1．1集合的含义与表示（优质课）教案

教学目标：

1、 通过实例了解集合的含义，并掌握集合中元素的三个特性。
2、 掌握元素与集合的关系，并能用符号“∈”或“∉”来表示。
3、 掌握列举法和描述法，会选择不同的方法来表示集合，记住常用数集的符号。

教学过程：

一、集合与元素的概念：

一般地，一定范围内某些确定的，不同的对象的全体构成一个集合，简称集。集合中每一个对象称为该集合的元素。如所有的三角形可以组成集合，每个三角形都是这个集合的元素；所有的直角三角形也可以组成集合，每个直角三角形都是集合的元素；由1，2，3，4组成的集合{1，2，3，4}。1，2，3，4就是这个集合的元素 。类似“与2非常接近的全体实数”，“高个子”这样模糊的说法就不能确定集合。

特别提醒：1、集合是一个“整体”。一些对象一旦组成了集合，那么这个集合就是这些对象的全体，而非个别对象。2、集合具有两个方面的意义，即：凡是符合条件的对象都是它的元素；只要是它的元素就必须符合条件。3、集合通常用大写的字母表示，如A、B、C、……；元素通常用小写的字母表示，如a、b、c、d……。

二、集合中元素的特性：

1、确定性：设A是一个给定的集合，x是某一具体的对象，则x或者是A的元素，或者不是A的元素，二者必居其一，不能模棱两可．

2、互异性： 对于一个给定的集合，它的任意两个元素是不能相同的。集合中相同的元素只能算是一个。如方程$x^2-2x+1=0$有两个重根$x_1=x_2=1$，其解集只能记为$\{1\}$，而不能记为$\{1,1\}$。

3、无序性：集合中的元素是不分顺序的．如$\{a,b\}$和$\{b,a\}$表示同一个集合．

特别提醒：集合和点的坐标是不同的概念，在平面直角坐标系中，点（1，0）和点（0，1）表示不同的两个点，而集合｛1，0｝和｛0，1｝表示同一个集合。

三、元素与集合的关系：

一般地，如果a是集合A的元素，就说a属于A，记作$a\in A$；如果a不是集合的元素，就说a不属于A，记作$a\notin A$。

特别提醒：1、“属于”号$\in$与“不属于”号$\notin$，使用时不可反过来写，“$A\ni -6$”与“$A\not\ni 8$”的写法是错误的；2、根据集合中元素的确定性，$a\in A$或$a\notin A$，这两种情况必有一种成立；3、集合和元素是两个不同的概念，它们之间是个体与整体的关系，并且这种关系是相对的。如：集合$A=\{1\}$相对于集合$B=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$而言，A是B的一个元素；元素与集合之间不存在大小与相等的关系，如2与$\{3\}$，只能是$2\notin\{3\}$，不能写成$2\neq\{3\}$。4、符号$\in$和$\notin$是表示元素和集合之间关系的，不能用来表示集合之间的关系，如：$\{1\}\in\{1,2\}$的写法是错误的，而$\{1\}\in\{\{1\},\{2\}\}$的写法是正确的。

四、集合的分类：

按照集合中元素的个数是有限还是无限，集合可分为：有限集和无限集。

（1）**有限集：**含有有限个元素的集合；

（2）**无限集：**含有无限个元素的集合.

（3）**空集**：特别地，不含任何元素的集合叫做**空集**，记作$\varnothing$．空集是个特殊的集合，空集归入有限集。如：$\{x\in R\mid x^2+1=0\}$。

按照集合中元素的形式，性质及属性，集合可分为：

（1）**单元素集**：只含一个元素的集合；如$\{0\}$，$\{\varnothing\}$。

（2）**数集**：有一些数字组成的集合；

（3）**点集**：由符合某一条件的点(x,y)，组成的集合；$\{(x,y)|y=2x+1\}$

（4）**解集**：由方程或方程组，不等式或不等式组的解组成的解的集合，简称解集。如：方程$x^2-x-2=0$的解集是：$\{-1,2\}$。

五、常用数集的关系及记法

$$\text{实数集}(R)\begin{cases}\text{有理数集}(\mathrm{Q})\begin{cases}\text{整数}(\mathrm{Z})\begin{cases}\left.\begin{matrix}\text{正整数}(\mathrm{N}^*)\\ 0\end{matrix}\right\}\text{自然数}(\mathrm{N})\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数:指有限小数和无限循环小数.}\end{cases}\\ \text{无理数:指无限不循环小数.}\end{cases}$$

六：集合的表示方法

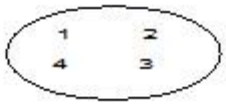
（1）**列举法**：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合。如，由方程$x^2-1=0$的所有解组成的集合，可以表示为{-1，1}

特别提醒：1、元素间用分隔号“，”；2、元素不重复；3、不考虑元素顺序；4、适用于表示元素较少的集合；对于含有较多元素的集合，如果构成该集合的元素有明显规律，可用列举法，但必须把元素间的规律显示清楚后方能用省略号。如：从 51 到 100 的所有整数组成的集合：{51，52，53，…，100}；所有正奇数组成的集合：{1，3，5，7，…}

（2）**描述法**：用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合，并把这个条件写在大括号内表示集合的方法。①格式：$\{x\in A|P(x)\}$；②含义：它表示集合由具有性质$P(x)$的所有元素构成的。其中x为该集合中元素的代表形式，它表明了该集合中的元素是“谁”，是“什么样”；I表明了x的范围；$P(x)$为该集合中元素所具有的特征。如：不等式$x-3>2$的解集可以表示为：$\{x\in R\mid x-3>2\}$或$\{x\mid x-3>2\}$。

特别提醒：1、写清楚该集合中元素的代号；2、说明该集合中元素的特征；3、不能出现未被说明的字母；4、多层描述时，应当准确使用“或”、“且”、“非”；5、所有描述的内容都要写在大括号内；6、用于描述的语言要力求简明、确切。7、错误表示法：｛实数集｝或｛全体实数｝；正确的表示方法为：$R=\{\text{实数}\}$

（3）**韦恩图法**：用一条封闭的曲线的内部来表示一个集合的方法。如：集合$\{1,2,3,4\}$可用韦恩图表示为：



典 例 讲 练

类型一 对集合概念的理解

例 1：判断下列各组对象能否组成一个集合：

(1)9 以内的正偶数；

(2)篮球打得好的人；

(3)2012 年伦敦奥运会的所有参赛运动员；

(4)高一(1)班所有高个子同学.

解析：(2)中的“篮球打得好”，(4)中的“高个子”标准不明确，即对象不确定，所以不能构成集合．对于(1)、(3)，其中的对象都是确定的，所以能构成集合．

答案：（1）能（2）不能（3）能（4）不能

练习1：有下列4组对象：(1)某校2015级新生；(2)小于0的自然数；(3)所有数学难题；(4)接近1的数．其中能构成集合的是________．

答案：(1)(2)

练习2：(2014～2015学年度四川德阳五中高一上学期月考)下列各组对象中，不能组成集合的是(　　)

A．所有的正数　　B．所有的老人

C．不等于零的数　　D．我国古代四大发明

答案：B

类型二 集合中元素的特性

例2：集合A是含有两个不同实数$a-3,2a-1$的集合，求实数a的取值范围．

解析：根据题意可知A中有两个元素，由集合中元素的互异性，可得$a-3\neq 2a-1$，所以$a\neq -2$．即实数a的取值范围为$a\in \mathrm{R}$，$a\neq -2$．

答案：$a\in \mathrm{R}$，$a\neq -2$．

练习1：能够组成集合的是（　　）

A．与2非常接近的全体实数；　　B．很著名的科学家的全体；

C．某教室内的全体桌子；　　D．与无理数π相差很小的数

答案：C

练习2：若一个集合中的三个元素a，b，c是$\triangle ABC$的三边长，则$\triangle ABC$一定不是(　　)

A．锐角三角形　　B．等腰三角形

C．钝角三角形　　D．直角三角形

答案：B

类型三 元素与集合的关系

例3：已知集合A由$a+2$，$(a+1)^2$，a^2+3a+3三个元素构成，且$1\in A$，求实数a的值．

解析：①若$a+2=1$，则$a=-1$，此时A中有1,0,1，不符合要求；

②若$(a+1)^2=1$，则$a=0$或-2．当$a=0$时，A中有2,1,3，符合要求；当$a=-2$时，A中有0,1,1，不符合要求；

③若$a^2+3a+3=1$，则$a=-1$或-2．当$a=-1$时，A中有1,0,1，不符合要求；当$a=-2$时，A中有0,1,1，不符合要求．

综上所述，实数a的值为0．

答案：0

练习1：(2014～2015学年度西藏拉萨中学高一上学期月考)已知集合$A=\{x|ax^2-3x+2=0,a\in \mathbf{R}\}$，若$A$中只有一个元素，则$a$的值是(　　)

A．0　　B．$\dfrac{9}{8}$

C．0或$\dfrac{9}{8}$　　D．$-\dfrac{9}{8}$

答案：C

练习2：(2014～2015学年度山西太原市高一上学期期中测试)已知集合$A=\{x|x(x-2)=0\}$，那么(　　)

A．$0\in A$　　B．$2\notin A$

C．$-2\in A$　　D．$0\notin A$

答案：A

类型四：集合的表示方法

例 4：用列举法表示下列集合

（1）$A=\{x\in Z\,\|x|\le 2\}$；　　（2）$M=\{(x,y)|x+y=4,x\in N^*,y\in N^*\}$

解析：（1）$\because |x|\le 2$，$x\in Z$　$\therefore x=-2,-1,0,1,2$　　$\therefore A=\{-2,-1,0,1,2\}$

（2）$\because x+y=4,x\in N^*,y\in N^*$　$\therefore \begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$或$\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$或$\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$　$\therefore M=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

答案：（1）$A=\{-2,-1,0,1,2\}$

（2）$M=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

练习 1：（2014～2015 学年度上海复旦大学附属中学高一上学期期中测试）用列举法表示集合 $A=\left\{a\,\middle|\,\dfrac{6}{5-a}\in N^*，a\in Z\right\}$=__________.

答案：{－1, 2, 3, 4}

练习 2：用列举法表示下列集合

方程$x^2-2=0$的所有实数根组成的集合为：__________________

答案：$\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$

当 堂 检 测

1. 下列说法：

①地球周围的行星能确定一个集合；

②实数中不是有理数的所有数能确定一个集合；

③我们班视力较差的同学能确定一个集合．

其中正确的个数是(　　)

A．0　　　B．1

C．2　　　D．3

答案：B

2. 集合 $A=\{y|y=x^2+1\}$，集合 $B=\{(x,y)|y=x^2+1\}$，(A、B 中 $x\in R$，$y\in R$)．关于元素与集合关系的判断都正确的是(　　)

A．$2\in A$，且 $2\in B$

B．$(1,2)\in A$，且 $(1,2)\in B$

C．$2\in A$，且 $(3,10)\in B$

D．$(3,10)\in A$，且 $2\in B$

答案： C

3. 集合$\{y|y=x，-1\le x\le 1，x\in \mathbf{Z}\}$用列举法表示是(　　)

A．{－1,0,1}　　　　B．{0,1}

C．{－1,0}　　　　D．{－1,1}

答案：A

4. 满足不等式$1<1+2x<19$的合数组成的集合为____。

答案：$\{4,6,8\}$

5. 用另一种方法表示下列集合：

(1) $\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7}\right\}=$_____。

(2) $\{$绝对值不大于3的整数$\}=$______。

答案：(1) $\left\{x\middle|x=\frac{n}{n+2},1\le n\le 5,n\in N_+\right\}$ (2) $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

6. 集合$\{x|x=|x|,x<5且x\in Z\}$可用列举法表示为____。

答案：$\{0,1,2,3,4\}$

7. 满足不等式$1<1+2x<19$的合数组成的集合为____。

答案：$\{4,6,8\}$

当 堂 总 结

____

____

家 庭 作 业

基础巩固

1. 若集合 A 含有两个元素 0，1，则(　　)

A. $1\notin A$　　　　B. $0\in A$

C. $0\notin A$　　　　D. $2\in A$

答案：B

2. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in A, x-y\in A\}$，则 B 中所含元素的个数为(　　)

A. 3　　　　B. 6

C. 8　　　　D. 10

答案：D

3. 已知集合 A 含有三个元素 1，0，x，若 $x^2\in A$，则实数 $x=$________.

答案：-1

4. 集合$\left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}\right\}$可用特征性质描述法表示为__________.

答案：$\{x\mid x=\frac{n}{n+3}, n\in N_+, n\le 5\}$

5. （2015 上海模拟）设 a，b∈R，集合{1，a+b，a}={0，$\frac{b}{a}$，b}，则 b-a=（　）

A. 1　　　　　　　　B. -1　　　　　　　　C. 2　　　　　　　　D. -2

答案：C

能力提升

6. 已知集合 A 中含有三个元素 $m-1,3m$，m^2-1，若 $-1\in A$，求实数 m 的值．

答案：$-\frac{1}{3}$.

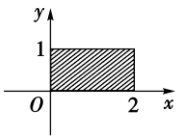
7. 已知集合 M 含有三个元素 $1,2$，x^2，则 x 的值为______________.

答案：$x\neq\pm1$，且 $x\neq\pm\sqrt{2}$

8. 若集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{y|y=x^2+2\,000,x\in A\}$，则用列举法表示集合 $B=$____________.

答案：$\{2\,000,2\,001,2\,004\}$

9. 用描述法表示图中阴影部分(不含边界)的点构成的集合；



答案：$\{(x，y)|0<x<2,0<y<1\}$.

10. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|ax^2-3x+1=0，a\in\mathbf{R}\}$，若 A 中元素最多只有一个，求 a 的取值范围．

答案：$a=0$ 或 $a\geqslant\frac{9}{4}$.

1.2 集合的关系与运算（优质课）教案

教学目标：

4、 掌握两个集合之间的包含关系和相等关系，能识别给定集合的子集。

5、 了解空集的含义与性质。

6、 理解两个集合的并集与交集的含义，会求两个简单集合的并集与交集。

7、 理解在给定集合中一个子集的补集的含义，会求给定子集的补集。

教学过程：

一、子集：

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，我们就说集合 A 包含于集合 B，或集合 B 包含集合 B。

记作: $A\subseteq B或B\supseteq A$ ，　　读作：A 包含于 B 或 B 包含 A。

特别提醒：1、"A 是 B 的子集"的含义是：集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，即由 $x\in A$，能推出 $x\in B$。如：$\{1,-1\}\subseteq\{-1,0,1,2\}$；$\{深圳人\}\subseteq\{中国人\}$。2、当"$A$ 不是 B 的子集"时，我

们记作:“ $A\not\subseteq B\left(或B\not\supseteq A\right)$”,读作:“ A 不包含于 B ,(或 B 不包含 A)”。如: $\{1,2,3\}\not\subseteq\{1,3,4,5\}$ 。

3、任何集合都是它本身的子集。即对于任何一集合 A ,它的任何一个元素都属于集合 A 本身,记作 $A\subseteq A$ 。4、我们规定:空集是任何集合的子集,即对于任一集合 A ,有 $\varnothing\subseteq A$ 。5、在子集的定义中,不能理解为子集 A 是集合 B 中部分元素组成的集合。因为若 $A=\varnothing$,则 A 中不含有任何元素;若 $A=B$,则 A 中含有 B 中的所有元素,但此时都说集合 A 是集合 B 的子集。

二、集合相等:

一般地,对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素,我们就说集合 A 等于集合 B ,记作 $A=B$ 。

特别提醒:集合相等的定义实际上给出了我们判断或证明两个集合相等的办法,即欲证 $A=B$,只需证 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 都成立即可。

三、真子集:

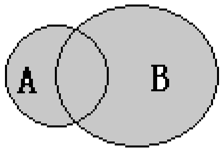
对于两个集合 A 与 B ,如果 $A\subseteq B$,并且 $A\neq B$,我们就说集合 A 是集合 B 的真子集,
记作:$A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$, 读作 A 真包含于 B 或 B 真包含 A.

