

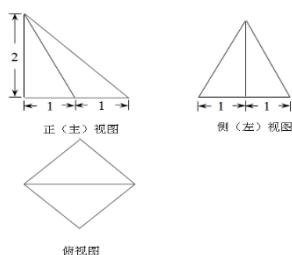
新疆乌鲁木齐市 70 中 2024 年数学高三第一学期期末学业水平测试试题

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

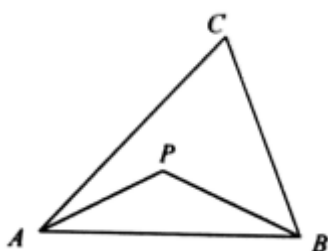
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 某四棱锥的三视图如图所示，该几何体的体积是（ ）



- A. 8 B. $\frac{8}{3}$ C. 4 D. $\frac{4}{3}$

2. 如图，设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，且 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ ，则 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为

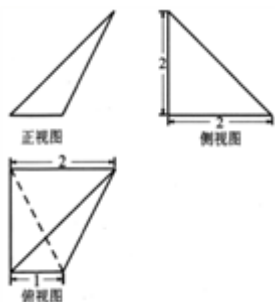


- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

3. 若复数 $z_1 = 2 + i$ ， $z_2 = \cos \alpha + i \sin \alpha (\alpha \in \mathbf{R})$ ，其中 i 是虚数单位，则 $|z_1 - z_2|$ 的最大值为()

- A. $\sqrt{5} - 1$ B. $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ C. $\sqrt{5} + 1$ D. $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

4. 某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积为



- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 2 D. $\frac{8}{3}$

5. 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - ax$ ，若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = 2x$ ，则实数 a 的取值为 ()

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

6. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 、 Q 分别为 AB 、 AD 的中点，过点 D 作平面 α 使 $B_1P \parallel$ 平面 α ， $A_1Q \parallel$ 平面 α 若直线 $B_1D_1 \cap$ 平面 $\alpha = M$ ，则 $\frac{MD_1}{MB_1}$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

7. 1777 年，法国科学家蒲丰在宴请客人时，在地上铺了一张白纸，上面画着一条条等距离的平行线，而他给每个客人发许多等质量的，长度等于相邻两平行线距离的一半的针，让他们随意投放.事后，蒲丰对针落地的位置进行统计，发现共投针 2212 枚，与直线相交的有 704 枚.根据这次统计数据，若客人随意向这张白纸上投放一根这样的针，则针落地后与直线相交的概率约为 ()

- A. $\frac{1}{2\pi}$ B. $\frac{3}{\pi}$ C. $\frac{2}{\pi}$ D. $\frac{1}{\pi}$

8. 关于函数 $f(x) = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} + \cos 2x$ ，下列说法正确的是 ()

A. 函数 $f(x)$ 的定义域为 R

B. 函数 $f(x)$ 一个递增区间为 $\left[-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$

C. 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 对称

D. 将函数 $y = \sqrt{2} \sin 2x$ 图像向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位可得函数 $y = f(x)$ 的图像

9. 点 M 在曲线 $G: y = 3 \ln x$ 上，过 M 作 x 轴垂线 l ，设 l 与曲线 $y = \frac{1}{x}$ 交于点 N ， $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}}{3}$ ，且 P 点的纵坐标始终为 0，则称 M 点为曲线 G 上的“水平黄金点”，则曲线 G 上的“水平黄金点”的个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

10. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + x + 1$ 且 $f(a) + f(a+1) > 2$ ，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

11. 下列说法正确的是 ()

