

2023-2024 学年安徽省定远县启明中学高考冲刺模拟数学试题

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z_1 = \cos 23^\circ + i \sin 23^\circ$ 和复数 $z_2 = \cos 37^\circ + i \sin 37^\circ$ ，则 $z_1 \cdot z_2$ 为

- A. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ C. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

2. 已知函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $g(x) = 2^x + a$ ，若 $\forall x_1 \in [\frac{1}{2}, 3], \exists x_2 \in [2, 3]$ ，使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$ ，则实数 a 的取值范围

是 ()

- A. $a \leq 1$ B. $a \geq 1$
C. $a \leq 0$ D. $a \geq 0$

3. 设 $(1+i) \cdot z = 1-i$ ，则复数 z 的模等于 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. 1 D. $\sqrt{3}$

4. 已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1， O 是该正四面体外接球球心，且 $\vec{AO} = x\vec{AB} + y\vec{AC} + z\vec{AD}$ ， $x, y, z \in \mathbf{R}$ ，则 $x + y + z =$ ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

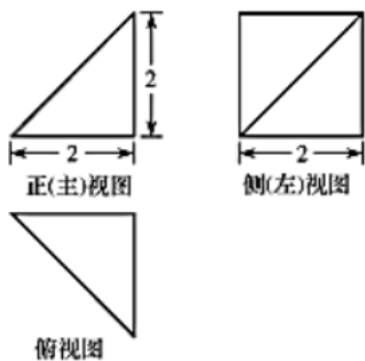
5. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 0 \leq 2x + y \leq 6 \\ 3 \leq x - y \leq 6 \end{cases}$ ，则 $z = x + 2y$ 的最大值为 ()

- A. 10 B. 8 C. 5 D. 3

6. 点 P 为棱长是 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的内切球 O 球面上的动点，点 M 为 B_1C_1 的中点，若满足 $DP \perp BM$ ，则动点 P 的轨迹的长度为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}\pi}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}\pi}{5}$ C. $\frac{4\sqrt{5}\pi}{5}$ D. $\frac{8\sqrt{5}\pi}{5}$

7. 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的表面积为 ()



- A. 8 B. $\frac{8}{3}$ C. $8+2\sqrt{2}$ D. $8+4\sqrt{2}$

8. 已知命题 $p: \exists x \in R, \text{使} \sin x < \frac{1}{2}x \text{ 成立}$. 则 $\neg p$ 为 ()

- A. $\forall x \in R, \sin x \geq \frac{1}{2}x \text{ 均成立}$ B. $\forall x \in R, \sin x < \frac{1}{2}x \text{ 均成立}$
C. $\exists x \in R, \text{使} \sin x \geq \frac{1}{2}x \text{ 成立}$ D. $\exists x \in R, \text{使} \sin x = \frac{1}{2}x \text{ 成立}$

9. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 $P(x_1, y_1), Q(-x_1, -y_1)$ 在椭圆 C 上, 其

中 $x_1 > 0, y_1 > 0$, 若 $|PQ| = 2|OF_2|$, $\left| \frac{QF_1}{PF_1} \right| \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则椭圆 C 的离心率的取值范围为 ()

- A. $\left[0, \frac{\sqrt{6}-1}{2} \right)$ B. $(0, \sqrt{6}-2]$
C. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}-1 \right]$ D. $(0, \sqrt{3}-1]$

10. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, F 为抛物线的焦点且 MN 为过焦点的弦, 若 $|OF| = 1, |MN| = 8$, 则 $\triangle OMN$ 的面积为 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 点 P 是双曲线 C 上与 A_1, A_2 不重合的动点,

若 $k_{PA_1} k_{PA_2} = 3$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 4 D. 2

12. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_4 = -3, S_{12} = 24$, 若 $a_i + a_j = 0$ ($i, j \in \mathbf{N}^*$, 且 $1 \leq i < j$), 则 i 的取值集合是 ()

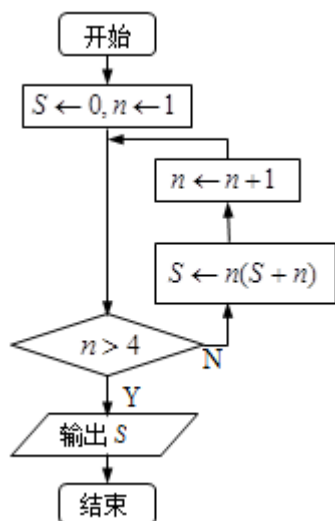
- A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{6, 7, 8\}$ C. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ D. $\{6, 7, 8, 9, 10\}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_1 的直线交椭圆 C 于 A, B 两点，若 $\angle ABF_2 = 90^\circ$ ，且 $\triangle ABF_2$ 的三边长 $|BF_2|, |AB|, |AF_2|$ 成等差数列，则 C 的离心率为_____.