特别提醒:1、空集是任何非空集合的真子集。2、对集合 A , B , C ,如果 $A\subsetneqq B$, $B\subsetneqq C$,那么 $A\subsetneqq C$ 。3、两个集合 A 、 B 之间的关系: $\begin{cases} A\subseteq B\begin{cases} A=B\Rightarrow A\subseteq B且B\subseteq A \\ A\neq B\Rightarrow A\subsetneqq B \end{cases} \\ A\subsetneqq B \\ A\not\subseteq B \end{cases}$

四、并集:

1、并集的概念:

一般地,由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的并集。
记作:$A\cup B$,读作: A 并 B 。
符号语言表达式为: $A\cup B=\left\{x\middle|x\in A,\ 或x\in B\right\}$ 。
韦恩(Venn)图表示,如右图(阴影部分)



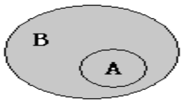
如:{1,2,3,6} $\cup$ {1,2,5,10} = {1,2,3,5,6,10}。

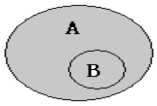
特别提醒:(1)定义中“或”字的意义:用“或”字连接的并列成份之间不一定是互相排斥的。“ $x\in A,\ 或x\in B$ ”这一条件包含下列三种情况: $x\in A,\ 但x\notin B$; $x\in B,\ 但x\notin A$; $x\in A,\ 且x\in B$ 。(2)对于 $A\cup B=\left\{x\middle|x\in A,\ 或x\in B\right\}$,不能认为是由 A 的所有元素和 B 的所有元素组成的集合,因为 A 与 B 可能有公共元素,所以上述看法,从集合元素的互异性看是错误的。

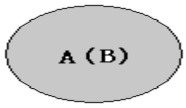
2、并集的性质:

(1) $A\cup B\supseteq A, A\cup B\supseteq B$; (2) $A\cup A=A$; (3) $A\cup\varnothing=A$; (4) $A\cup B=B\cup A$ 。

3、讨论两集合在各种关系下的并集情况:







① ② ③

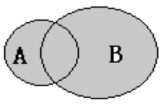
(1)若 $A\subsetneqq B$,则 $A\cup B=B$,如图①;

(2)若 $B\subsetneqq A$,则 $A\cup B=A$,如图②;

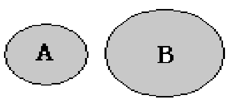
(3)若 $A=B$,则 $A\cup B=A$ ($A\cup B=B$),如图③;

(4)若 A 与 B 相交,则 $A\cup B$ =图④中的阴影部分;

(5)若 A 与 B 相离,则 $A\cup B$ =图⑤中的阴影部分。



④



⑤

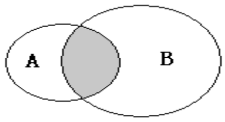
五、交集:

1、交集的概念:

一般地，由所有属于A且属于B的元素所组成的集合,叫做A与B的交集。

记作：$A\bigcap B$；读作：A交B。

符号语言表达式为：$A\bigcap B=\left\{x\middle|x\in A，且x\in B\right\}$



韦恩（Venn）图表示，如右图（阴影部分）：

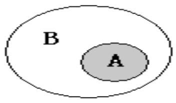
如：{1,2,3,6} ⋂ {1,2,5,10} = {1,2}.

特别提醒：对于$A\bigcap B=\left\{x\middle|x\in A，且x\in B\right\}$，是指$A\bigcap B$中的任一元素都是$A$与$B$的公共元素，同时这些公共元素都属于$A\bigcap B$。还有并不是任何两个集合总有公共元素，当集合$A$与集合$B$没有公共元素时，不能说$A$与$B$没有交集，而是$A\bigcap B=\varnothing$。

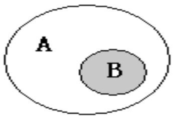
2、交集的运算性质：

（1）$A\bigcap B\subseteq A, A\bigcap B\subseteq B$；（2）$A\bigcap A=A$；（3）$A\bigcap\varnothing=\varnothing$；（4）$A\bigcap B=B\bigcap A$。

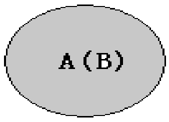
3、讨论两集合在各种关系下的交集情况：



①



②



③

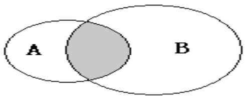
（1）若$A\subsetneqq B$，则$A\bigcap B=A$，如图①；

（2）若$B\subsetneqq A$，则$A\bigcap B=B$，如图②；

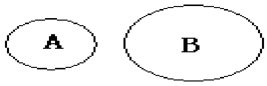
（3）若$A=B$，则$A\bigcap B=A$（$A\bigcap B=B$），如图③；

（4）若A与B相交，则$A\bigcap B=$图④中的阴影部分；

（5）若A与B相离，则$A\bigcap B=\varnothing$，如图⑤。



④



⑤

六：全集与补集：

1、全集的概念：

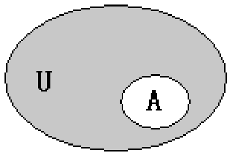
如果一个给定的集合含有我们所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看作一个全集，全集通常用U表示。

2、补集的概念：

一般地，设U是一个集合，A是U的一个子集（即$A\subseteq U$），由U中所有不属于A的元素组成的集合，叫做U中子集A的补集（或余集）。

记作：$\complement_U A$；读作：A在U中的补集；

符号语言表达式为：$\complement_U A=\left\{x\middle|x\in U,且x\notin A\right\}$；



韦恩（Venn）图表示，如右图（阴影部分）：

典例讲练

类型一 子集、真子集的概念

例1：已知集合M满足{1,2}⊆$M\subsetneqq${1,2,3,4,5}，求所有满足条件的集合M.

解析：由条件知，集合M中一定有元素1,2，可能含有3,4,5中的部分数．故满足条件的集合M可以是：{1,2}，{1,2,3}，{1,2,4}，{1,2,5}，{1,2,3,4}，{1,2,3,5}，{1,2,4,5}

答案：{1,2}，{1,2,3}，{1,2,4}，{1,2,5}，{1,2,3,4}，{1,2,3,5}，{1,2,4,5}

练习1：写出满足{3,4}$\subsetneqq P$⊆{0,1,2,3,4}的所有集合P.

答案：{0,3,4}，{1,3,4}，{2,3,4}，{0,1,3,4}，{0,2,3,4}，{1,2,3,4}，{0,1,2,3,4}.

练习2： (2014～2015学年度重庆一中高一上学期期中测试)以下表示正确的是(　　)

A．∅＝0　　　　B．∅＝{0}

C．∅∈{0}　　　D．∅⊆{0}

答案：D

类型二 集合相等关系的应用

例 2：已知集合$\{x^2, x+y, 0\}=\{x, \frac{y}{x}, 1\}$，求 $x^{2015}+y^{2015}$的值为________.

解析：由题意知，$0\in\{x, \frac{y}{x}, 1\}$，

又∵$x\neq0$，∴$y=0$.

∴集合$\{x^2, x+y, 0\}=\{x^2, x, 0\}$.

又 $1\in\{x^2, x, 0\}$，且 $x\neq1$，∴$x^2=1$，∴$x=-1$.

故 $x^{2015}+y^{2015}=(-1)^{2015}+0^{2015}=-1$.

答案：-1

练习 1：已知集合 $A=\{2, a, b\}$，集合 $B=\{2a, 2, b^2\}$，若 $A=B$，求 a、b 的值.

答案：$\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}$ 或$\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$.

练习 2：将下列两集合相等的组的序号填在横线上______________。

① $P=\{x|x=2n, n\in Z\}, Q=\{x|x=2(n-1), n\in Z\}$；

② $P=\{x|x=2n-1, n\in N^*\}, Q=\{x|x=2n+1, n\in N^*\}$

③ $P=\{x|x^2-x=0\}, Q=\left\{x\middle|x=\frac{1+(-1)^n}{2}, n\in Z\right\}$

答案：①③

类型三 由集合关系求参数取值范围

例 3：已知集合 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant4\}$，$B=\{x|2m-1<x<m+1\}$，且 $B\subseteq A$. 求实数 m 的取值范围.

解析：(1)当 $B=\varnothing$时，$m+1\leqslant2m-1$.

解得 $m\geqslant2$，这时 $B\subseteq A$.

(2)当 $B\neq\varnothing$时，由 $B\subseteq A$ 得$\begin{cases}-3\leqslant2m-1\\m+1\leqslant4\\2m-1<m+1\end{cases}$，

解得$-1\leqslant m<2$.

综上得 $m\geqslant-1$.

答案：$m\geqslant-1$.

练习 1：若$\{x|2x-a=0\}\subsetneqq\{x|-1<x<3\}$，则实数 a 的取值范围是________.

答案：$\{a|-2<a<6\}$

练习 2：(2014～2015 学年河南洛阳市高一上学期期中测试)设集合 $A=\{x|x^2+4x=0\}$，$B=\{x\in R|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

答案：$a\leqslant-1$ 或 $a=1$.

类型四 交集的概念

例 4：设集合 A＝{x|x＋2＝0}，集合 B＝{x|x2－4＝0}，则 A∩B＝(　　)

A. {－2}　　B. {2}　　C. {－2,2}　　D. ∅

解析：∵A＝{x|x＋2＝0}＝{－2}，B＝{x|x2－4＝0}＝{－2,2}，∴A∩B＝{－2}．

答案：A

练习 1：(2015·广东理)若集合 M＝{x|(x＋4)(x＋1)＝0}，N＝{x|(x－4)(x－1)＝0}，则 M∩N＝(　　)

A．{1,4}　　B．{－1，－4}　　C．{0}　　D．∅

答案：D

练习 2：(2015·广东文)若集合 M＝{－1,1}，N＝{－2,1,0}，则 M∩N＝(　　)

A．{0，－1}　　B．{0}　　C．{1}　　D．{－1,1}

答案：　C

类型五 并集的概念

例 5：集合 A＝{0,2，a}，B＝{1，a2}，若 A∪B＝{0,1,2,4,16}，则 a 的值为(　　)

A．0　　B．1　　C．2　　D．4

解析：　∵A＝{0,2，a}，B＝{1，a^2}，A∪B＝{0,1,2,4,16}，

$$\therefore\begin{cases}a^2=16\\a=4\end{cases}\ ①\text{或}\begin{cases}a^2=4\\a=16\end{cases}\ ②,$$

由①得 a＝4，②无解．综上，得 a＝4.

答案：D

练习 1：(2014～2015 学年度江西临川一中高一上学期期中测试)若集合 A＝{0,1,2,3}，集合 B＝{1,2,4}，则 A∪B＝(　　)

A．{0,1,2,3,4}　　B．{1,2,3,4}　　C．{1,2}　　D．{0}

答案：A

练习 2：(2014～2015 学年度广东珠海斗门一中高一上学期期中测试)已知集合 M＝{－1,1,2}，N＝{1,4}，则 M∪N＝(　　)

A．{1}　　B．{1,4}　　C．{－1,1,2,4}　　D．∅

答案：　C

类型六 补集的运算

例 6：设全集 U＝{2,3，a2＋2a－3}，A＝{|2a－1|,2}，∁UA＝{5}，则 a 的值为__________．

解析：因为$\complement_UA$＝{5}，且 $A\cup\complement_UA$＝{2，|2a－1|,5}＝U＝{2,3，a^2＋2a－3}，

$$\therefore\begin{cases}a^2+2a-3=5 & ①\\|2a-1|=3 & ②\end{cases},$$

解①得 a＝2 或 a＝－4；解②得 a＝2 或 a＝－1.

所以 a 的值为 2.

答案：　2

练习 1：(2014～2015 学年度山西朔州一中高一上学期期中测试)已知全集 U＝{1,2,3,4,5,6,7}，A＝{2,4,6}，B＝{1,3,5,7}，则 A∩(∁UB)等于(　　)

A．{2,4,6}　　B．{1,3,5}　　C．{2,4,5}　　D．{2,5}

答案：A

练习 2：(2014·湖北文，1)已知全集 U＝{1,2,3,4,5,6,7}，集合 A＝{1,3,5,6}，则 ∁UA＝(　　)

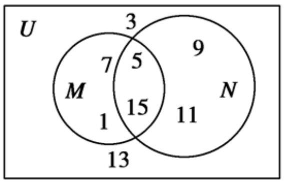
A．{1,3,5,6}　　B．{2,3,7}　　C．{2,4,7}　　D．{2,5,7}

答案：　C

类型七 应用 Venn 图进行集合间的交、并、补运算

例 7：全集 U＝{不大于 15 的正奇数}，M∩N＝{5,15}，∁U(M∪N)＝{3,13}，(∁UM)∩N＝{9,11}，求 M.

解析：



答案： {1,5，7，15}

练习 1：已知 M、N 为集合 I 的非空真子集，且 M、N 不相等，若 N∩(∁IM)＝∅，则 M∪N＝(　　)

A. M　　B. N　　C. I　　D. ∅

答案：A

练习 2：(2015·湖南文，11)已知集合 U＝{1,2,3,4}，A＝{1,3}，B＝{1,3,4}，则 A∪(∁UB)＝________.