A. 命题“ $\exists x_0 \leq 0, 2x_0 \leq \sin x_0$ ”的否定形式是“ $\forall x > 0, 2x > \sin x$ ”

B. 若平面 α , β , γ , 满足 $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$ 则 $\alpha \parallel \beta$

C. 随机变量 ξ 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 若 $P(0 < \xi < 1) = 0.4$, 则 $P(\xi > 0) = 0.8$

D. 设 x 是实数, “ $x < 0$ ”是“ $\frac{1}{x} < 1$ ”的充分不必要条件

12. 设 $a \in R$, $b > 0$, 则“ $3^a > 2b$ ”是“ $a > \log_3 b$ ”的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过点 F 且斜率为 1 的直线 l 交抛物线 C 于 M, N 两点, $b = \frac{|MF| + |NF|}{2}$,

若线段 MN 的垂直平分线与 x 轴交点的横坐标为 a , 则 $a - b$ 的值为_____.

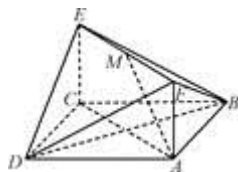
14. 函数 $f(x) = ae^x$ 与 $g(x) = -x - 1$ 的图象上存在关于 x 轴的对称点, 则实数 a 的取值范围为_____.

15. 设 $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = x^2 - 2x + k$ 有实数解, 则实数 k 的取值范围_____.

16. 某种产品的质量指标值 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 且 $P(\mu - 3\sigma < Z < \mu + 3\sigma) = 0.9974$. 某用户购买了 10000 件这种产品, 则这 10000 件产品中质量指标值位于区间 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之外的产品件数为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图所示, 已知正方形 $ABCD$ 和矩形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直, $AB = \sqrt{2}$, $AF = 1$, M 是线段 EF 的中点.



求证: (1) $AM \parallel$ 平面 BDE ;

(2) $AM \perp$ 平面 BDF .

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x + a| + |x - 1|$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求不等式 $f(x) \geq x + 8$ 的解集;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq |x - 5|$ 的解集包含 $[0, 2]$, 求实数 a 的取值范围.

19. (12 分) 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 S_n 是 a_n 与 $\frac{1}{a_n}$ 的等差中项.

(1) 证明: $\{S_n^2\}$ 为等差数列, 并求 S_n ;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{S_{n+1} + S_n}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求满足 $T_n \geq 5$ 的最小正整数 n 的值.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - x + \frac{1}{2}x^2$.

(1) 若 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 求证: $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0$;

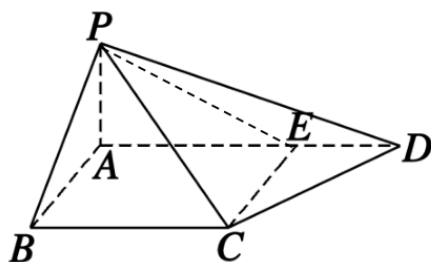
(2) 若 $x \in \mathbf{R}$ 时, 恒有 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b$, 求 $ab + b$ 的最大值.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - x \ln x + ax$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数, 函数 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得最小值.

(1) 求证: $\ln x_0 + x_0 = 0$;

(2) 若 $x \geq x_0$ 时, $f(x) \geq 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

22. (10 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \perp AD$, 点 E 在线段 AD 上, 且 $CE \parallel AB$.



(1) 求证: $CE \perp$ 平面 PAD ;

(2) 若 $PA = AB = 1$, $AD = 3$, $CD = \sqrt{2}$, $\angle CDA = 45^\circ$, 求二面角 $P-CE-B$ 的正弦值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

