黑龙江省龙东地区2023年初中毕业学业统一考试

数学试题

考生注意：

1．考试时间120分钟

2．全卷共三道大题，总分120分

一、选择题（每小题3分，共30分）

1. 下列运算正确的是（　　）

A. $(\ 2a)^2 =\ \ 4a^2$　　　　B. $(a\ \ b)^2 = a^2\ \ b^2$

C. $(m+2)(m\ \ 2) = m^2\ \ 4$　　　　D. $(a^5)^2 = a^7$

【答案】C

【解析】

【分析】分别根据积的乘方，完全平方公式，平方差公式和幂的乘方法则进行判断即可.

【详解】解：A. $(\ 2a)^2 = 4a^2$，原式计算错误；

B. $(a\ \ b)^2 = a^2\ \ 2ab + b^2$，原式计算错误；

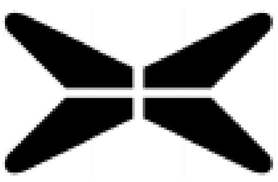
C. $(m+2)(m\ \ 2) = m^2\ \ 4$，计算正确；

D. $(a^5)^2 = a^{10}$，原式计算错误.

故选：C．

【点睛】本题考查了积的乘方，完全平方公式，平方差公式和幂的乘方，熟练掌握运算法则，牢记乘法公式是解题的关键.

2. 下列新能源汽车标志图案中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（　　）

A. 　B. 　C. 　D. 

【答案】A

【解析】

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的定义进行逐一判断即可：如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做轴对称图形；把一个图形绕着某一个点旋转180°，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点就是它的对称中心.

【详解】解：A、既是轴对称图形，也是中心对称图形，符合题意；

B、是轴对称图形，不是中心对称图形，不符合题意；

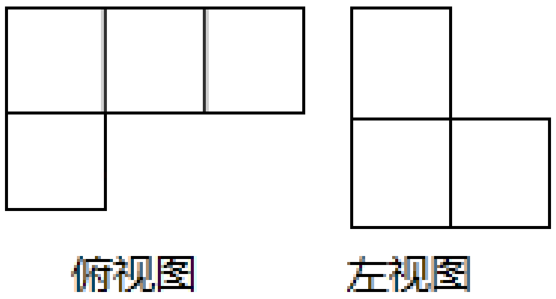
C、既不是轴对称图形，也不是中心对称图形，不符合题意；

D、是轴对称图形，不是中心对称图形，不符合题意；

故选A.

【点睛】本题主要考查了轴对称图形和中心对称图形的识别，熟知二者的定义是解题的关键.

3. 一个几何体由若干大小相同的小正方体组成，它的俯视图和左视图如图所示，那么组成该几何体所需小正方体的个数最少为（　　）



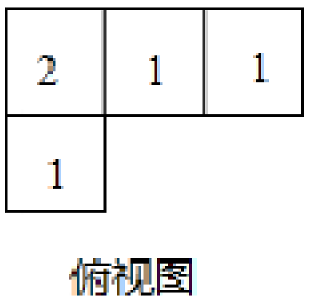
A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

【答案】B

【解析】

【分析】在"俯视打地基"的前提下，结合左视图知俯视图上一行三个小正方体的上方（第2层）至少还有1个正方体，据此可得答案.

【详解】解：由俯视图与左视图知，该几何体所需小正方体个数最少分布情况如下图所示：



所以组成该几何体所需小正方体的个数最少为5，

故选：B.

【点睛】本题主要考查由三视图判断几何体，解题的关键是掌握口诀"俯视打地基，主视疯狂盖，左视拆违章".

4. 已知一组数据1，0，3，5，x，2，3的平均数是1，则这组数据的众数是（　　）

A. 3　　B. 5　　C. 3和5　　D. 1和3

【答案】C

【解析】

【分析】先根据平均数的定义列出关于x的方程，求出x的值，从而还原这组数据，再利用众数的概念求解即可.

【详解】解：∵数据1，0，3，5，x，2，3的平均数是1，

∴$1+0\quad 3+5+x+2\quad 3=7\times 1$，

解得 $x=5$，

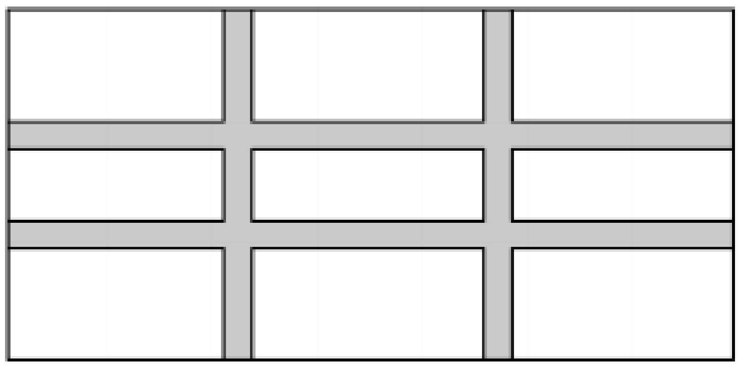
则 $1, 0, 3, 5, 5, 2, 3$，

∴这组数据的众数是 3 和 5，

故选：C．

【点睛】此题主要考查了众数和平均数，解题关键是掌握众数和平均数的概念．

5. 如图，在长为 $100m$，宽为 $50m$ 的矩形空地上修筑四条宽度相等的小路，若余下的部分全部种上花卉，且花圃的面积是 $3600m^2$，则小路的宽是（　　）