答案： {1,2,3}

当 堂 检 测

1. (2014～2015 学年度江西临川一中高一上学期期中测试)下列集合中，只有一个子集的集合是(　　)

A. $\{x|x+3=3\}$　　B. $\{(x,y)|y^2=-x^2,x、y\in R\}$

C. $\{x|x^2\leqslant 0\}$　　D. $\{x|x^2-x+1=0\}$

答案：D

2. 已知集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{-1,0,a+3\}$，且 $A\subseteq B$，则 $a=$(　　)

A. 1　　B. 0

C. －2　　D. －3

答案： C

3. (2014～2015 学年度北京市丰台二中高一上学期期中测试)已知集合 $A=\{x|x^2-2x=0\}$，$B=\{0,1,2\}$，则 $A\cap B=$(　　)

A. {0}　　B. {0,1}

C. {0,2}　　D. {0,1,2}

答案：C

4. (2014～2015 学年度济南市第一中学高一上学期期中测试)满足条件 $M\cup\{1\}=\{1,2,3\}$的集合 M 的个数是(　　)

A. 4　　B. 3

C. 2　　D. 1

答案：C

5. (2014～2015 学年度宁夏银川一中高一上学期期中测试)如果 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$M=\{1,2,3\}$，$N=\{2,3,5\}$，那么$(\complement_U M)\cap N=$(　　)

A. ∅　　B. {1,3}

C. {1}　　D. {5}

答案：D

当堂总结

____

____

家庭作业

基础巩固

1. 集合 $A=\{x|0\leqslant x<3$ 且 $x\in\mathbf{N}\}$的真子集个数是(　　)

A．16　　　　B．8

C．7　　　　D．4

答案：C

2．满足$\{a，b\}\subseteq A\subsetneqq\{a，b，c，d\}$的集合 A 有________个(　　)

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．4

答案：C

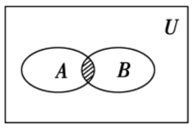
3．(2014～2015 学年度广东肇庆市高一上学期期中测试)已知 $P=\{x|-1<x<3\}$，$Q=\{x|-2<x<1\}$，则 $P\cap Q=$(　　)

A．$\{x|-2<x<1\}$　　　　B．$\{x|-2<x<3\}$

C．$\{x|1<x<3\}$　　　　D．$\{x|-1<x<1\}$

答案：D

4．(2014～2015 学年度山西太原市高一上学期期中测试)设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，则图中阴影部分表示的集合为(　　)



A．$\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$　　　　B．$\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$

C．$\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$　　　　D．$\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$

答案：B

5．(2015·安徽文)设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,2\}$，$B=\{2,3,4\}$，则 $A\cap(\complement_U B)=$(　　)

A．$\{1,2,5,6\}$　　　　B．$\{1\}$

C．$\{2\}$　　　　D．$\{1,2,3,4\}$

答案：B

6．(2014·江西文)设全集为 $\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x^2-9<0\}$，$B=\{x|-1<x\leqslant 5\}$，则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$(　　)

A．$(-3,0)$　　　　B．$(-3，-1)$

C．$(-3，-1]$　　　　D．$(-3,3)$

答案：C

能力提升

7．若集合 $A=\{1,3,x\}$，$B=\{x^2,1\}$，且 $B\subseteq A$，则实数 x 的值是________.

答案：0 或$\pm\sqrt{3}$

8．已知集合 M 含有三个元素 1,2，x^2，则 x 的值为______________.

答案：$x\neq\pm1$，且 $x\neq\pm\sqrt{2}$

9．已知集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 6\}$，$B=\{x|m-1\leqslant x\leqslant 2m+1\}$.

(1)若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围；

(2)若 $x\in\mathbf{N}$，求集合 A 的子集的个数.

答案：（1）$m<-2$ 或 $0\leqslant m\leqslant\frac{5}{2}$. （2）$2^7=128$.

10. (2014～2015 学年度湖北重点中学高一上学期期中测试)已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x|1\leqslant x\leqslant 6\}$，求$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

答案：$\{x|x<-2$ 或 $x>6\}$.

1.3 函数的相关概念与映射（优质课）教案

教学目标:

8、 通过丰富实例，进一步体会函数是描述变量之间的依赖关系的重要数学模型；

9、 学习用集合与对应的语言来刻画函数，体会对应关系在刻画函数概念中的作用；

10、 了解构成函数的要素，会求一些简单函数的定义域和值域.

教学过程：

一、映射的概念：

设 A、B 是两个非空的集合，如果按某个确定的对应关系 f，对于集合 A 中的任意一个元素，在集合 B 中都有唯一确定的元素和它对应，那么这样的对应（包括集合 A、B，以及对应关系 f）叫做集合 A 到集合 B 的映射，记作： $f:A\to B$。

二、像与原像的概念：

给定一个集合 A 到集合 B 的映射，且 $a\in A, b\in B$，如果元素 a 和元素 b 对应，那么我们把元素 b 叫做元素 a 的像，元素 a 叫做元素 b 的原像。

特别提醒：1、对于映射 $f:A\to B$ 来说，则应注意理解以下四点：

（1）集合 A 中每一个元素，在集合 B 中必有唯一的象；（2）集合 A 中不同元素，在集合 B 中可以有相同的象；（3）集合 A 中的元素与集合 B 中的元素的对应关系，可以是："一对一"、"多对一"，但不能是"一对多"。（4）允许集合 B 中的元素没有象；

2、集合 A、B 及对应法则 f 是确定的，是一个系统；

3、对应法则 f 有“方向性”。即强调从集合 A 到集合 B 的对应，它与从 B 到 A 的对应关系一般是不同的；

三、映射：

一般地，设 A，B 是两个非空的集合，$f:A\to B$ 是集合 A 到集合 B 的映射，如果在这个映射下，对于集合 A 中的不同的元素，在集合 B 中有不同的象，而且 B 中每一个元素都有原象，那么这个映射叫做 A 到 B 的一一映射。

特别提醒：对一一映射概念的理解应注意以下两点：（1）集合 B 中的每一个元素都有原象，也就是说，集合 B 中不允许有剩余的元素。（2）对于集合 A 中的不同元素，在集合 B 中有不同的象，也就是说，不允许“多对一”；

四、函数的概念 ：

设 A、B 是两个非空的数集，如果按某一个确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f\left(x\right)$ 和它对应，那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作 $y=f\left(x\right),x\in A$。其中 x 叫自变量，x 的取值范围 A 叫做函数 $y=f(x)$ 的定义域；与 x 的值相对应的 y 的值叫做函数值，函数值的集合 $\left\{f(x)\mid x\in A\right\}$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的值域。

特别提醒：1、函数实际上就是集合 A 到集合 B 的一个特殊映射 ，其特殊处主要在于集合 A，B 为非空的数集；其中定义域 A，就是指原象的集合，值域 $\left\{f(x)\mid x\in A\right\}$，就是象的集合。2、函数符号 $y=f(x)$ 表示“ y 是 x 的函数”，应理解为：（1）x 是自变量，它是关系所施加的对象；f 是对应关系，它可以是一个或几个解析式，可以是图像、表格，也可以是文字描述；（2）符号 $y=f\left(x\right)$ 仅仅是函数符号，不是表示“ y 等于 f 与 x 的乘积”，$f(x)$ 也不一定是解析式，再研究函数时，除用符号 $f(x)$ 外，还常用 $g(x),F(x),G(x)$ 等符号来表示。3、判断两个变量之间是否具有函数关系，只要检验：（1）x 的取值集合是否为空集；（2）根据给出的对应关系，自变量 x 在其定义域内的每一个值，是否都有唯一确定的函数值与之对应。

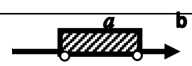
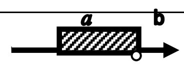
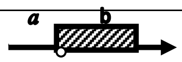
五：函数的值：

$f\left(a\right)$ 表示当 $x=a$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 的值，这个值就由“ f ”这一对应关系来确定；$f(x)$ 与 $f(a)$ 是不同的，前者表示以 x 为自变量的函数，后者为常数

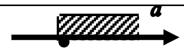
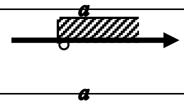
六：函数的三要素 ：

我们通常把对应法则 f、定义域 A、值域 $\left\{f(x)\mid x\in A\right\}$ 称为函数的三要素。由函数的定义可知，由于函数值域被函数的定义域和对应关系完全确定，这样确定一个函数只需两个要素：定义域和对应法则。如果两个函数的定义域和对应法则分别相同，我们就说这两个函数是同一函数。

七：区间的概念和记号：

名称	定义	符号	数轴表示
闭区间	$\left\{x\middle\vert a\le x\le b\right\}$	$\left[a,b\right]$	
开区间	$\{x\vert a<x<b\}$	$\left(a,b\right)$	
左闭右开区间	$\{x\vert a\le x<b\}$	$\left[a,b\right)$	
左开右闭区间	$\{x\vert a<x\le b\}$	$\left(a,b\right]$	

a b

无穷区间	$\{\ x \mid x \le a\ \}$	$(-\infty, a]$	
无穷区间	$\{\ x \mid x < a\ \}$	$(-\infty, a)$	
无穷区间	$\{\ x \mid x \ge a\ \}$	$[a, +\infty)$	
无穷区间	$\{\ x \mid x > a\ \}$	$(a, +\infty)$	

特别提醒：书写区间记号时：

（1）有完整的区间外围记号，有两个区间端点，且左端点小于右端点；（2）两个端点之间用“，”隔开；（3）无穷大是一个符号，不是一个数；以“$-\infty$”或“$+\infty$”为区间一端时，这一端必是小括号。

八：分段函数

有些函数在它的定义域中，对于自变量 x 的不同取值范围，对应法则不同，这样的函数通常称为分段函数。如函数 $y=|x|=\begin{cases} x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -x & x<0 \end{cases}$

特别提醒：1、分段函数是一个函数，而不是几个函数；2、它是一类较特殊的函数。在求分段函数的值 $f(x_0)$ 时，一定首先要判断 x_0 属于定义域的哪个子集，然后再代相应的关系式；3、分段函数的值域应是其定义域内不同子集上各关系式的取值范围的并集。

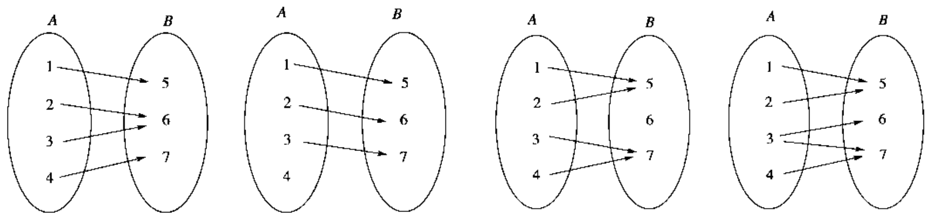
九：复合函数

如果 $y=f(u), u=g(x)$，那么 $y=f[g(x)]$ 叫做 f 和 g 的复合函数，其中 $g(x)$ 为内函数，$f(u)$ 为外函数。

典 例 讲 练

类型一 映射的概念

例 1：已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{5,6,7\}$，在下列 A 到 B 的四个对应关系中，能否构成 A 到 B 的映射？说明理由.



(1) (2) (3) (4)

解析：(1)、(3)是 A 到 B 的映射，都符合映射的定义，即 A 中的每一个元素在 B 中都有惟一元素与之对应；(2)不是 A 到 B 的映射，因为 A 中的元素 4 在 B 中没有元素与之对应；(4)不是 A 到 B 的映射，因为 A 中的元素 3 在 B 中有两个元素与之对应.

答案：(1)、(3)是 A 到 B 的映射；(2)、(4) 不是 A 到 B 的映射

练习 1：设集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$，则下列对应 f 中不能构成 A 到 B 的映射的是（　　）

A. f：$x\to y=\frac{1}{2}x$　　　　B. f：$x\to y=x-2$

C. f：$x\to y=\sqrt{x}$　　　　D. f：$x\to y==|x-2|$

答案：B

练习 2：(2014～2015 学年度四川德阳五中高一上学期月考)下列对应是集合 A 到集合 B 的映射的是(　　)

A．$A=\mathbf{N}^*$，$B=\mathbf{N}^*$，f：$x\to|x-3|$

B．$A=\{$平面内的圆$\}$；$B=\{$平面内的矩形$\}$，f：每一个圆对应它的内接矩形

C．$A=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{y|0\leqslant y\leqslant 6\}$，$f$：$x\to y=\frac{1}{2}x$

D．$A=\{0,1\}$，$B=\{-1,0,1\}$，f：A 中的数开平方

答案：C

类型二　映射中的象与原象

例 2：已知集合 $A=\mathbf{R}$，$B=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$，$f$：$A\to B$ 是从 A 到 B 的映射，f：$x\to(x+1,x^2+1)$，求 A 中元素$\sqrt{2}$的象和 B 中元素$(\frac{3}{2},\frac{5}{4})$的原象.

解析：把 $x=\sqrt{2}$代入对应法则，得其象为$(\sqrt{2}+1,3)$，

又由$\begin{cases}x+1=\frac{3}{2}\\x^2+1=\frac{5}{4}\end{cases}$，解得 $x=\frac{1}{2}$.

$\therefore\sqrt{2}$的象为$(\sqrt{2}+1,3)$，$(\frac{3}{2},\frac{5}{4})$的原象为$\frac{1}{2}$.

答案：$\sqrt{2}$的象为$(\sqrt{2}+1,3)$，$(\frac{3}{2},\frac{5}{4})$的原象为$\frac{1}{2}$.

练习 1：已知映射 f：$(x,y)\longrightarrow(3x-2y+1,4x+3y-1)$.

(1)求$(-1,2)$的象；

(2)求$(-1,2)$的原象.

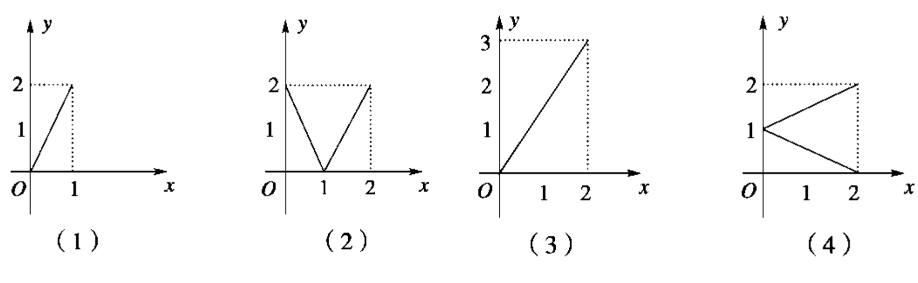
答案：$(-1,2)$的象为$(-6,1)$．$(-1,2)$的原象为$(0,1)$．

练习 2：(2014～2015 学年度安徽宿州市十三校高一上学期期中测试)在映射 f：$A\to B$ 中，集合 $A=B=\{(x,y)|x、y\in\mathbf{R}\}$，且 f：$(x,y)\to(x-y,x+y)$，则 B 中的元素$(-1,2)$在集合 A 中的原象为________.

答案：$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

类型三　函数的概念

例 3：设 $M=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$N=\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$给出下列 4 个图形，其中能表示集合 M 到集合 N 的函数关系的有(　　)



A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．3 个

解析：由函数的定义知，(1)不是，因为集合 M 中 $1<x\leqslant 2$ 时，在 N 中无元素与之对应；

(3)中 $x=2$ 对应元素 $y=3\notin N$，所以(3)不是；

(4)中 $x=1$ 时，在 N 中有两个元素与之对应，所以(4)不是；

显然只有(2)是，故选 B.

答案： B.

练习 1： 判断下列对应是否构成集合 A 到集合 B 的函数：

(1) $A=\mathbf{R}$，$B=\{y|y>0\}$，f：$x\to y=|x|$；

(2) $A=\mathbf{Z}$，$B=\mathbf{Z}$，f：$x\to y=x^2+x$；

答案： (1)否 (2)是

练习 2： 下列关于函数与区间的说法正确的是(　　)

A．函数定义域必不是空集，但值域可以是空集

B．函数定义域和值域确定后，其对应法则也就确定了

C．数集都能用区间表示

D．函数中一个函数值可以有多个自变量值与之对应

答案： D.

类型四 同一函数的判定

例 4： 下列各组函数是同一函数的是(　　)

①$f(x)=\sqrt{-2x^3}$ 与 $g(x)=x\sqrt{-2x}$；

②$f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x}$；

③$f(x)=x^0$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{x^0}$；

④$f(x)=x^2-2x-1$ 与 $g(x)=t^2-2t-1$.