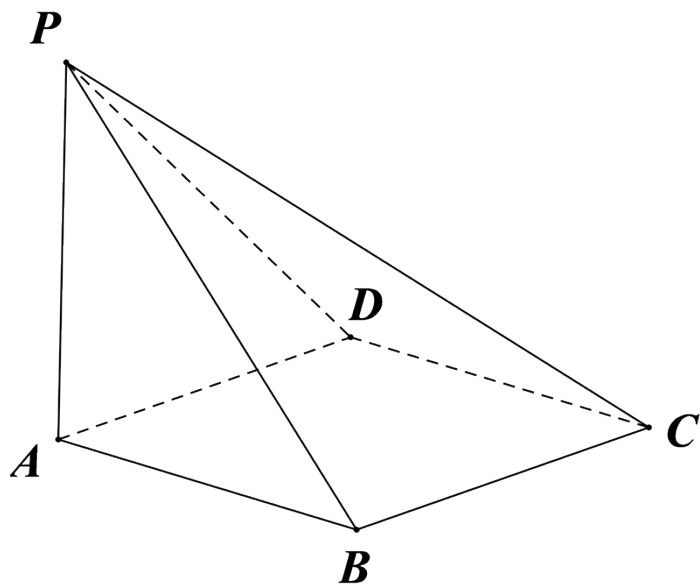
1、D

【解析】

根据三视图知, 该几何体是一条垂直于底面的侧棱为 2 的四棱锥, 画出图形, 结合图形求出底面积代入体积公式求它的体积.

【详解】

根据三视图知，该几何体是侧棱 $PA \perp$ 底面 $ABCD$ 的四棱锥，如图所示：



结合图中数据知，该四棱锥底面为对角线为 2 的正方形，

高为 $PA=2$ ，

∴四棱锥的体积为 $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^2}{2} \cdot 2 = \frac{4}{3}$.

故选：D.

【点睛】

本题考查由三视图求几何体体积，由三视图正确复原几何体是解题的关键，考查空间想象能力. 属于中等题.

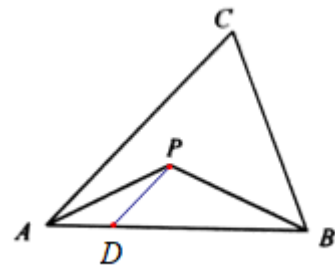
2、A

【解析】

作 $PD \parallel AC$ 交 AB 于点 D ，根据向量比例，利用三角形面积公式，得出 $S_{\triangle ADP}$ 与 $S_{\triangle ABC}$ 的比例，再由 $S_{\triangle ADP}$ 与 $S_{\triangle APB}$ 的比例，可得到结果.

【详解】

如图，作 $PD \parallel AC$ 交 AB 于点 D ，



则 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}$ ，由题意， $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ ，且 $\angle ADP + \angle CAB = 180^\circ$ ，

所以 $S_{\triangle ADP} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{DP}|\sin \angle ADP = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}| \times \frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|\sin \angle CAB = \frac{1}{12}S_{\triangle ABC}$

又 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ，所以， $S_{\triangle APB} = 3S_{\triangle ADP} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$ ，即 $\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4}$ ，

所以本题答案为 A.

【点睛】

本题考查三角函数与向量的结合，三角形面积公式，属基础题，作出合适的辅助线是本题的关键.

3、C

【解析】

由复数的几何意义可得 $|z_1 - z_2|$ 表示复数 $z_1 = 2 + i$ ， $z_2 = \cos \alpha + i \sin \alpha$ 对应的两点间的距离，由两点间距离公式即可求解.

【详解】

由复数的几何意义可得，复数 $z_1 = 2 + i$ 对应的点为 $(2, 1)$ ，复数 $z_2 = \cos \alpha + i \sin \alpha$ 对应的点为 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ，所以

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(2 - \cos \alpha)^2 + (1 - \sin \alpha)^2} = \sqrt{1 - 2\sin \alpha + 4 - 4\cos \alpha + 1} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}\sin(\alpha + \varphi)} \leq \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1，其中 \tan \varphi = 2，$$

故选 C

【点睛】

本题主要考查复数的几何意义，由复数的几何意义，将 $|z_1 - z_2|$ 转化为两复数所对应点的距离求值即可，属于基础题型.

4、A

【解析】

由给定的三视图可知，该几何体表示一个底面为一个直角三角形，

且两直角边分别为1和2，所以底面面积为 $S = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$

高为 $h = 2$ 的三棱锥，所以三棱锥的体积为 $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 1 \times 2 = \frac{2}{3}$ ，故选 A.

