-3】（2023 春·山东聊城·八年级统考期末）把 8 个边长为 1 的正方形按如图所示摆放在直角坐标系中，经过原点 O 的直线 l 将这 8 个正方形分成面积相等的两部分，则该直线的函数表达式是（　）

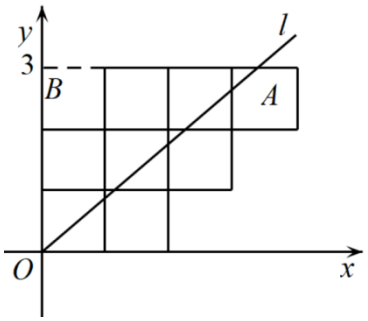


A．$y=\frac{9}{10}x$　　B．$y=\frac{10}{9}x$　　C．$y=x$　　D．$y=2x$

【答案】A

【分析】设直线 l 和八个正方形的最上面交点为 A，过 A 作 $AB\perp OB$ 于 B，易知 $OB=3$，利用三角形的面积公式和已知条件求出 A 的坐标即可得到该直线 l 的解析式．

【详解】解：如图，设直线 l 和八个正方形的最上面交点为 A，过 A 作 $AB\perp OB$ 于 B，易知 $OB=3$，



∵经过原点的一条直线 l 将这八个正方形分成面积相等的两部分，

∴$S_{\triangle AOB}=4+1=5$，

而 $OB=3$，

$\therefore \frac{1}{2}AB\cdot 3=5$，

$AB=\frac{10}{3}$，

$\therefore A$ 点坐标为（$\frac{10}{3}$，3），

设直线方程为 $y=kx$，

则 $3=\frac{10}{3}k$，

$\therefore k=\frac{9}{10}$，

$\therefore$直线 l 解析式为 $y=\frac{9}{10}x$.

故选：A.

【点睛】此题考查了面积相等问题、用待定系数法求一次函数的解析式，此题难度较大，解题的关键是作 $AB\perp y$ 轴，作 $AC\perp x$ 轴，根据题意即得到：直角三角形 ABO，利用三角形的面积公式求出 AB 的长.

【题型 5　根据实际问题列一次函数解析式】

【例 5】（2023 春·广东佛山·八年级佛山市华英学校校考期中）在某一阶段，某商品的销售量与销售价之间存在如表关系：

销售价/元	90	100	110	120	130	140
销售量/件	90	80	70	60	50	40

设该商品的销售价为x元，销售量为y件，估计：当$x=115$时，y的值为（　）

A．85　　B．75　　C．65　　D．55

【答案】C

【分析】该商品的销售价每增加 10 元，销售量就减少 10 件，所以可以分析出销售量 y 与销售价 x 符合一次函数关系，再设出函数解析式，代入表格中的数据求出解析式，再把 $x=115$ 代入求 y 的值即可.

【详解】解：由图表可以看出 y 与 x 符合一次函数关系，设 $y=kx+b$（$k\neq 0$），

把 $x=90$，$y=90$ 和 $x=100$，$y=80$ 代入得，

$\begin{cases}90k+b=90\\100k+b=80\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=-1\\b=180\end{cases}$，

则 $y=-x+180$，

当 $x=115$ 时，$y=-115+180=65$.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了函数的表示方法，根据题目中的条件分析函数关系是关键的一步，并且要熟练掌握待定系数法求解析式.

【变式 5-1】（2023 春·山东东营·八年级东营市东营区实验中学校考期末）汽车由北京驶往相距 120 千米的天津，它的平均速度是 30 千米/时，则汽车距天津的路程 S（千米）与行驶时间 t（时）的函数关系及自变量的取值范围是（　　）

A．$S=120-30t(0\le t\le 4)$　　B．$S=30t(0\le t\le 4)$

C．$S=120-30t(t>0)$　　D．$S=30t(t=4)$

【答案】A

【分析】根据汽车距天津的距离＝总路程−已行驶路程列函数关系式，再根据总路程判断出 t 的取值范围即可.

【详解】解：∵汽车行驶的路程为：$30t$，

∴汽车距天津的路程 S（千米）与行驶时间 t（时）的函数关系为：$S=120-30t$，

∵$120\div 30=4$，

∴自变量 t 的取值范围是$0\le t\le 4$，

故选：A.

【点睛】本题考查了列一次函数关系式，解决本题的关键是理解剩余路程的等量关系.

【变式 5-2】（2023 春·贵州贵阳·八年级统考期中）甲、乙两地相距 120km，现有一列火车从乙地出发，以 80km/h 的速度向甲地行驶．设 x（h）表示火车行驶的时间，y（km）表示火车与甲地的距离.

（1）写出 y 与 x 之间的关系式，并判断 y 是否为 x 的一次函数；

（2）当 x=0.5 时，求 y 的值.

【答案】（1）$y=120-80x(0<x\le 1.5)$，y 是 x 的一次函数；（2）80

【分析】（1）根据题意，首先计算得出 y 与 x 之间的关系式，再根据一次函数的性质分析，即可得到答案；（2）根据（1）的结论，将 x=0.5 代入到一次函数并计算，即可得到答案.

【详解】（1）根据题意，火车与乙地的距离表示为：$80x$（km）

∵甲、乙两地相距 120km

∴火车与甲地的距离表示为：$(120-80x)$（km），即$y=120-80x$；

当火车到达甲地时，即$80x=120$

∴$x=1.5$，即火车行驶 1.5h 到达甲地

$\therefore y=120-80x(0<x\leq 1.5)$

y 是 x 的一次函数；

（2）根据（1）的结论，得：$y=120-80x=120-80\times 0.5=80$.

【点睛】本题考查了一次函数的知识；解题的关键是熟练掌握一次函数的性质，从而完成求解.

【变式 5-3】（2023 春·云南文山·八年级期末）艺术节前夕，为了增添节日气氛，某校决定采购大小两种型号的气球装扮活动场地，计划购买 4 盒大气球，x 盒小气球（$x>4$）．A、B 两个商场中，两种型号的气球原价一样，都是大气球 50 元/盒，小气球 10 元/盒，但给出了不同的优惠方案：

A 商场：买一盒大气球，送一盒小气球；

B 商场：一律九折优惠；

（1）分别写出在两个商场购买时需要的花费 y（元）与 x（盒）之间的关系式；

（2）如果学校最终决定购买 10 盒小气球，那么选择在哪个商场购买比较合算？

【答案】（1）A：$y=10x+160$，B：$y=9x+180$；（2）A 商场更合算

【分析】（1）利用购买大气球盒数×单价+小气球去掉赠送的还需购买的盒数×单价列函数关系得出 A 商场花费，用购买大气球盒数×单价+小气球购买的盒数×单价之和九折列函数关系得出 B 商场花费即可；

（2）先求 A、B 两商场花费函数的值，比较大小即可.

【详解】解：（1）A：$y=50\times 4+10(x-4)=10x+160$，

B：$y=(50\times 4+10x)\times 90\%=9x+180$；

（2）当$x=10$时，A：$10\times 10+160=260$元，

B：$9\times 10+180=270$元，

$\because 260<270$，

$\therefore$选择在 A 商场购买比较合算.

【点睛】本题考查列函数解析式，函数值，比较大小，掌握列函数解析式的方法，求函数值的注意事项是解题关键.

【知识点 3 一次函数与正比例函数的图象与性质】

1、正比例函数的图象与性质

解析式		$y=kx(k\neq 0)$	
自变量取值范围		全体实数	
图象	形状	过原点的一条直线	
	k的取值	$k>0$	$k<0$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/165114021034011332