A．①②　　B．①③　　C．③④　D．①④

解析： 对于①、②，两函数的对应法则都不同，对于③、④，两函数的定义域和对应法则都相同，故选 C.

答案： C.

练习 1： (2014～2015 学年度潍坊四县市高一上学期期中测试)下列四组函数，表示同一函数的是(　　)

A．$f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=x$

B．$f(x)=x$，$g(x)=\dfrac{x^2}{x}$

C．$f(x)=\sqrt{x^2-4}$，$g(x)=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}$

D．$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt[3]{x^3}$

答案： D

练习 2： 下列函数中哪个与函数 $y=x$ 是同一个函数，把序号填在横线上____。

① $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$；　　② $y=\sqrt[3]{x^3}$；　　③ $y=\sqrt{x^2}$

答案： ②

类型五 函数的定义域

例 5： 求下列函数的定义域：

(1) $y=3-\dfrac{1}{2}x$；

(2) $y=\sqrt{2x+3}-\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}+\dfrac{1}{x}$；

解析：(1)函数 $y=3-\frac{1}{2}x$ 的定义域为R.

(2)要使函数有意义，则有$\begin{cases}2x+3\geqslant 0\\ 2-x>0\\ x\neq 0\end{cases}$，

解得$-\frac{3}{2}\leqslant x<2$，且 $x\neq 0$.

∴所求函数的定义域为

$\left\{x\middle|-\frac{3}{2}\leqslant x<2，且x\neq 0\right\}$.

答案：(1) R (2) $\left\{x\middle|-\frac{3}{2}\leqslant x<2，且x\neq 0\right\}$.

练习 1：求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{x-1}{x^2-3x+2}$;

(2) $y=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$;

(3) $y=\frac{1}{1-|x|}+\sqrt{x^2-1}$.

答案：(1) $\{x\in R|x\neq 1，且 x\neq 2\}$. (2) $\{-1, 1\}$. (3) $(-\infty，-1)\cup(1，+\infty)$.

练习 2：(2014～2015 学年度山东枣庄第八中学高一上学期期中测试)函数 $y=\frac{\sqrt{x+1}}{x}$的定义域是( )

A. $[-1，+\infty)$

B. $(0，+\infty)$

C. $(-1，+\infty)$

D. $[-1, 0)\cup(0，+\infty)$

答案： D

类型六 求函数值

例 6：若 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}(x\neq -1)$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(1-a)(a\neq 2)$，$f[f(2)]$.

解析：$f(0)=\frac{1-0}{1+0}=1$；$f(1)=\frac{1-1}{1+1}=0$；

$f(1-a)=\frac{1-\ \ 1-a}{1+\ \ 1-a}=\frac{a}{2-a}(a\neq 2)$；

$f[f(2)]=\frac{1-f\ \ 2}{1+f\ \ 2}=\frac{1-\frac{1-2}{1+2}}{1+\frac{1-2}{1+2}}=2$.

答案： 2

练习 1：已知函数 $f(x)=3x^2-5x+2$，求 $f(3)$，$f(-\sqrt{2})$，$f(a+1)$

答案：$f(3)=14$；$f(-\sqrt{2})=8+5\sqrt{2}$；$f(a+1)=3a^2+a$.

练习 2：已知函数 $f(x)=x^2+x-1$. 求 $f(2)$，$f(\frac{1}{x})$；

答案： $f(2)=5$，$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1+x-x^2}{x^2}$.

当堂检测

1. 给出下列关于从集合 A 到集合 B 的映射的论述，其中正确的有_________。

①B 中任何一个元素在 A 中必有原象；②A 中不同元素在 B 中的象也不同；③A 中任何一个元素在 B 中的象是唯一的；④A 中任何一个元素在 B 中可以有不同的象；⑤B 中某一元素在 A 中的原象可能不止一个；⑥集合 A 与 B 一定是数集；⑦记号 $f:A\to B$ 与 $f:B\to A$ 的含义是一样的.

答案：③⑤

2. 下列集合 A 到集合 B 的对应中，判断哪些是 A 到 B 的映射？判断哪些是 A 到 B 的一一映射？

(1) $A=N$, $B=Z$ ，对应法则 $f:x\to y=-x$, $x\in A$, $y\in B$；

(2) $A=R^+$， $B=R^+$， $f:x\to y=\frac{1}{x}$， $x\in A$， $y\in B$；

答案： (1)是映射，不是一一映射， (2)是映射，是一一映射.

3. 下列各式能否确定 y 是 x 的函数？

（1） $x^2+y^2=1$；（2） $x^2-y+3=0$；（3） $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}$

答案：（1）不能（2）能；（3）不能。

4. 已知 $f(x)=x^2-3x+1$，则 $f(1)=$_____； $f(-5)=$_______； $f(\sqrt{2})=$__________；

$f(a)=$_________； $f(2a-1)=$_________________。

答案：-1；41； $3-3\sqrt{2}$； a^2-3a+1； $4a^2-10a+5$。

5. 下列各组函数中，把表示同一函数组的序号填在横线上__________。

① $y=x,y=(\sqrt{x})^2$； ② $y=\sqrt{x^2},y=(\sqrt{x})^2$； ③ $y=x+1,y=\frac{x^2-1}{x-1}$； ④ $y=x^0,y=1$ ⑤ $y=|x|,y=\sqrt{x^2}$

答案：⑤

当堂总结

家庭作业

基础巩固

1. 下列对应是从集合 A 到集合 B 的映射的是（　　）

A、 $A=R,B=\{x|x>0且x\in R\},x\in A,f:x\to|x|$　　B、 $A=N,B=N^*,x\in A,f:\to|x-1|$

C、 $A=\{x|x>0且x\in R\},B\in R,x\in A,f:x\to x^2$　　D、 $A=Q,B=Q,x\in A,f:x\to\frac{1}{x}$

答案：C

2. 已知 $P=\{x|0\le x\le 4\},Q=\{y|0\le y\le 2\}$，下列对应不表示从 P 到 Q 的函数的是（　　）

A、$f:x\to y=\frac{1}{2}x$　　B、$f:x\to y=\frac{1}{3}x$　　C、$f:x\to y=\frac{3}{2}x$　　D、$f:x\to y=\sqrt{x}$

答案：C

3. (2014～2015 学年度广东肇庆市高一上学期期中测试)函数 $f(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{x-2}$的定义域为

____________.

答案：2

4. $f: A \to B$ 是从 A 到 B 的映射，其中 $A=R$，$B=\{(x,y)|x,y\in R\}$，$f: x \to (x+1, x^2+1)$，则 A 中元素 $\sqrt{2}$ 的象是______；B 中元素 $(2,2)$ 的原象________。

答案：$(\sqrt{2}+1,3)$　　　1

5. 已知集合 $A=\{1,2,3,k\}, B=\{4,7,a^4,a^2+3a\}$，且 $a\in N_+, x\in A, y\in B,$ 使 B 元素 $y=3x+1$ 和 A 中的元素 x 对应，则 $a=$____，　$k=$____。

答案：2　5

6. 已知函数 $f(x)=x^2+px+q$ 满足 $f(1)=f(2)=0$，则 $f(-1)=$__。

答案：6

7. 下列函数中哪个与函数 $y=x$ 是同一个函数，把序号填在横线上____。

①$y=(\sqrt{x})^2$；　　②$y=\sqrt[3]{x^3}$；　　③$y=\sqrt{x^2}$

答案：②

能力提升

8. 已知 $f(x)=x^2-1$　$g(x)=\sqrt{x}+1$　求 $f[g(x)], g[f(x)]$

答案：$f[g(x)]=(\sqrt{x}+1)^2-1=x+2\sqrt{x}$；　$g[f(x)]=\sqrt{x^2-1}+1$

9. 已知 $\boldsymbol{f(x)}=\begin{cases} 0 & (\boldsymbol{x}<0) \\ \boldsymbol{\pi} & (\boldsymbol{x}=0) \\ \boldsymbol{x}+1 & (\boldsymbol{x}>0) \end{cases}$，分别求 $f(1), f(-1), f(0), f\{f[f(-1)]\}$ 的值。

答案：$f(1)=2$；$f(-1)=0$；$f(0)=\pi$；$f\{f[f(-1)]\}=\pi+1$；

10. 将下列集合用区间表示：

（1）$\left\{x\left|\frac{x-2}{x-1}\geq 0\right.\right\}$；　（2）$\{x|x=1\text{或}2<x\leq 3\}$；　（3）$\{x|x\neq\pm 1, x\in R\}$。

答案：（1）$(-\infty,1)\cup[2,+\infty)$；（2）$\{1\}\cup(2,3]$；（3）$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$。

1.4 函数的表示方法（优质课）教案

教学目标：

11、　能根据不同需要选择恰当的方法（如图像法、列表法、解析法）表示函数；

12、　了解简单的分段函数，并能简单应用；

教学过程：

一、函数的常用表示方法简介：

1、解析法

如果函数 $y=f\left(x\right)\left(x\in A\right)$ 中，$f\left(x\right)$ 是用代数式（或解析式）来表达的，则这种表达函数的方法叫做解析法（公式法）。

例如，$s=60t^2$，$A=\pi r^2$，$S=2\pi rl$，$y=\sqrt{x-2}(x\geq 2)$ 等等都是用解析式表示函数关系的。

特别提醒：

解析法的优点：（1）简明、全面地概括了变量间的关系；（2）可以通过解析式求出任意一个自变量的值所对应的函数值；（3）便于利用解析式研究函数的性质。中学阶段研究的函数主要是用解析法表示的函数。

解析法的缺点：（1）并不是所有的函数都能用解析法表示；（2）不能直观地观察到函数的变化规律。

2、列表法：

通过列出自变量与对应函数值的表格来表示函数关系的方法叫做列表法。

例如：初中学习过的平方表、平方根表、三角函数表。我们生活中也经常遇到列表法，如银行里的利息表，列车时刻表，公共汽车上的票价表等等都是用列表法来表示函数关系的.

特别提醒：

列表法的优点：不需要计算就可以直接看出与自变量的值相对应的函数值。这种表格常常应用到实际生产和生活中。

列表法的缺点：对于自变量的有些取值，从表格中得不到相应的函数值。

3、图象法：

用函数图象表示两个变量之间的函数关系的方法，叫做图像法。

例如：气象台应用自动记录器描绘温度随时间变化的曲线，工厂的生产图象，股市走向图等都是用图象法表示函数关系的。

特别提醒：

图像法的优点：能直观形象地表示出自变量的变化，相应的函数值变化的趋势，这样使得我们可以通过图象来研究函数的某些性质。

图像法的缺点：不能够精确地求出某一自变量的相应函数值。

二、函数图像：

1、判断一个图像是不是函数图像的方法：

要检验一个图形是否是函数的图像，其方法为：任作一条与 x 轴垂直的直线，当该直线保持与 x 轴垂直并左右任意移动时，若与要检验的图像相交，并且交点始终唯一的，那么这个图像就是函数图像。

2、函数图像的作图方法大致分为两种：

（1）描点作图法。步骤分三步：列表，描点，连线成图。

（2）图像变换法。利用我们熟知基本初等函数图像，将其进行平移、对成等变换，从而得到我们所求的函数图像的方法。

三、根据函数图像确定函数的定义域和值域：

1、由函数图像来确定函数的值域的方法是看函数图像在 y 轴上的正投影所覆盖的区域；

2、由函数图像来确定函数的定义域的方法是看函数图像在 x 轴上的正投影所覆盖的区域；

四、分段函数图像：

有些函数在它的定义域中，对于自变量 x 的不同取值范围，对应法则不同，这样的函数通常称为分段函数。由此可知，作分段函数的图像时，应根据不同定义域上的不同解析式分别作出。

典 例 讲 练

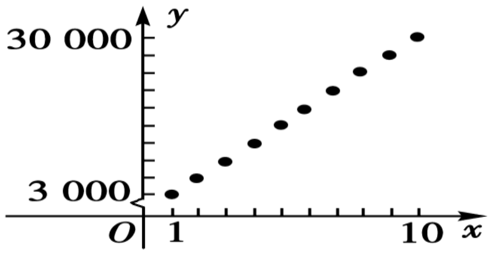
类型一 函数的表示方法

例 1：某商场新进了 10 台彩电，每台售价 3 000 元，试分别用列表法、图象法、解析法表示售出台数 $x(x\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\})$ 与收款总额 y(元)之间的函数关系.

解析：(1)该函数关系用列表法表示为：

x/台	1	2	3	4	5
y/元	3 000	6 000	9 000	12 000	15 000
x/台	6	7	8	9	10
y/元	18 000	21 000	24 000	27 000	30 000

（2）该函数关系用图象法表示，如图所示.



（3）该函数关系用解析法表示为 $y=3\ 000x$，$x\in\{1,2,3,\cdots,10\}$.

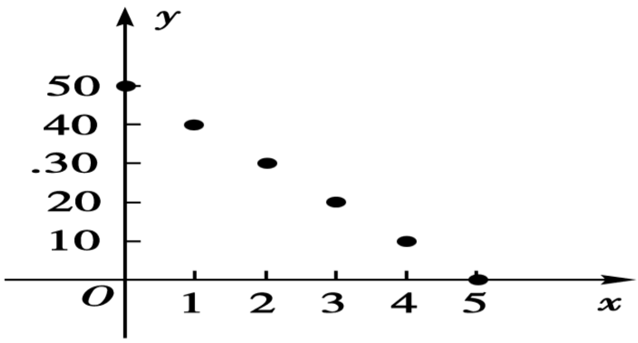
答案：见解析

练习 1：某问答游戏的规则是：共 5 道选择题，基础分为 50 分，每答错一道题扣 10 分，答对不扣分，试分别用列表法、图象法、解析法表示一个参与者的得分 y 与答错题目道数 x($x\in\{0,1,2,3,4,5\}$)之间的函数关系.

答案：(1)该函数关系用列表法表示为：

x/道	0	1	2	3	4	5
y/分	50	40	30	20	10	0

（2）该函数关系用图象法表示，如图所示



（3）该函数关系用解析法表示为 $y=50-10x$($x\in\{0,1,2,3,4,5\}$).

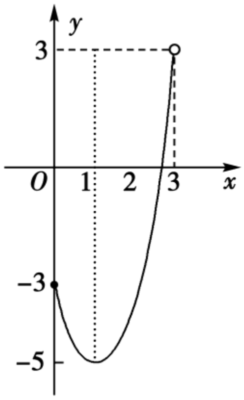
练习 2：(2014～2015 学年度浙江舟山中学高一上学期期中测试)已知 $f(x+1)=2x+3$，则 $f(x)$＝________.

答案：$2x+1$

类型二 识画函数的图象

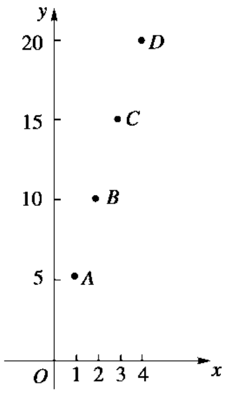
例 2：作出函数 $y=2x^2-4x-3,0\leq x<3$ 的图象.