5、B

【解析】

求出函数的导数，利用切线方程通过 $f'(0)$ ，求解即可；

【详解】

$f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$ ，

因为 $f'(x) = \frac{1}{x+1} - a$ ，曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = 2x$ ，

可得 $1-a=2$ ，解得 $a=-1$ ，

故选：B.

【点睛】

本题考查函数的导数的几何意义，切线方程的求法，考查计算能力.

6、B

【解析】

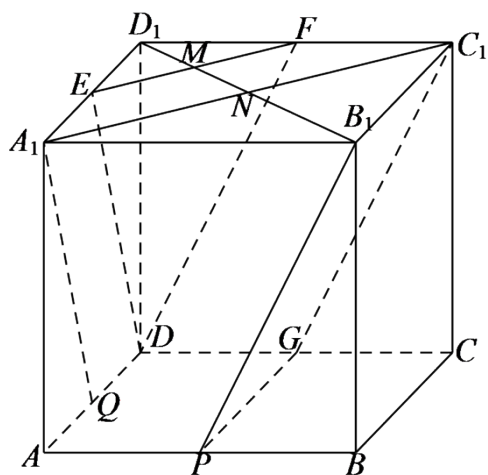
作出图形，设平面 α 分别交 A_1D_1 、 C_1D_1 于点 E 、 F ，连接 DE 、 DF 、 EF ，取 CD 的中点 G ，连接 PG 、 C_1G ，

连接 A_1C_1 交 B_1D_1 于点 N ，推导出 $B_1P \parallel C_1G$ ，由线面平行的性质定理可得出 $C_1G \parallel DF$ ，可得出点 F 为 C_1D_1 的中点，

同理可得出点 E 为 A_1D_1 的中点，结合中位线的性质可求得 $\frac{MD_1}{MB_1}$ 的值.

【详解】

如下图所示：



设平面 α 分别交 A_1D_1 、 C_1D_1 于点 E 、 F ，连接 DE 、 DF 、 EF ，取 CD 的中点 G ，连接 PG 、 C_1G ，连接 A_1C_1

交 B_1D_1 于点 N ，

Q 四边形 $ABCD$ 为正方形， P 、 G 分别为 AB 、 CD 的中点，则 $BP \parallel CG$ 且 $BP = CG$ ，

$\therefore$ 四边形 $BCGP$ 为平行四边形， $\therefore PG \parallel BC$ 且 $PG = BC$ ，

Q $B_1C_1 \parallel BC$ 且 $B_1C_1 = BC$ ， $\therefore PG \parallel B_1C_1$ 且 $PG = B_1C_1$ ，则四边形 B_1C_1GP 为平行四边形，

$\therefore B_1P \parallel C_1G$ ，Q $B_1P \parallel$ 平面 α ，则存在直线 $a \subset$ 平面 α ，使得 $B_1P \parallel a$ ，

若 $C_1G \subset$ 平面 α ，则 $G \in$ 平面 α ，又 $D \in$ 平面 α ，则 $CD \subset$ 平面 α ，

此时，平面 α 为平面 CDD_1C_1 ，直线 A_1Q 不可能与平面 α 平行，

所以, $C_1G \not\subset$ 平面 α , $\therefore C_1G \parallel a$, $\therefore C_1G \parallel$ 平面 α ,

$Q C_1G \subset$ 平面 CDD_1C_1 , 平面 $CDD_1C_1 \perp$ 平面 $\alpha = DF$, $\therefore DF \parallel C_1G$,

$Q C_1F \parallel DG$, 所以, 四边形 C_1GDF 为平行四边形, 可得 $C_1E = DG = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}C_1D_1$,

$\therefore F$ 为 C_1D_1 的中点, 同理可证 E 为 A_1D_1 的中点, $Q B_1D_1 \perp EF = M$, $\therefore MD_1 = \frac{1}{2}D_1N = \frac{1}{4}B_1D_1$, 因此, $\frac{MD_1}{MB_1} = \frac{1}{3}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查线段长度比值的计算, 涉及线面平行性质的应用, 解答的关键就是找出平面 α 与正方体各棱的交点位置, 考查推理能力与计算能力, 属于中等题.