14. 若函数 $f(x) = \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$ 在区间 $[0, \pi]$ 上恰有 4 个不同的零点，则正数 ω 的取值范围是_____.

15. 执行如图所示的程序框图，则输出的结果是_____.



16. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $a + \sqrt{2}b = 2c$ ，设角 C 的角平分线交 AB 于点 D ，则 $\cos C$ 的值最小时， $\frac{BD}{AD} = \underline{\hspace{1cm}}$.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $c \sin B = b \sin\left(\frac{\pi}{3} - C\right) + \sqrt{3}b$.

(1) 求角 C 的大小；

(2) 若 $c = \sqrt{7}, a + b = 3$ ，求 AB 边上的高.

18. (12 分) 已知 q, n 均为给定的大于 1 的自然数，设集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, q\}$ ， $T = \{x \mid x = x_1 + x_2q + \dots + x_nq^{n-1}, x_i \in M, i = 1, 2, \dots, n\}$.

(I) 当 $q = 2, n = 2$ 时，用列举法表示集合 T ；

(II) 当 $q = 200$ 时， $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{100}\} \subseteq M$ ，且集合 A 满足下列条件：

① 对任意 $1 \leq i < j \leq 100$ ， $a_i + a_j \neq 201$ ；

② $\sum_{i=1}^{100} a_i = 12020$.

证明: (i) 若 $\forall a_i \in A$, 则 $201 - a_i \in \bar{A}$ (集合 $\bar{A}$ 为集合 A 在集合 M 中的补集);

(ii) $\sum_{i=1}^{100} a_i^2$ 为一个定值 (不必求出此定值);

(iii) 设 $s, t \in T$, $s = b_1 + b_2q + b_3q^2 + \dots + b_nq^{n-1}$, $t = c_1 + c_2q + \dots + c_nq^{n-1}$, 其中 $b_i, c_i \in M$, $i = 1, 2, \dots, n$, 若 $b_n < c_n$, 则 $s < t$.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = xe^x - a\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)$ $x \in (0, +\infty)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 曲线 $f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线斜率为 $3(e^2 - 1)$.

(i) 求 a ;

(ii) 若 $(x - k)f'(x) \geq -(x + 1)^2$, 求整数 k 的最大值.

20. (12 分) 已知椭圆 $W: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过点 F 且斜率为 k ($k \neq 0$) 的直线 l 与椭圆 W 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 M , O 为坐标原点.

(1) 证明: 点 M 在 y 轴的右侧;

(2) 设线段 AB 的垂直平分线与 x 轴、 y 轴分别相交于点 C, D . 若 $\triangle ODC$ 与 $\triangle CMF$ 的面积相等, 求直线 l 的斜率 k .

21. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = -\frac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参数) 和曲线 $C: \begin{cases} x = 1 + \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$

(θ 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求直线 l 和曲线 C 的极坐标方程;

(2) 在极坐标系中, 已知点 M 是射线 $l_1: \theta = \alpha$ ($\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$) 与直线 l 的公共点, 点 N 是 l_1 与曲线 C 的公共点, 求

$\frac{|ON|}{|OM|}$ 的最大值.

22. (10 分) 已知集合 $A = \left\{ x \mid y = \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} - 1 \right\}$, 集合 $B = \{x \mid -1 \leq x + a \leq 2\}$.

(1) 求集合 A ;

(2) 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

利用复数的三角形式的乘法运算法则即可得出.

【详解】

$$z_1 z_2 = (\cos 23^\circ + i \sin 23^\circ) \cdot (\cos 37^\circ + i \sin 37^\circ) = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

故答案为 C.

【点睛】

熟练掌握复数的三角形式的乘法运算法则是解题的关键, 复数问题高考必考, 常见考点有: 点坐标和复数的对应关系, 点的象限和复数的对应关系, 复数的加减乘除运算, 复数的模长的计算.