解析 ∵$0\leq x<3$，∴这个函数的图象是抛物线 $y=2x^2-4x-3$ 介于 $0\leq x<3$ 之间的一段弧



答案：见解析

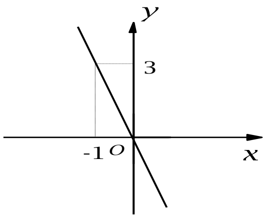
练习 1：某种笔记本每个 5 元，买 $x(x\in\{1,2,3,4\})$ 个笔记本的钱数记为 y(元)，试写出以 x 为自变量的函数 y 的解析式，并画出这个函数的图象.



答案：

练习 2：画出函数 $y=-3x$ 的图像

答案：

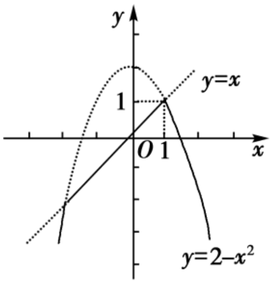


类型三 函数图象的应用

例 3：若 $x\in\mathrm{R}$，$f(x)$是 $y=2-x^2$，$y=x$ 这两个函数的较小者，求 $f(x)$的最大值.

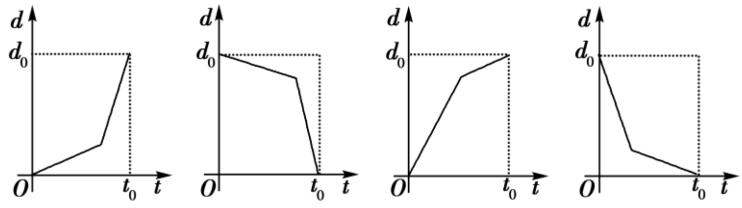
解析：在同一坐标系中画出函数 $y=2-x^2$，$y=x$ 的图象，如图，根据题意，坐标系中实线部分即为函数 $f(x)$的图象，

∴$x=1$ 时，$f(x)_{\max}=1$.



答案：1.

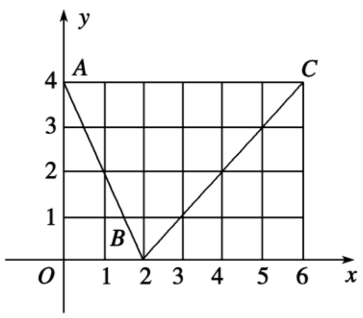
练习 1：某学生离家去学校，由于怕迟到，所以一开始就跑步，等跑累了再走余下的路程. 在图中，纵轴表示离学校的距离，横轴表示出发后的时间，则四个图形中较符合该学生走法的是(　　)



A　　　　B　　　　C　　　　D

答案：D

练习 2：如图，函数 $f(x)$的图象是折线段 ABC，其中点 A、B、C 的坐标分别为(0,4)、(2,0)、(6,4)，则 $f\{f[f(2)]\}$＝________.



答案：2.

类型四 分段函数求值

例 4：(2014～2015 学年度广东珠海四中高一上学期月考)已知函数 $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & x\leqslant 1\\ x^2-x-3 & x>1\end{cases}$，

则 $f[\frac{1}{f\quad 3}]$的值为(　　)

A．$\frac{15}{16}$　　　B．$-\frac{27}{16}$　　　C．$\frac{8}{9}$　　　D．18

解析：$f(3)=3^2-3-3=3$，

$f[\frac{1}{f\quad 3}]=f(\frac{1}{3})=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$.

答案：C.

练习 1：(2014～2015 学年度四川成都七中实验学校高一上学期期中测试)已知 $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\geqslant 2\\ -x^2-3x & x<2\end{cases}$，则 $f(4)$的值为(　　)

A．7　　B．3　　C．－8　　D．4

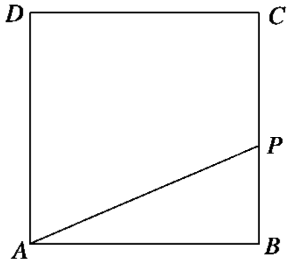
答案：A

练习 2：(2014～2015 学年度江苏泰州三中高一上学期期中测试)设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\leqslant 1\\ \frac{2}{x} & x>1\end{cases}$，则 $f[f(3)]$＝______.

答案：$\frac{13}{9}$

类型五 分段函数在实际问题中的应用

例 5：如图(1)所示，在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 边上有一点 P，沿着折线 $BCDA$，由点 B(起点)向点 A(终点)运动．设点 P 运动的路程为 x，△APB 的面积为 y，求：y 与 x 之间的函数关系式；



(1)

解析：当点 P 在 BC 上，即 $0\leqslant x\leqslant 4$ 时，$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times 4x=2x$，

当点 P 在 CD 上，即 $4<x\leqslant 8$ 时，

$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$，

当点 P 在 DA 上，即 $8<x\leqslant 12$ 时，$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times 4\times(12-x)=24-2x$，

$$\therefore y=\begin{cases}2x & 0\leqslant x\leqslant 4\\ 8 & 4<x\leqslant 8\\ 24-2x & 8<x\leqslant 12\end{cases}.$$

答案：$y=\begin{cases}2x & 0\leqslant x\leqslant 4\\ 8 & 4<x\leqslant 8\\ 24-2x & 8<x\leqslant 12\end{cases}$

练习 1：(2014～2015 学年度宁夏育才中学高一上学期月考)已知 A、B 两地相距 150 km，某人开汽车以 60 km/h 的速度从 A 地到达 B 地；在 B 地停留 1 h 后再以 50 km/h 的速度返回 A 地，把汽车离开 A 地的距离 S 表示为时间 $t(h)$ 的函数表达式为(　　)

A．$S=60t$

B．$S=60t+50t$

C．$S=\begin{cases}60t & 0\leqslant t\leqslant 2.5\\ 150-50t & t>3.5\end{cases}$

D．$S=\begin{cases}60t & 0\leqslant t\leqslant 2.5\\ 150 & 2.5<t\leqslant 3.5\\ 150-50\quad t-3.5 & 3.5<t\leqslant 6.5\end{cases}$

答案：D

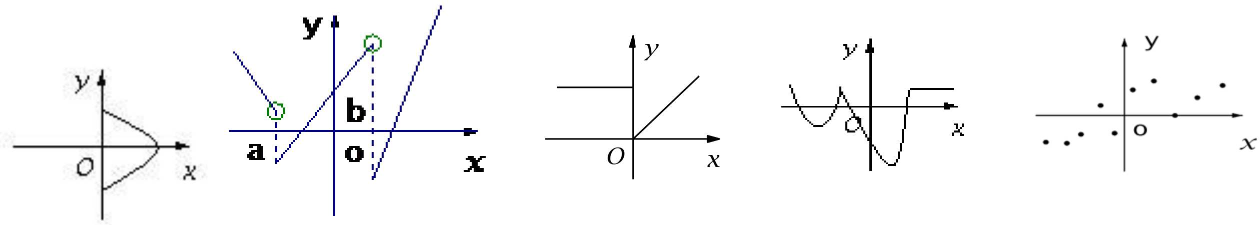
练习 2：某市区住宅电话通话费为前 3 min 0.20 元，以后每分钟 0.10 元(不足 3 min 按 3 min 计，以后不足 1 min 按 1 min 计)．在直角坐标系内，画出接通后通话在 6 min 内(不包括 0 min，包括 6 min)的通话费 y(元)关于通话时间 t(min)的函数图象，并写出函数解析式及函数的值域．

答案：这个函数的解析式为 $y=\begin{cases}0.2，& t\in\quad 0，3]\\ 0.3，& t\in\quad 3，4]\\ 0.4，& t\in\quad 4，5]\\ 0.5，& t\in\quad 5，6]\end{cases}$，

函数的值域为 $\{0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$．

当堂检测

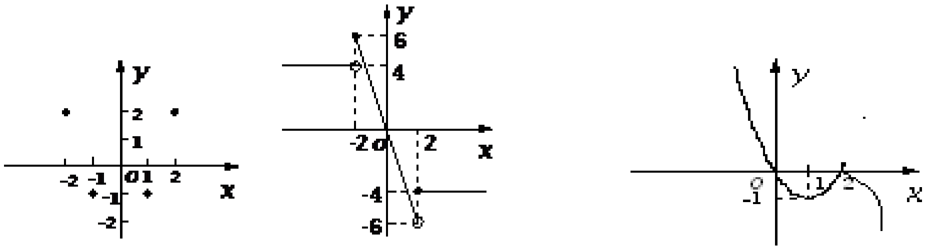
1．下列图像中，那些可能是函数图像，把你认为正确图像的序号填写在横线上________。



① ② ③ ④ ⑤

答案：②④⑤

2．根据下列函数图像分别确定函数的定义域和值域

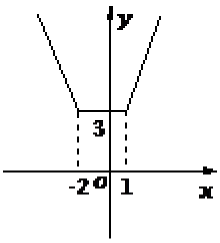


（1） （2） （3）

答案：（1）定义域为$\{-2,-1,0,1,2\}$；值域是$\{-2,-1,2\}$。

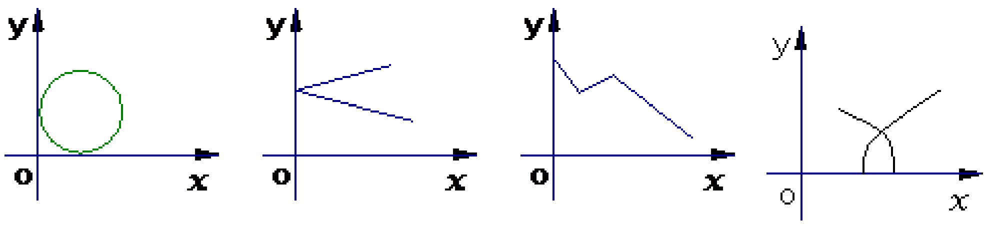
（2）定义域为R；值域是$(-6,6]$；（3）定义域为R；值域是R.

3．作出分段函数$y=|x-1|+|x+2|$的图像



答案：

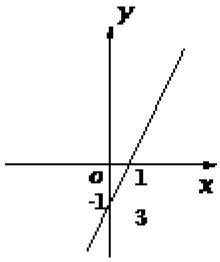
4．下列各图中，能作为$y=f(x)$的图象的是（　　）



（A） （B） （C） （D）

答案:C

5．画出函数$y=3x-1$的图像



答案：

当堂总结

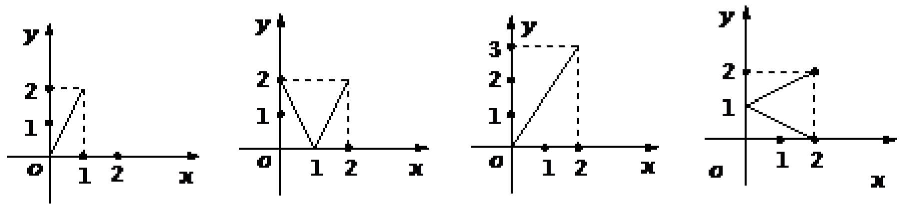
____

____

家庭作业

基础巩固

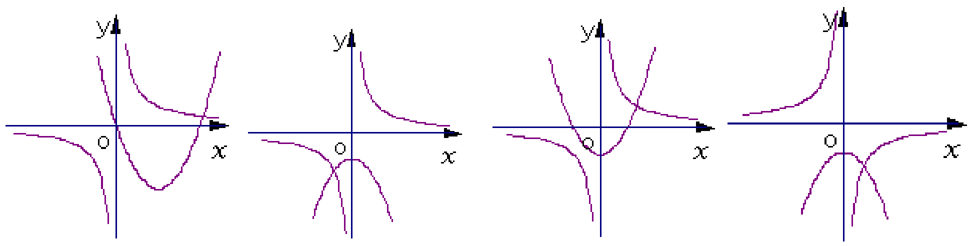
1. 设 $M=\{x|0\le x\le 2\},N=\{y|0\le y\le 2\}$ 给出下列四个图形，其中能表示从集合 M 到集合 N 的函数关系的有（　　）



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

答案：B

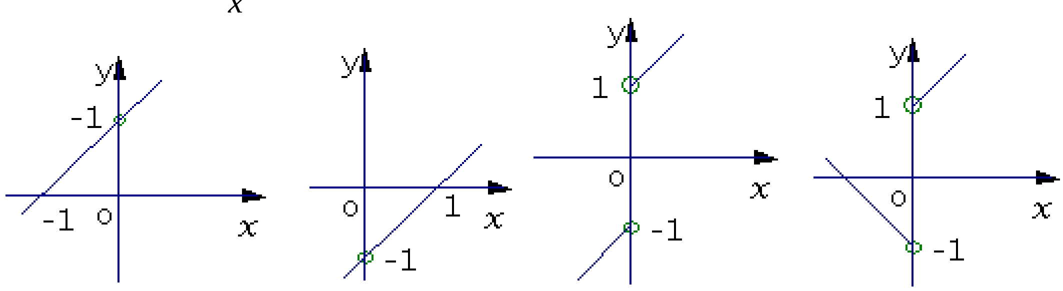
2. 函数 $y=ax^2+a$ 与 $y=\dfrac{a}{x}(a\neq 0)$ 在同一坐标系内的图像可能是（　　）



（A）　　（B）　　（C）　　（D）

答案：D

3. 函数 $f\left(x\right)=x+\dfrac{|x|}{x}$ 的图像是（　　）



（A）　　（B）　　（C）　　（D）

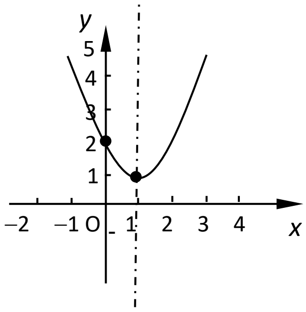
答案：C

4. 已知函数 $f(x)=3(x-2)^2+5$, 且 $|x_1-2|>|x_2-2|$，则(　　)

A、$f(x_1)>f(x_2)$ B、$f(x_1)=f(x_2)$ C、$f(x_1)<f(x_2)$ D、不能确定大小

答案： A

5. 如图，已知函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则满足不等式 $f(m-2)>f(3)$ 的实数 m 的取值范围是______或______。



答案：$m<1$　　　$m>5$

6. 根据函数 $y=(x-1)^2+1(0\le x\le 3)$ 的图象，可以知道，$f(0)$____$f(1)$，　$f(0)$____$f(3)$，$f(3)$____$f(1)$（横线上填“>”或“<”符号）

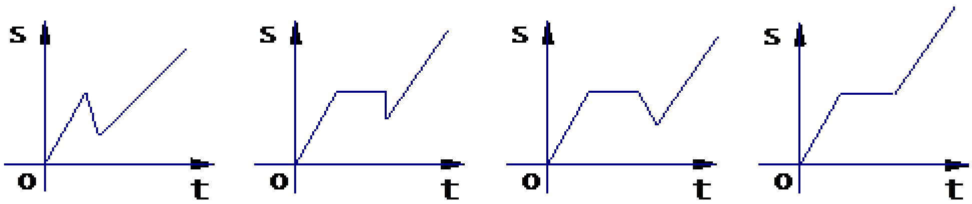
答案： >　　<　　>

7. 设 $x\in(-\infty,+\infty)$，求函数 $y=2|x-1|-3|x|$ 的最大值。

答案：2

能力提升

8. 某人开车沿直线旅行，先前进了 a km，到达目的地后游玩用去了一段时间，由原路返回 b km $(b<a)$，再前进 c km，此人离起点的距离 s 与时间 t 的关系示意图是（　　）