A. $5m$　　　B. $70m$　　　C. $5m$ 或 $70m$　　　D. $10m$

【答案】A

【解析】

【分析】设小路宽为 xm，则种植花草部分的面积等于长为 $(100\quad 2x)m$，宽为 $(50\quad 2x)m$ 的矩形的面积，根据花草的种植面积为 $3600m^2$，即可得出关于 x 的一元二次方程，解之取其符合题意的值即可得出结论．

【详解】解：设小路宽为 xm，则种植花草部分的面积等于长为 $(100\quad 2x)m$，宽为 $(50\quad 2x)m$ 的矩形的面积，

依题意得：$(100\quad 2x)(50\quad 2x)=3600$

解得：$x_1=5$，$x_2=70$（不合题意，舍去），

∴小路宽为 $5m$．

故选 A．

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键．

6. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x\quad 2}+1=\frac{x}{2\quad x}$ 的解是非负数，则 m 的取值范围是（　　）

A. $m\leqslant 2$　　　B. $m\geqslant 2$　　　C. $m\leqslant 2$ 且 $m\neq 2$　　　D. $m<2$ 且 $m\neq 2$

【答案】C

【解析】

【分析】解分式方程求出 $x=\frac{2\quad m}{2}$，然后根据解是非负数以及解不是增根得出关于 m 的不等式组，求解即可.

【详解】解：分式方程去分母得：$m+x\quad 2=\quad x$，

解得：$x=\frac{2\quad m}{2}$，

∵分式方程 $\frac{m}{x\quad 2}+1=\frac{x}{2\quad x}$ 的解是非负数，

∴ $\frac{2\quad m}{2}\geqslant 0$，且 $x\quad \frac{2\quad m}{2}\neq 2$，

∴ $m\leqslant 2$ 且 $m\neq 2$，

故选：C.

【点睛】本题考查了解分式方程，解一元一次不等式组，正确得出关于 m 的不等式组是解题的关键.

7. 某社区为了打造“书香社区”，丰富小区居民的业余文化生活，计划出资 500 元全部用于采购 A，B，C 三种图书，A 种每本 30 元，B 种每本 25 元，C 种每本 20 元，其中 A 种图书至少买 5 本，最多买 6 本（三种图书都要买），此次采购的方案有（　　）

A. 5种　　B. 6种　　C. 7种　　D. 8种

【答案】B

【解析】

【分析】设采购 A 种图书 x 本，B 种图书 y 本，C 种图书 z 本，根据采购三种图书需 500 元列出方程，再依据 x 的数量分两种情况讨论求解即可.

【详解】解：设采购 A 种图书 x 本，B 种图书 y 本，C 种图书 z 本，其中 $5\leqslant x\leqslant 6, y>0, z>0,$ 且 x, y, z 均为整数，根据题意得，

$30x+25y+20z=500$，

整理得，$6x+5y+4z=100$，

①当 $x=5$ 时，$6\times 5+5y+4z=100$，

∴ $y=\frac{70\quad 4z}{5}$，

∵ $y>0, z>0,$ 且 y, z 均为整数，

∴当 $70\quad 4z=10$ 时，$y=2$，∴ $z=15$；

当$70\quad 4z=30$时，$y=6$，$\therefore z=10$；

当$70\quad 4z=50$时，$y=10$，$\therefore z=5$；

②当$x=6$时，$6\times6+5y+4z=100$，

$\therefore y=\frac{64\quad 4z}{5}$，

$\because y>0, z>0$，且y, z均为整数，

$\therefore$当$64\quad 4z=20$时，$y=4$，$\therefore z=11$；

当$64\quad 4z=40$时，$y=8$，$\therefore z=6$；

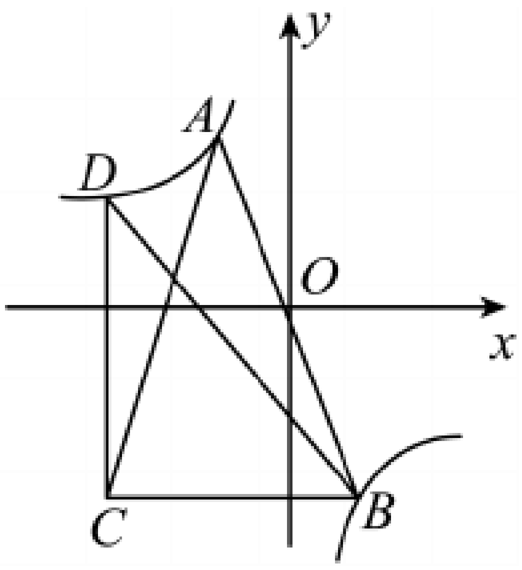
当$64\quad 4z=60$时，$y=12$，$\therefore z=1$；