7、D

【解析】

根据统计数据, 求出频率, 用以估计概率.

【详解】

$$\frac{704}{2212} \approx \frac{1}{\pi}.$$

故选:D.

【点睛】

本题以数学文化为背景, 考查利用频率估计概率, 属于基础题.

8、B

【解析】

化简到 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, 根据定义域排除 ACD , 计算单调性知 B 正确, 得到答案.

【详解】

$$f(x) = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} + \cos 2x = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right),$$

故函数的定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, 故 A 错误;

当 $x \in \left[-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 函数单调递增, 故 B 正确;

当 $x = -\frac{\pi}{4}$, 关于 $x = \frac{\pi}{8}$ 的对称的直线为 $x = \frac{\pi}{2}$ 不在定义域内, 故 C 错误.

平移得到的函数定义域为 R ，故不可能为 $y = f(x)$ ， D 错误。

故选： B 。

【点睛】

本题考查了三角恒等变换，三角函数单调性，定义域，对称，三角函数平移，意在考查学生的综合应用能力。

9、 C

【解析】

设 $M(t, 3\ln t)$ ，则 $N\left(t, \frac{1}{t}\right)$ ，则 $\overrightarrow{OP} = \left(\frac{2t}{3}, \ln t + \frac{1}{3t}\right)$ ，即可得 $\ln t + \frac{1}{3t} = 0$ ，设 $g(t) = \ln t + \frac{1}{3t}$ ，利用导函数判断 $g(t)$ 的零点的个数，即为所求。

【详解】

设 $M(t, 3\ln t)$ ，则 $N\left(t, \frac{1}{t}\right)$ ，所以 $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}}{3} = \left(\frac{2t}{3}, \ln t + \frac{1}{3t}\right)$ ，

依题意可得 $\ln t + \frac{1}{3t} = 0$ ，

设 $g(t) = \ln t + \frac{1}{3t}$ ，则 $g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^2} = \frac{3t-1}{3t^2}$ ，

当 $0 < t < \frac{1}{3}$ 时， $g'(t) < 0$ ，则 $g(t)$ 单调递减；当 $t > \frac{1}{3}$ 时， $g'(t) > 0$ ，则 $g(t)$ 单调递增，

所以 $g(t)_{\min} = g\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \ln 3 < 0$ ，且 $g\left(\frac{1}{e^2}\right) = -2 + \frac{e^2}{3} > 0$ ， $g(1) = \frac{1}{3} > 0$ ，

$\therefore g(t) = \ln t + \frac{1}{3t} = 0$ 有两个不同的解，所以曲线 G 上的“水平黄金点”的个数为 2。

故选： C

【点睛】

本题考查利用导函数处理零点问题，考查向量的坐标运算，考查零点存在性定理的应用。

10、 B

【解析】

构造函数 $F(x) = f(x) - 1$ ，判断出 $F(x)$ 的单调性和奇偶性，由此求得不等式 $f(a) + f(a+1) > 2$ 的解集。

【详解】

构造函数 $F(x) = f(x) - 1 = \ln \frac{1+x}{1-x} + x$ ，由 $\frac{1+x}{1-x} > 0$ 解得 $-1 < x < 1$ ，所以 $F(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$ ，且

$F(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} - x = -\ln \frac{1-x}{1+x} - x = -\left(\ln \frac{1-x}{1+x} + x\right) = -F(x)$ ，所以 $F(x)$ 为奇函数，而

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/165214014012011131>