（A）　　（B）　　（C）　　（D）

答案：C

9. 当 m 为何值时，方程 $x^2-4|x|+5=m$ 有 4 个互不相等的实数根。

答案：$1<m<5$。

1.5 函数的单调性（优质课）教案

教学目标：

1、 通过已学过的函数模型，特别是二次函数，理解函数的单调性；

2、 掌握单调性的判断方法，并能简单应用；

教学过程：

一、函数单调性的定义

1、图形描述：

对于函数 $f(x)$ 的定义域 I 内某个区间 D 上，若其图像为从左到右的一条上升的曲线，我们就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上为单调递增函数；若其图像为从左到右的一条下降的曲线，我们就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上为单调递减函数。

2、定量描述

对于函数 $f(x)$ 的定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1, x_2，

（1）若当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$，则说 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数；

（2）若当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$，则说 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数。

3、单调性与单调区间

若函数 $y = f(x)$ 在某个区间是增函数或减函数，则就说函数 $f(x)$ 在这一区间具有（严格的）单调性，这一区间叫做函数 $f(x)$ 的单调区间。此时也说函数是这一区间上的单调函数。在单调区间上，增函数的图象是上升的，减函数的图象是下降的。

特别提醒：

1、函数是增函数还是减函数，是对定义域内某个区间而言的。有的函数在一些区间上是增函数，而在另一些区间上不是增函数. 例如函数 $y = x^2$（图 1），当 $x \in [0, +\infty)$ 时是增函数，当 $x \in (-\infty, 0]$ 时是减函数。而有的函数在整个定义域上都是单调的。2、函数的单调区间是其定义域的子集；3、x_1, x_2 应是该区间内任意的两个实数，忽略需要任意取值这个条件，就不能保证函数是增函数（或减函数）。

二、**用定义证明函数的单调性：**

定义法证明函数在某个区间上是增（减）函数是最基本方法其步骤是：

1、取量定大小：即设 x_1, x_2 是区间上的任意两个实数，且 $x_1 < x_2$；

2、作差定符号：即 $f(x_1) - f(x_2)$，并通过因式分解、配方、有理化等方法，向有利于判断差的符号的方向变形；

3、判断定结论： 即根据定义得出结论。

三、判断较复杂函数的单调性的几条有用的结论

1、函数 $y = -f(x)$ 与函数 $y = f(x)$ 的单调性相反

2、当 $f(x)$ 恒为正或恒为负时，函数 $y = \dfrac{1}{f(x)}$ 与函数 $y = f(x)$ 的单调性相反

3、在公共区间内，增函数＋增函数＝增函数，增函数－减函数＝增函数，减函数－增函数＝减函数。

四、复合函数单调性的判断

对于函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$，如果 $u = g(x)$ 在区间 (a,b) 上是具有单调性，当 $x \in (a,b)$ 时，$u \in (m,n)$，且 $y = f(u)$ 在区间 (m,n) 上也具有单调性，则复合函数 $y = f(g(x))$ 在区间 (a,b) 具有单调性的规律见下表：

$y = f(u) \quad u \in (m,n)$	增 ↗		减 ↘	
$u = g(x) \quad x \in (a,b)$	增 ↗	减 ↘	增 ↗	减 ↘
$y = f(g(x)) \quad x \in (a,b)$	增 ↗	减 ↘	减 ↘	增 ↗

以上规律还可总结为：“同增异减”。

典 例 讲 练

类型一用定义证明函数的单调性

例 1：证明：函数 $f(x)=2x^2+4x$ 在 $(-\infty，-1]$ 上是减函数.

解析：设 $x_1<x_2\leqslant-1$，则 $\Delta x=x_2-x_1>0$，

$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=(2x+4x_2)-(2x+4x_1)$

$=2(x-x)+4(x_2-x_1)$

$=2(x_2-x_1)(x_1+x_2+2)$.

$\because x_1<x_2\leqslant-1$，$x_1+x_2+2<0$，$\therefore \Delta y<0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty，-1]$ 上是减函数.

答案：见解析

练习 1：证明函数 $f(x)=-\sqrt{x}$ 在定义域上是减函数

答案：设 x_1、x_2 是 $[0，+\infty)$ 内的任意两个实数，且 $x_1<x_2$，则 $\Delta x=x_2-x_1>0$，

$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=-\sqrt{x_2}-(-\sqrt{x_1})=\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}$

$=\dfrac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\qquad\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}=\dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$.

$\because x_1-x_2=-\Delta x<0$，$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>0$，$\Delta y<0$.

$\therefore f(x)=-\sqrt{x}$ 在 $[0，+\infty)$ 上是减函数.

练习 2：(2014～2015 学年度宁夏育才中学中学高一上学期月考)设函数 $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$,用单调性定义证明在（-1，+∞）上是减函数。

答案：设任意 $x_1\in(-1，+\infty)$，$x_2\in(-1，+\infty)$，且 $x_1<x_2$.

$f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{x_2+2}{x_2+1}-\dfrac{x_1+2}{x_1+1}$

$=\dfrac{x_1-x_2}{x_2+1\qquad x_1+1}$

类型二 证明含参数的函数的单调性

例 2：已知函数 $f(x)=\dfrac{ax}{x^2-1}$(a 为常数且 $a\neq0$)，试判断函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上的单调性.

解析 任取 x_1、x_2，使得 $-1<x_1<x_2<1$，

则 $\Delta x=x_2-x_1>0$.

$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{a\quad x_1x_2+1\qquad x_1-x_2}{x_1^2-1\qquad x_2^2-1}$,

$\because -1<x_1<x_2<1$，

$\therefore x_1x_2+1>0$，$x_1^2-1<0$，$x_2^2-1<0$，

$\therefore \dfrac{x_1x_2+1\qquad x_1-x_2}{x_1^2-1\qquad x_2^2-1}<0$，

$\therefore$ 当 $a>0$ 时，$f(x_2)-f(x_1)<0$，

故此时函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是减函数，

当 $a<0$ 时，$f(x_2)-f(x_1)>0$，

故此时 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数.

综上所述，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为减函数，

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为增函数.

答案：增函数.

练习 1：判断函数 $f(x)=\frac{a}{x}$(a 为常数且 $a\neq 0$)在 $(0,+\infty)$ 上的单调性.

答案：当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

练习 2：判断函数 $f\left(x\right)=\frac{-x^2+a}{x}\left(a>0\right)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 上的单调性

答案：单调递减函数

类型三 证明抽象函数的单调性

例 3：已知函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，且 $f(x)<0(x>0)$，试判断 $F(x)=\frac{1}{f(x)}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性，并证明.

解析：$F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数．下面给出证明：

任取 x_1、$x_2\in(0,+\infty)$，且 $\Delta x=x_2-x_1>0$.

$\because \Delta y=F(x_2)-F(x_1)=\frac{1}{f(x_2)}-\frac{1}{f(x_1)}$

$=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{f(x_2)f(x_1)}$,

又 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，且 $\Delta x=x_2-x_1>0$,

$\therefore \Delta y=f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$,

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$.

而 $f(x_1)<0$，$f(x_2)<0$，$\therefore f(x_1)f(x_2)>0$,

$\therefore F(x_2)-F(x_1)<0$,

$\therefore F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数.

答案：减函数

练习 1：已知函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，且 $f(x)<0(x>0)$，试判断 $F(x)=f^2(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性，并证明

答案：增函数

练习 2：(2014～2015 学年度江苏泰州三中高一上学期期中测试)函数 $f(x)=x^2+2x+3$ 在 $[-1,+\infty)$ 的单调性为____

答案：增函数。

类型四 求函数的单调区间

例 4：求函数 $y=x+\frac{1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$ 的单调区间，并画出函数的大致图象.

解析：设 x_1、x_2 是任意两个不相等的正数，且 $x_1<x_2$，则 $\Delta x=x_2-x_1>0$,

$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=(x_2+\frac{1}{x_2})-(x_1+\frac{1}{x_1})=(x_2-x_1)+\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}=(x_2-x_1)\frac{x_1x_2-1}{x_1x_2}$.

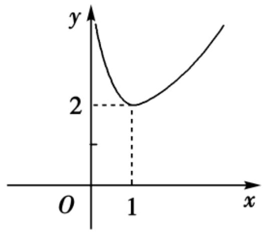
由于 $0<x_1<x_2$，则 $x_2-x_1=\Delta x>0$，$x_1x_2>0$,

当 x_1、$x_2\in(0,1]$ 时，有 $x_1x_2-1<0$，此时 $\Delta y<0$;

当 x_1、$x_2\in(1,+\infty)$ 时，有 $x_1x_2-1>0$，此时 $\Delta y>0$,

即函数 $y=x+\frac{1}{x}$，$x\in(0，+\infty)$的单调减区间$(0, 1]$，单调增区间是$(1，+\infty)$.

函数的大致图象如图所示.



答案：单调减区间$(0, 1]$，单调增区间是$(1，+\infty)$。

练习 1：求函数 $f(x)=\frac{1}{1-x}$的单调区间.

答案：单调递增区间为$(-\infty，1)$和$(1，+\infty)$.

练习 2：函数 $y=\frac{x(2-x)}{|x-1|-1}$ 的单调递减区间是______

答案： $[1,2)$ 和 $(2,+\infty)$ 。

类型五 利用单调性解不等式

例 5：已知 $y=f(x)$在定义域$(-1, 1)$上是减函数，且 $f(1-a)<f(a^2-1)$，求 a 的取值范围.

解析：由题意可得$\begin{cases}-1<1-a<1，① \\ -1<a^2-1<1，② \\ 1-a>a^2-1，③\end{cases}$

由①得 $0<a<2$，

由②得 $0<a^2<2$，$\therefore 0<|a|<\sqrt{2}$，

$\therefore -\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$，且 $a\neq 0$.

由③得 $a^2+a-2<0$，即$(a-1)(a+2)<0$，

$\therefore \begin{cases}a-1>0 \\ a+2<0\end{cases}$ 或$\begin{cases}a-1<0 \\ a+2>0\end{cases}$，

$\therefore -2<a<1$.综上可知 $0<a<1$，

$\therefore a$ 的取值范围是 $0<a<1$.

答案：$0<a<1$.

练习 1：已知 $f(x)$是定义在$[-1, 1]$上的增函数，且 $f(x-2)<f(1-x)$，求 x 的取值范围.

答案： x 的取值范围为$\left\{x \middle| 1\leq x<\frac{3}{2}\right\}$.

练习 2：函数 $f(x)$在$(-\infty，+\infty)$上是减函数，且 a 为实数，则有(　　)

A．$f(a)<f(2a)$　　　　B．$f(a^2)<f(a)$

C．$f(a^2+1)<f(a)$　　　　D．$f(a^2-a)<f(a)$

答案：C，

类型六 用单调性求最值

例 6：求 $f(x)=x+\sqrt{x-1}$的最小值.

解析：$f(x)=x+\sqrt{x-1}$的定义域为$[1，+\infty)$，

任取 x_1、$x_2\in[1，+\infty)$，且 $x_1<x_2$，$\Delta x=x_2-x_1>0$，

则 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=(x_2+\sqrt{x_2-1})-(x_1+\sqrt{x_1-1})$

$=(x_2-x_1)+(\sqrt{x_2-1}-\sqrt{x_1-1})$

$=(x_2-x_1)+\dfrac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2-1}+\sqrt{x_1-1}}$

$=(x_2-x_1)\cdot\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x_1-1}+\sqrt{x_2-1}}\right).$

$\because \Delta x=x_2-x_1>0, 1+\dfrac{1}{\sqrt{x_1-1}+\sqrt{x_2-1}}>0,$

$\therefore f(x_2)-f(x_1)>0.$

$\therefore f(x)$ 在 $[1，+\infty)$ 上为增函数，$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=1.$

答案： 1

练习 1：（2014～2015 学年度山东济宁市兖州区高一上学期期中测试）已知 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$，$x\in[2,6]$，求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值.

答案： $f(x)_{\max}=f(2)=1$，$f(x)_{\min}=f(6)=\dfrac{1}{5}$.

练习 2： 函数 $y=|x+1|$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值与最小值分别为____。

答案： $y_{\max}=3, y_{\min}=0$

当 堂 检 测

1、证明函数 $f(x)=x^3\ (x\in R)$ 是增函数。

答案：证明：设 x_1,x_2 是 R 上的任意两个实数，且 $x_1<x_2$

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$$

$\because x_1<x_2\quad \therefore x_1-x_2<0$ ， 又$\because x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+\dfrac{x_2}{2})^2+\dfrac{3x_2^2}{4}>0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$ 即 $f(x_1)<f(x_2)$　　$\therefore f(x)=x^3$ 在 R 上是增函数。

2、求函数 $f(x)=\dfrac{-x^2+a}{x}\ (a>0)$ 的单调区间。

答案：$(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$。

3、求函数 $y=\sqrt{x^2-2004x}$ 的单调递增区间.

答案：$[2004,+\infty)$.

4、如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$，对任意实数 t 都有 $f(2+t)=f(2-t)$，比较 $f(1),f(2),f(4)$ 的大小。

答案：$f(2)<f(1)<f(4)$

5、已知 $f(x)=x^2-2(1-a)x+2$ 在 $(-\infty,4]$ 上是减函数，求实数 a 的取值范围。

答案：$a\le -3$

当 堂 总 结

____

____

家 庭 作 业

基础巩固

1．下列函数中，在(－∞，0)上为减函数的是(　　)

A．$y=\frac{1}{x^2}$　　　　B．$y=x^3$

C．$y=x^0$　　　　D．$y=x^2$

答案：D

2．设函数 $f(x)=(2a-1)x+b$ 是 R 上的增函数，则有(　　)

A．$a>\frac{1}{2}$　　　　B．$a\leqslant\frac{1}{2}$

C．$a>-\frac{1}{2}$　　　　D．$a<\frac{1}{2}$

答案：A

3．如果函数 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上是增函数，对于任意的 x_1、$x_2\in[a，b]$ $(x_1\neq x_2)$，则下列结论中不正确的是(　　)

A．$\frac{f\ \ x_1\ \ -f\ \ x_2}{x_1-x_2}>0$　　　　B．$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$

C．$f(a)<f(x_1)<f(x_2)<f(b)$　　　　D．$\frac{x_1-x_2}{f\ \ x_1\ \ -f\ \ x_2}>0$

答案：C

4．(2014～2015 学年度武汉二中、龙泉中学高一上学期期中测试)函数 $f(x)=-x^2+2ax+3$ 在区间(－∞，4)上单调递增，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$a<4$　　　　B．$a\leqslant 4$

C．$a>4$　　　　D．$a\geqslant 4$

答案：D

5．若函数 $f(x)$ 在区间 $(a，b]$ 上是增函数，在区间 $(b，c)$ 上也是增函数，则函数 $f(x)$ 在区间 $(a，c)$ 上(　　)

A．必是增函数　　　　　　B．必是减函数

C．是增函数或是减函数　　　　　　D．无法确定单调性

答案：D

6．(2014～2015 学年度四川德阳五中高一上学期月考)下列函数在区间(0,1)上是增函数的是(　　)

A．$y=|x|$　　　　　　B．$y=3-2x$

C．$y=\frac{1}{2+x}$　　　　　　D．$y=x^2-4x+3$

答案：A

∴函数 $y=|x|$在(0,1)上是增函数．

7．(2014～2015 学年度宁夏育才中学高一上学期月考)函数 $y=x^2+bx+c$ 在区间$(-\infty，1)$上是减函数时，b 的取值范围是(　　)

A．$b\leqslant-2$　　　　　　B．$b\geqslant-2$

C．$b>-2$　　　　　　D．$b<-2$

答案：A

能力提升

8．(2014～2015 学年度四川德阳五中高一上学期月考)已知函数 $f(x)=\frac{x}{2x-1}$，证明函数 $f(x)$在区间$(1，+\infty)$上是减函数．

答案：设任意 $x_1\in(1，+\infty)$，$x_2\in(1，+\infty)$，且 $x_1<x_2$.