2、C

【解析】

试题分析: 由题意知, 当 $x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 时, 由 $f(x) = x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$, 当且仅当 $x = \frac{4}{x}$ 时, 即 $x = 2$ 等号是成立,

所以函数 $f(x)$ 的最小值为 4, 当 $x_2 \in [2, 3]$ 时, $g(x) = 2^x + a$ 为单调递增函数, 所以 $g(x)_{\min} = g(2) = a + 4$, 又因

为 $\forall x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 3\right], \exists x_2 \in [2, 3]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 即 $f(x)$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 的最小值不小于 $g(x)$ 在 $x \in [2, 3]$ 上的最小

值, 即 $a + 4 \leq 4$, 解得 $a \leq 0$, 故选 C.

考点: 函数的综合问题.

【方法点睛】本题主要考查了函数的综合问题，其中解答中涉及到基本不等式求最值、函数的单调性及其应用、全称命题与存在命题的应用等知识点的综合考查，试题思维量大，属于中档试题，着重考查了学生分析问题和解决问题的能力，以及转化与化归思想的应用，其中解答中转化为 $f(x)$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 的最小值不小于 $g(x)$ 在 $x \in [2, 3]$ 上的最小值是解答的关键。

3、C

【解析】

利用复数的除法运算法则进行化简,再由复数模的定义求解即可.

【详解】

因为 $(1+i) \cdot z = 1-i$,

$$\text{所以 } z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i) \cdot (1-i)} = -i,$$

由复数模的定义知, $|z| = \sqrt{(-1)^2} = 1$.

故选:C

【点睛】

本题考查复数的除法运算法则和复数的模;考查运算求解能力;属于基础题.

4、A

【解析】

如图设 $AF \perp$ 平面 BCD , 球心 O 在 AF 上, 根据正四面体的性质可得 $AO = \frac{3}{4} AF$, 根据平面向量的加法的几何意义, 重心的性质, 结合已知求出 $x + y + z$ 的值.

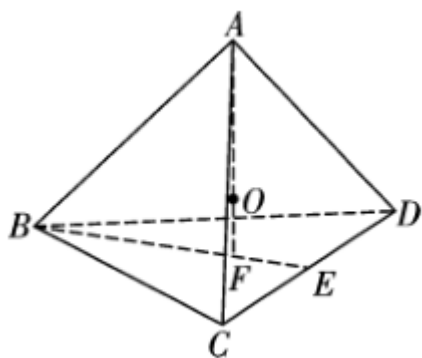
【详解】

如图设 $AF \perp$ 平面 BCD , 球心 O 在 AF 上, 由正四面体的性质可得: 三角形 BCD 是正三角形,

$$BF = \frac{2}{3} \times \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad AF = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \text{在直角三角形 } FOB \text{ 中,}$$

$$OB^2 = OF^2 + BF^2 \Rightarrow OA^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - AO\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow AO = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$AO = \frac{3}{4} AF$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$, 因为 F 为重心, 因此 $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FD} = \vec{0}$, 则 $3\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, 因此 $AO = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$, 因此 $x = y = z = \frac{1}{4}$, 则 $x + y + z = \frac{3}{4}$, 故选 A.



【点睛】

本题考查了正四面体的性质，考查了平面向量加法的几何意义，考查了重心的性质，属于中档题.

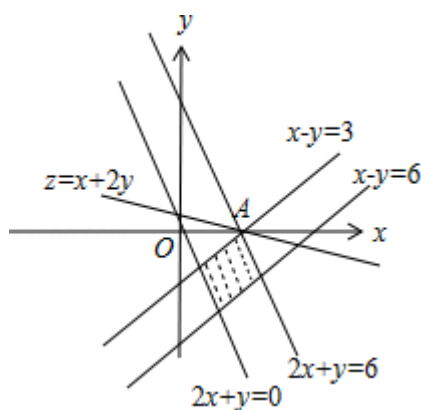
5、D

【解析】

画出可行域,将 $z = x + 2y$ 化为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{z}{2}$,通过平移 $y = -\frac{1}{2}x$ 即可判断出最优解,代入到目标函数,即可求出最值.

【详解】

解:由约束条件 $\begin{cases} 0 \leq 2x + y \leq 6 \\ 3 \leq x - y \leq 6 \end{cases}$ 作出可行域如图,



化目标函数 $z = x + 2y$ 为直线方程的斜截式, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{z}{2}$.由图可知

当直线 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{z}{2}$ 过 $A(3, 0)$ 时,直线在 y 轴上的截距最大, z 有最大值为 3.

故选:D.

【点睛】

本题考查了线性规划问题.一般第一步画出可行域,然后将目标函数转化为 $y = ax + bz$ 的形式,在可行域内通过平移 $y = ax$ 找到最优解,将最优解带回到目标函数即可求出最值.注意画可行域时,边界线的虚实问题.