$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{2x_2-1}-\frac{x_1}{2x_1-1}$

$=\frac{2x_1x_2-x_2-2x_1x_2+x_1}{2x_2-1\quad 2x_1-1}$

$=\frac{x_1-x_2}{2x_2-1\quad 2x_1-1}$

∵$x_1<x_2$，∴$x_1-x_2<0$.

又∵$x_1>1$，$x_2>1$，

∴$2x_1-1>0, 2x_2-1>0$，

∴$\frac{x_1-x_2}{2x_2-1\quad 2x_1-1}<0$，

∴$f(x_2)<f(x_1)$．

故函数 $f(x)$在区间$(1，+\infty)$上是减函数．

9．求函数 $y=\sqrt{x-1}-\frac{1}{x}$的最小值．

答案：-1

10．已知函数 $f(x)$ 对任意 x、$y\in R$，总有 $f(x)+f(y)=f(x+y)$，且当 $x>0$ 时， $f(x)<0$，$f(1)=-\frac{2}{3}$.

(1)求证：$f(x)$ 是 R 上的单调递减函数；

(2)求 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上的最小值.

答案：(1)证明：设 x_1、x_2 是任意的两个实数，且 $x_1<x_2$，则 $\Delta x=x_2-x_1>0$，

∵ $x>0$ 时，$f(x)<0$，∴ $f(x_2-x_1)<0$，

又∵ $x_2=(x_2-x_1)+x_1$，

∴ $f(x_2)=f[(x_2-x_1)+x_1]=f(x_2-x_1)+f(x_1)$，

∴ $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)<0$，∴ $f(x_2)<f(x_1)$.

∴ $f(x)$ 是 R 上的单调递减函数.

(2)解：由(1)可知 $f(x)$ 在 R 上是减函数，

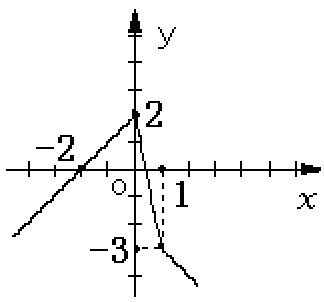
∴ $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上也是减函数，

∴ $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上的最小值为 $f(3)$.

而 $f(3)=f(1)+f(2)=3f(1)=3\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-2$.

∴函数 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上的最小值是 -2.

10．对于任意实数 $x_1,x_2,\min\{x_1,x_2\}$ 表示 x_1,x_2 中较小的那个数，若 $f(x)=2-x^2,g(x)=x$，则 $\min\{f(x),g(x)\}$ 的最大值是________。



答案：1

1.6 函数的奇偶性（优质课）教案

教学目标：

1、、理解函数的奇偶性及其图像特征；

2、 能够简单应用函数的奇偶性及其图像特征；

教学过程；

一、函数奇偶性定义

1、图形描述：

函数 $f\left(x\right)$ 的图像关于 y 轴对称 $\Leftrightarrow$ $f\left(x\right)$ 为偶函数；

函数 $f\left(x\right)$ 的图像关于原点轴对称 $\Leftrightarrow$ $f\left(x\right)$ 为奇函数

定量描述

一般地，如果对于函数 $f\left(x\right)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f\left(x\right)$ 为偶函数；如果都有 $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，则称 $f\left(x\right)$ 为奇函数；如果 $f(-x)=f(x)$ 与 $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$ 同时成立，那么函数 $f\left(x\right)$ 既是奇函数又是偶函数；如果 $f(-x)=f(x)$ 与 $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$ 都不能成立，那么函数 $f\left(x\right)$ 既不是奇函数又不是偶函数，称为非奇非偶函数。

如果函数 $f\left(x\right)$ 是奇函数或偶函数，则称函数 $y=f(x)$ 具有奇偶性。

特别提醒：

1、函数具有奇偶性的必要条件是：函数的定义域在数轴上所表示的区间关于原点对称。换言之，若所给函数的定义域不关于原点对称，则这个函数一定不具备奇偶性。2、用函数奇偶性的定义判断函数是否具有奇偶性的一般步骤：（1）考察函数的定义域是否关于原点对称。若不对称，可直接判定该函数不具有奇偶性；若对称，则进入第二步；（2）判断 $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$ 与 $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$ 这两个等式的成立情况，根据定义来判定该函数的奇偶性。

二、函数具有奇偶性的几个结论

1、$y=f\left(x\right)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $y=f\left(x\right)$ 的图像关于 y 轴对称；$y=f\left(x\right)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $y=f\left(x\right)$ 的图像关于原点对称。

2、奇函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 有定义，必有 $f\left(0\right)=0$。

3、偶函数在定义域内关于原点对称的两个区间上单调性相反；奇函数在定义域内关于原点对称的两个区间上单调性相同。

4、$f\left(x\right),g\left(x\right)$ 是定义域为 D_1,D_2 且 $D_1\cap D_2$ 要关于原点对称，那么就有以下结论：

奇±奇=奇　偶±偶=偶　奇×奇=偶　偶×偶=偶　奇×偶=奇

5、复合函数的奇偶性特点是：“内偶则偶，内奇同外”。

6、多项整式函数 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 的奇偶性

多项式函数 $P(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $P(x)$ 的偶次项的系数和常数项全为零；

多项式函数 $P(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $P(x)$ 的奇次项的系数全为零。

典 例 讲 练

类型一　函数奇偶性的判断

例 1：判断下列函数是否具有奇偶性：

(1) $f(x)=2x^4+3x^2$；　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}+x$；

解析：(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 R，

又∵ $f(-x)=2(-x)^4+3(-x)^2$

$=2x^4+3x^2=f(x)$，

∴函数 $f(x)=2x^4+3x^2$ 是偶函数.

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty，0)\cup(0，+\infty)$，

又∵ $f(-x)=\dfrac{1}{-x}-x=-(\dfrac{1}{x}+x)=-f(x)$，

∴函数 $f(x)=\frac{1}{x}+x$ 是奇函数.

答案：（1）偶函数　（2）奇函数

练习 1：判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^2+1$；

(2) $f(x)=|x+1|-|x-1|$；

答案：（1）偶函数　（2）奇函数

练习 2：(2014～2015 学年度山东枣庄第八中学高一上学期期中测试)下列函数中，既是奇函数又是增函数的是(　　)

A．$y=x+1$　　　　B．$y=-x^2$

C．$y=\frac{1}{x}$　　　　D．$y=x|x|$

答案：D

类型二 分段函数奇偶性的判定

例 2：用定义判断函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & x>0\\ x^2-1 & x<0\end{cases}$ 的奇偶性.

解析：任取 $x>0$，则 $-x<0$.

∴$f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1$

$=-(-x^2+1)=-f(x)$.

又任取 $x<0$，则 $-x>0$.

∴$f(-x)=-(-x)^2+1=-x^2+1$

$=-(x^2-1)=-f(x)$.

对 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立．∴函数 $f(x)$ 为奇函数.

答案：奇函数

练习 1：判断函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & x>0\\ 0 & x=0\\ -x^2-2 & x<0\end{cases}$ 的奇偶性.

答案：奇函数.

练习 2：如果 $F(x)=\begin{cases}2x-3 & x>0\\ f\quad x & x<0\end{cases}$ 是奇函数，则 $f(x)=$________.的单调性

答案：$2x+3$

类型三 利用奇(偶)函数图象的对称特征，求关于原点对称的区间上的解析式

例 3：若 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=x(1-x)$，求：当 $x\geqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 的解析式.

解析：当 $x>0$ 时，$-x<0$，

∵当 $x<0$ 时，$f(x)=x(1-x)$，

∴$f(-x)=-x(1+x)$，

又 $f(x)$ 为奇函数，∴$f(-x)=-f(x)$，

∴$-f(x)=-x(1+x)$，∴$f(x)=x(1+x)$，

又 $f(0)=f(-0)=-f(0)$，∴$f(0)=0$，

∴当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x(1+x)$.

答案： $x(1+x)$

练习 1：(2014～2015 学年度安徽宿州市十三校高一上学期期中测试)已知函数 $f(x)$是 R 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=2x+1$，则函数 $f(x)$的解析式为________________.

答案： $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x>0\\ 0 & x=0\\ 2x-1 & x<0\end{cases}$

练习 2：(2014～2015 学年度济南市第一中学高一上学期期中测试)函数 $f(x)$是定义在 R 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=-x+1$，则当 $x<0$ 时，$f(x)$的表达式为(　　)

A．$f(x)=x+1$　　　　B．$f(x)=x-1$

C．$f(x)=-x+1$　　　　D．$f(x)=-x-1$

答案： D

类型四 抽象函数奇偶性的证明

例 4： 已知函数 $y=f(x)(x\in R)$，若对于任意实数 a、b 都有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$，求证：$f(x)$为奇函数.

解析： 令 $a=0$，则 $f(b)=f(0)+f(b)$，

∴$f(0)=0$，再令 $a=-x$，$b=x$，

则 $f(0)=f(-x)+f(x)$，∴$f(-x)=-f(x)$，且定义域 $x\in R$ 关于原点对称，∴$f(x)$是奇函数.

答案： 见解析

练习 1： 已知函数 $y=f(x)(x\in R)$，若对于任意实数 x_1、x_2，都有 $f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=2f(x_1)\cdot f(x_2)$，求证：$f(x)$为偶函数.

答案： 令 $x_1=0$，$x_2=x$，

得 $f(x)+f(-x)=2f(0)\cdot f(x)$，　　①

令 $x_1=x$，$x_2=0$，得 $f(x)+f(x)=2f(0)\cdot f(x)$，　　②

由①②得，$f(-x)=f(x)$，且定义域 $x\in R$ 关于原点对称，

∴函数 $f(x)$为偶函数.

2: 已知 $f(x)$是定义在 R 上的任意一个增函数，$G(x)=f(x)-f(-x)$，则 $G(x)$必定为(　)

A、增函数且为奇函数　B、增函数且为偶函数　C、减函数且为奇函数　D、减函数且为偶函数

答案： A

类型五 含有参数的函数的奇偶性的判断

例 5： 设 a 为实数，讨论函数 f(x)＝x2＋|x－a|＋1 的奇偶性.

解析： 当 a＝0 时，f(x)＝x2＋|x|＋1，

∴f(－x)＝(－x)2＋|－x|＋1

＝x2＋|x|＋1＝f(x)，

∴当 a＝0 时，函数 f(x)为偶函数.

当 a≠0 时，f(1)＝2＋|1－a|，

f(－1)＝2＋|1＋a|，

假设 f(1)＝f(－1)，

则|1－a|＝|1＋a|，(1－a)2＝(1＋a)2，

∴a＝0，这与 a≠0 矛盾，

假设 f(－1)＝－f(1)，则 2＋|1＋a|＝－2－|1－a|这显然不可能成立(∵2＋|1＋a|>0，－2－|1－a|<0)，

∴f(－1)≠f(1)，f(－1)≠－f(1)，

∴当 a≠0 时，函数 f(x)是非奇非偶函数.

答案：非奇非偶.

练习 1：(2014～2015 学年度河南省实验中学高一月考)已知函数 $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$，常数 $a\in R$，讨论函数 $f(x)$的奇偶性，并说明理由.

答案：偶函数

练习 2：(2014～2015 学年度潍坊市四县市高一上学期期中测试)已知函数 $f(x)=ax+\frac{b}{x}$(其中 a、b 为常数)的图象经过两点(1,2)和$(2，\frac{5}{2})$.

(1)求函数 $f(x)$的解析式；

(2)判断函数 $f(x)$的奇偶性.

答案：(1) $f(x)=x+\frac{1}{x}$. (2) $f(x)$为奇函数.

类型六 利用奇偶性确定函数中字母的值

例 6：已知函数 $f(x)=\frac{ax^2+2}{3x+b}$是奇函数，且 $f(2)=\frac{5}{3}$. 求实数 a、b 的值；

解析：∵f(x)为奇函数，

∴f(－x)＋f(x)＝0，

$\therefore\frac{ax^2+2}{-3x+b}=-\frac{ax^2+2}{3x+b}$，

∴－3x＋b＝－3x－b，∴b＝0.

又 $f(2)=\frac{5}{3}$，$\therefore\frac{4a+2}{6}=\frac{5}{3}$，∴a＝2.

答案：a＝2. b＝0.

练习 1：(2014～2015 学年度济南市第一中学高一上学期期中测试)已知函数 $f(x)=\frac{x+b}{1+x^2}$为奇函数. 求 b 的值；

答案：b=0

练习 2：若函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 是奇函数，则 $b=$____；若函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 为偶函数，则 $b=$____。

答案：0 ；0

类型七：利用奇偶性解不等式

例 7：已知函数 f(x)是定义在(－2,2)上的奇函数且是减函数，若 f(m－1)＋f(1－2m)≥0，求实数 m 的取值范围.

解析：由题意知$\begin{cases}-2<m-1<2\\-2<1-2m<2\end{cases}$，

得$-\frac{1}{2}<m<\frac{3}{2}$.

由函数 $f(x)$ 是定义在$(-2,2)$上的奇函数及 $f(m-1)+f(1-2m)\geqslant 0$，得 $f(m-1)\geqslant f(2m-1)$.

∵函数 $f(x)$ 在$(-2,2)$上是减函数，

∴$m-1\leqslant 2m-1$，得 $m\geqslant 0$.

∴实数 m 的取值范围是$[0，\frac{3}{2})$.

答案：$[0，\frac{3}{2})$.

练习 1：定义在$[-2,2]$上的偶函数 $f(x)$，当 $x\geqslant 0$ 时单调递减，设 $f(1-m)<f(m)$，求 m 的取值范围.

答案：$\left[-1，\frac{1}{2}\right)$.

练习 2：(2014～2015 学年度河南省实验中学高一上学期月考)已知偶函数 $f(x)$ 在区间$(-\infty，0]$上单调递减，则满足 $f(2x-1)<f(\frac{1}{3})$ 的 x 的取值范围是(　　)

A. $\left(\frac{1}{3}，\frac{2}{3}\right)$　　B. $\left[\frac{1}{3}，\frac{2}{3}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2}，\frac{2}{3}\right)$　　D. $\left[\frac{1}{2}，\frac{2}{3}\right)$

答案：C

类型八 利用奇偶性求函数值

例 8：已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足 $f(x)=2g(x)+1$，且 $g(x)$ 为 R 上的奇函数，$f(-1)=8$，求 $f(1)$.