6、C

【解析】

设 B_1B 的中点为 H ，利用正方形和正方体的性质，结合线面垂直的判定定理可以证明出 $BM \perp$ 平面 DCH ，这样可以确定动点 P 的轨迹，最后求出动点 P 的轨迹的长度。

【详解】

设 B_1B 的中点为 H ，连接 CH, DH ，因此有 $CH \perp BM$ ，而 $DC \perp MB$ ，而 $DC, CH \subset$ 平面 CDH ，

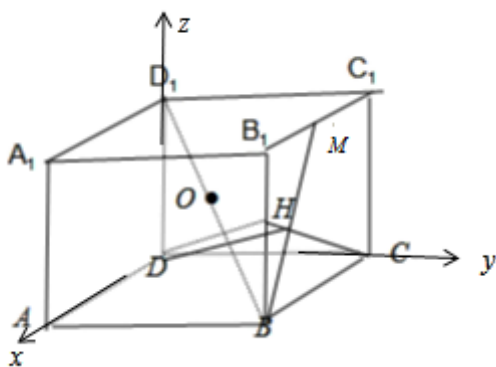
$DC \cap CH = C$ ，因此有 $BM \perp$ 平面 DCH ，所以动点 P 的轨迹平面 DCH 与正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的内切球 O 的交线. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，所以内切球 O 的半径为 $R = 1$ ，建立如下图所示的以 D 为坐标原点的空间直角坐标系：

因此有 $O(1,1,1), C(0,2,0), H(2,2,1)$ ，设平面 DCH 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$ ，所以有

$$\begin{cases} \vec{m} \perp \overrightarrow{DC} \\ \vec{m} \perp \overrightarrow{DH} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{DH} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{m} = (1, 0, -2), \text{ 因此 } O \text{ 到平面 } DCH \text{ 的距离为 } d = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{OD}|}{|\vec{m}|} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

所以截面圆的半径为： $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，因此动点 P 的轨迹的长度为 $2\pi r = \frac{4\sqrt{5}}{5}\pi$ 。

故选：C



【点睛】

本题考查了线面垂直的判定定理的应用，考查了立体几何中轨迹问题，考查了球截面的性质，考查了空间想象能力和数学运算能力.

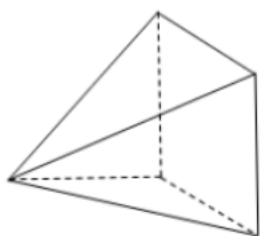
7、D

【解析】

根据三视图还原几何体为四棱锥，即可求出几何体的表面积。

【详解】

由三视图知几何体是四棱锥，如图，



且四棱锥的一条侧棱与底面垂直，四棱锥的底面是正方形,边长为 2,棱锥的高为 2,

$$\text{所以 } S = 2 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 8 + 4\sqrt{2},$$

故选: D

【点睛】

本题主要考查了由三视图还原几何体,棱锥表面积的计算,考查了学生的运算能力,属于中档题.

8、A

【解析】

试题分析: 原命题为特称命题, 故其否定为全称命题, 即 $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, \sin x \geq \frac{x}{2}$.

考点: 全称命题.

9、C

【解析】

根据 $|PQ| = 2|OF_2|$ 可得四边形 PF_1QF_2 为矩形, 设 $PF_1 = n, PF_2 = m$, 根据椭圆的定义以及勾股定理可得

$$\frac{4c^2}{2(a^2 - c^2)} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m}, \text{再分析 } t = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \text{ 的取值范围, 进而求得 } 2 < \frac{4c^2}{2(a^2 - c^2)} \leq \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ 再求离心率的范围即可.}$$

【详解】

设 $PF_1 = n, PF_2 = m$, 由 $x_1 > 0, y_1 > 0$, 知 $m < n$,

因为 $P(x_1, y_1), Q(-x_1, -y_1)$ 在椭圆 C 上, $|PQ| = 2|OP| = 2|OF_2|$,

所以四边形 PF_1QF_2 为矩形, $QF_1 = PF_2$;

$$\text{由 } \frac{|QF_1|}{|PF_1|} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 可得 } \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{m}{n} < 1,$$

由椭圆的定义可得 $m + n = 2a, m^2 + n^2 = 4c^2$ ①,

平方相减可得 $mn = 2(a^2 - c^2)$ ②,

$$\text{由 ①② 得 } \frac{4c^2}{2(a^2 - c^2)} = \frac{m^2 + n^2}{mn} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m};$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/165222013340011140>