解析：∵$f(-1)=2g(-1)+1=8$，

∴$g(-1)=\frac{7}{2}$.

又∵$g(x)$ 为奇函数，∴$g(-1)=-g(1)$.

∴$g(1)=-g(-1)=-\frac{7}{2}$.

∴$f(1)=2g(1)+1=2\times(-\frac{7}{2})+1=-6$.

答案：-6.

练习 1：已知 $f(x)$ 为奇函数，在区间$[3,6]$上是增函数，且在此区间上的最大值为 8，最小值为-1，则 $2f(-6)+f(-3)=$(　　)

A. -15　　B. -13

C. -5　　D. 5

答案:A

练习 2：(2014～2015 学年度广东肇庆市高一上学期期中测试)设函数 $f(x)$$(x\in R)$为奇函数，

$f(1)=\frac{1}{2}$，$f(x+2)=f(x)+f(2)$，则 $f(5)$ 等于(　　)

A. 0　　　　　　B. 1

C. $\frac{5}{2}$　　　　　　D. 5

答案：C

当 堂 检 测

1、判断下列函数的奇偶性：

（1） $f\left(x\right)=\left|x+1\right|-\left|x-1\right|$；　　（2） $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\bullet\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$；

答案：（1）奇函数　（2）既不是奇函数也不是偶函数。

2、已知函数 $f(x)$ 是奇函数，定义域为 $\left\{x\middle|x\in R且x\neq 0\right\}$，又 $f(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上为增函数，且 $f\left(-1\right)=0$，则满足 $f\left(x\right)>0$ 的 x 的取值范围是__________。

答案：$\left(-1,0\right)\cup\left(1,+\infty\right)$。

3、若 $f(x)=ax^4-bx^2+2$，且 $f(c)=5$，求 $f(-c)$ 的值；

答案：5

4、已知 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=x(1+\sqrt[3]{x})$，求 $f(x)$ 的解析式。

答案：$f(x)=\begin{cases}x(1+\sqrt[3]{x}) & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ x(1-\sqrt[3]{x}) & (x<0)\end{cases}$

5、已知 $f\left(x\right)=\frac{x+a}{x^2+bx+1}\left(-1\leq x\leq 1\right)$ 奇函数，求 a,b 的值。

答案：$\begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}$

当 堂 总 结

家 庭 作 业

基础巩固

1．设函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且 $f(-3)=-2$，则 $f(3)+f(0)=$(　　)

A．3　　B．-3

C．2　　D．7

答案：　C

2．下面四个结论：①偶函数的图象一定与 y 轴相交；②奇函数的图象一定经过原点；③偶函数的图象关于 y 轴对称；④既是奇函数又是偶函数的函数一定是 $f(x)=0(x\in R)$，其中正确命题的个数是(　　)

A．1　　B．2

C．3　　D．4

答案：　A

3．若二次函数 $f(x)=x^2+(b-2)x$ 在区间$[1-3a,2a]$上是偶函数，则 a、b 的值是(　　)

A．2,1　　B．1,2

C．0,2　　D．0,1

答案：　B

4．(2014·湖南理，3)已知 $f(x)$、$g(x)$分别是定义在 R 上的偶函数和奇函数，且 $f(x)-g(x)=x^3+x^2+1$，则 $f(1)+g(1)=$(　　)

A．-3　　B．-1

C．1　　D．3

答案：　C

5．(2014·全国新课标Ⅰ理，3)设函数 $f(x)$、$g(x)$的定义域都为R，且 $f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数，则下列结论中正确的是(　　)

A．$f(x)g(x)$是偶函数　　B．$|f(x)|g(x)$是奇函数

C．$f(x)|g(x)|$是奇函数　　D．$|f(x)g(x)|$是奇函数

答案：　C

6．已知 $f(x)$是定义在 R 上的偶函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2-2x$，则函数 $f(x)$在 R 上的解析式是(　　)

A．$f(x)=-x(x-2)$　　B．$f(x)=x(|x|-2)$

C．$f(x)=|x|(x-2)$　　D．$f(x)=|x|(|x|-2)$

答案：　D

7．若 $f(x)=(x+a)(x-4)$为偶函数，则实数 $a=$______.

答案：4

能力提升

8．偶函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上是减函数，则 $f(-4)$______$f(a^2+4)(a\in R)$．(填：>、<、≥、≤)

答案：　≥

9．(2014～2015 学年度青海师范大学附属第二中学高一上学期月考)设函数 $f(x)=x^2-2|x|(-$

$3 \leqslant x \leqslant 3)$.

(1)证明：$f(x)$是偶函数；

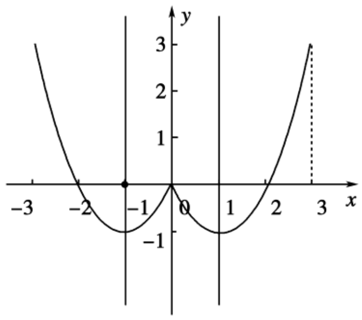
(2)画出此函数的图象，并指出函数的单调区间.

答案： (1)∵$-3 \leqslant x \leqslant 3$，∴函数 $f(x)$的定义域关于原点对称.

$f(-x)=(-x)^2-2|-x|=x^2-2|x|=f(x)$，

∴$f(x)$是偶函数.

(2)函数 $f(x)$的图象如图所示.



由图象可知，函数 $f(x)$的单调递增区间为$[-1,0]$，$[1,3]$，单调递减区间为$[-3,-1]$，$[0,1]$.

10．已知 $f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数，且 $f(x)+g(x)=(x^2+1)(x+1)$，求 $f(x)$、$g(x)$.

答案： 得 $f(x)=x^2+1$，$g(x)=x(x^2+1)$.

1.7 一次函数与二次函数（优质课）教案

教学目标：

3、 掌握一次函数和二次函数的性质及图象特征.

4、 运用一次函数与二次函数的性质解决有关问题。

教学过程：

一、一次函数

函数 $y=kx+b \quad (k \neq 0)$ 叫做一次函数，它的定义域是 R，值域是 R

1、 一次函数的图象是直线，所以一次函数又叫线性函数；

2、 一次函数 $y=kx+b \quad (k \neq 0)$ 中，k 叫直线的斜率，b 叫直线在 y 轴上的截距； $k>0$ 时，函数是增函数，$k<0$ 时，函数是减函数；

3、 $b=0$ 时该函数是奇函数且为正比例函数，直线过原点；$b \neq 0$ 时，它既不是奇函数，也不是偶函数；

二、二次函数

函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 叫做二次函数，它的定义域为是 R，图象是一条抛物线；

1、当 $b=0$ 时，该函数为偶函数，其图象关于 y 轴对称；

2、当 $a>0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 开口向上，二次函数的单调减区间为 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$，单调增区间为 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$，值域为 $\left[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$；

3、当 $a<0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 开口向下，二次函数的单调增区间为 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$，单调减区间为 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$，值域为 $\left(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}\right]$；

特别提醒：

1. 二次函数的三种表示形式

（1）一般式： $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$.

（2）顶点式： $y=a(x-m)^2+h\ (a\neq 0)$，其中 (m,h) 为抛物线的顶点坐标.

（3）两根式： $y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$，其中 x_1、 x_2 是抛物线与 x 轴交点的横坐标.

2. 利用配方法求二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的对称轴方程为：

$$x=-\frac{b}{2a}.$$

3. 若二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 对应方程 $f(x)=0$ 的两根为 x_1、 x_2，那么函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 图象的对称轴方程为：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}.$$

4. 用待定系数法求解析式时，要注意函数对解析式的要求，一次函数、正比例函数、反比例函数的比例系数、二次函数的二次项系数等；要应视具体问题，灵活地选用其形式，再根据题设条件列方程组，确定其系数.

典 例 讲 练

类型一 一次函数的性质

例 1： 已知函数 $y=(2m-1)x+1-3m$，求当 m 为何值时：

(1)这个函数为正比例函数？

(2)这个函数为奇函数？

(3)函数值 y 随 x 的增大而减小？

解析：(1)由题意，得$\begin{cases}1-3m=0\\2m-1\neq0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}m=\dfrac{1}{3}\\m\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

$\therefore m=\dfrac{1}{3}$.

(2)∵函数为奇函数，

$\therefore\begin{cases}1-3m=0\\2m-1\neq0\end{cases}$ $\therefore m=\dfrac{1}{3}$.

(3)由题意，得 $2m-1<0$，$\therefore m<\dfrac{1}{2}$.

答案：（1）$m=\dfrac{1}{3}$. （2）$m=\dfrac{1}{3}$. （3）$m<\dfrac{1}{2}$.

练习 1：已知一次函数 $y=2x+1$，

(1)当 $y\leqslant3$ 时，求 x 的范围；

(2)当 $y\in[-3,3]$时，求 x 的范围；

(3)求图象与两坐标轴围成的三角形的面积.

答案：(1) $x\leqslant1$. (2) $-2\leqslant x\leqslant1$ (3) $S=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{4}$.

练习 2：求直线 $y=-3x+1$ 和直线 $y=2x+6$ 以及 x 轴围成的三角形的面积.

答案：$\dfrac{20}{3}$

类型二 求一次函数的解析式

例 2：已知一次函数的图象经过点 $A(1,1)$、$B(-2,7)$，求这个一次函数的解析式.

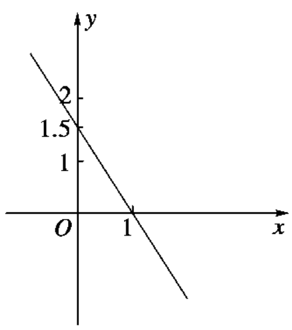
解析：设 y 关于 x 的函数解析式为 $y=ax+b(a\neq0)$，把 $A(1,1)$、$B(-2,7)$的坐标分别代入 $y=ax+b$,

得$\begin{cases}1=a+b\\7=-2a+b\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-2\\b=3\end{cases}$.

$\therefore y$ 关于 x 的函数解析式为 $y=-2x+3$.

答案：$y=-2x+3$.

练习 1：已知函数 $f(x)$ 为一次函数，其图象如图，求 $f(x)$ 的解析式.



答案：$f(x)=-1.5x+1.5$.

练习 2：已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点$(\frac{5}{2}, 0)$，且与坐标轴围成的三角形面积为$\frac{25}{4}$，求该一次函数的解析式.

答案：$y=2x-5$ 或 $y=-2x+5$.

类型三 二次函数的值域问题

例 3：(2014～2015 学年度四川德阳五中高一上学期月考)已知函数 $f(x)=x^2+x-2$，则函数 $f(x)$ 在区间$[-1,1)$上(　　)

A．最大值为 0，最小值为$-\frac{9}{4}$

B．最大值为 0，最小值为-2

C．最大值为 0，无最小值

D．无最大值，最小值为$-\frac{9}{4}$

解析：$f(x)=x^2+x-2=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}$,

∴当 $x=-\frac{1}{2}\in[-1,1)$时，$f(x)_{\min}=-\frac{9}{4}$,

∵$f(1)>f(-1)$，又 $x\neq 1$,

∴函数 $f(x)$ 无最大值，故选 D.

答案：D

练习 1：(2014～2015 学年度湖北部分重点中学高一上学期期中测试)已知函数 $f(x)=x^2+2x+4$，$x\in[-2,2]$，则 $f(x)$ 的值域是________.

答案：$[3,12]$

练习 2：(2014～2015 学年度广东珠海四中高一上学期月考)函数 $y=x^2-6x+7$ 的值域是(　　)

A．$\{y|y<-2\}$　　B．$\{y|y>-2\}$

C．$\{y|y\geq-2\}$　　D．$\{y|y\leq-2\}$

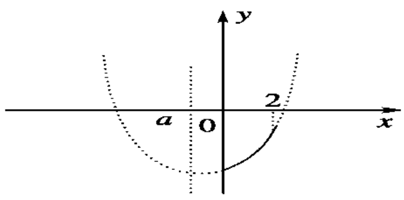
答案：C

类型四 含参数的二次函数在闭区间上最值的讨论

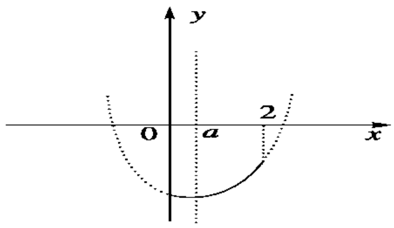
例 4：求 $f(x)=x^2-2ax-1$ 在$[0,2]$上的最大值 $M(a)$ 和最小值 $m(a)$ 的表达式.

解析：$f(x)=(x-a)^2-a^2-1$，$x\in[0,2]$,

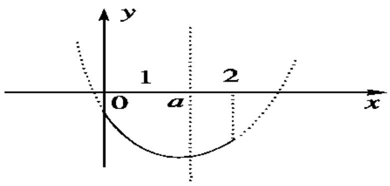
顶点是$(a,-a^2-1)$，二次项系数为正，图象开口向上，对称轴 $x=a$. 由 $f(x)$ 在顶点左边(即 $x\leq a$)单调递减，在顶点右边(即 $x\geq a$)单调递增，所以 $f(x)$ 图象的对称轴 $x=a$ 与闭区间$[0,2]$的位置关系(求两种最值)分 4 种情况求解．如图①～④中抛物线的实线部分.



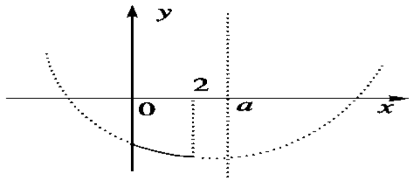
图①



图②



图③



图④

在图①中，当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，所以 $M(a)=f(2)=-4a+3$，$m(a)=f(0)=-1$.

在图②中，当 $0\leqslant a<2$，且 $f(0)\leqslant f(2)$，

即 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 $[a,2]$ 上单调递增，

所以 $M(a)=f(2)=-4a+3$，

$m(a)=f(a)=-a^2-1$.

在图③中，$\begin{cases}0<a\leqslant 2\\ f(0)>f(2)\end{cases}$，即 $1<a\leqslant 2$ 时，

$f(x)$ 在 $[0,a]$ 上单调递减，最大值 $M(a)=f(0)=-1$，最小值 $m(a)=f(a)=-a^2-1$.

在图④中，当 $a>2$ 时，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递减，所以 $M(a)=f(0)=-1$，$m(a)=f(2)=-4a+3$.

综上可知，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值与最小值分别为

$$M(a)=\begin{cases}-4a+3 & a\leqslant 1\\ -1 & a>1\end{cases},$$

$$m(a)=\begin{cases}-1 & a<0\\ -a^2-1 & 0\leqslant a\leqslant 2\\ -4a+3 & a>2\end{cases}.$$

答案：$M(a)=\begin{cases}-4a+3 & a\leqslant 1\\ -1 & a>1\end{cases}$，

$$m(a)=\begin{cases}-1 & a<0\\ -a^2-1 & 0\leqslant a\leqslant 2\\ -4a+3 & a>2\end{cases}$$

练习 1：函数 $f(x)=-x^2+2ax+1-a$ 在区间 $[0,1]$ 上有最大值 2，求实数 a 的值.

答案：$a=-1$，或 $a=2$

练习 2：若函数 $y=x^2+(a+2)x+3$，$x\in[a,b]$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则 $b=$________.

答案：6