综上，此次共有6种采购方案，

故选：B．

【点睛】本题主要考查了二元一次方程的应用，正确理解题意、进行分类讨论是解答本题的关键．

8. 如图，$\vartriangle ABC$是等腰三角形，AB过原点O，底边$BC\ /\!/\ x$轴，双曲线$y=\frac{k}{x}$过A, B两点，过点C作$CD\ /\!/\ y$轴交双曲线于点D，若$S_{\vartriangle BCD}=12$，则k的值是（　　）



A. 6　　　　B. 12　　　　C. $\frac{9}{2}$　　　　D. 9

【答案】C

【解析】

【分析】设$B\left(b, \frac{k}{b}\right)$，根据反比例函数的中心对称性可得$A\left(\ b, \ \frac{k}{b}\right)$，然后过点A作$AE\perp BC$于E，求出$BC=4b$，点D的横坐标为$\ 3b$，再根据$S_{\vartriangle BCD}=12$列式求出$CD$，进而可得点D的纵坐标，将点D坐标代入反比例函数解析式即可求出k的值．

【详解】解：由题意，设$B\quad b,\frac{k}{b}$ ，

∵ AB 过原点O，

∴ $A\quad b,\ \frac{k}{b}$ ，

过点 A 作 AE ⊥BC 于 E，

∵ VABC 是等腰三角形，

∴ $CE = BE = b\quad\left(\ b\right) = 2b$，

∴ $BC = 4b$，点 D 的横坐标为 $3b$，

∵底边 BC ∥ x 轴，CD ∥ y 轴，

∴ $S_{VBCD} = \frac{1}{2}BC\quad CD = \frac{1}{2}\ 4b\ CD = 12$，

∴ $CD = \frac{6}{b}$，

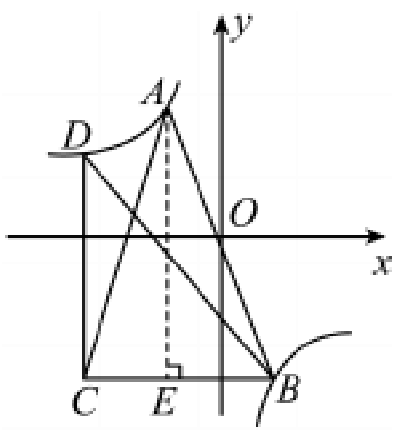
∴点 D 的纵坐标为$\frac{6}{b}\qquad\frac{k}{b} = \frac{6+k}{b}$，

∴ $D\quad 3b,\frac{6+k}{b}$ ，

∴ $k = \ 3b\ \frac{6+k}{b} = \ 3\left(6+k\right)$，

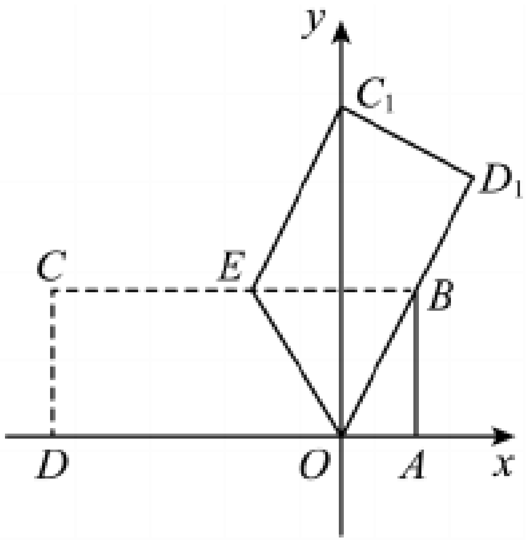
解得：$k = \ \frac{9}{2}$，

故选：C．



【点睛】本题考查了反比例函数的图象和性质，中心对称的性质，等腰三角形的性质等知识，设出点 B 坐标，正确表示出点 D 的坐标是解题的关键.

9. 如图，在平面直角坐标中，矩形 ABCD =的边 AD　5,OA :OD　1:4，将矩形 ABCD 沿直线 OE 折叠到如图所示的位置，线段 OD_1 恰好经过点 B，点 C 落在 y 轴的点 C_1 位置，点 E 的坐标是（　　）



A. $(1,2)$ B. $(-1,2)$ C. $(\sqrt{5}-1,2)$ D. $(1-\sqrt{5},2)$

【答案】D

【解析】

【分析】首先证明$\triangle AOB\sim\triangle D_1C_1O$，求出$AB=CD=2$，连结$OC_1$，设$BC$与$OC_1$交于点F，然后求出$OC=OC_1=2\sqrt{5}$，可得$C_1F=2\sqrt{5}-2$，再用含EF的式子表示出$EC_1$，最后在$Rt\triangle EFC_1$中，利用勾股定理构建方程求出EF即可解决问题.

【详解】解：∵矩形$ABCD$的边$AD=5$，$OA:OD=1:4$，

∴$OA=1$，$OD=4$，$BC=5$，

由题意知$AB\parallel OC_1$，

∴$\angle ABO=\angle D_1OC_1$，

又∵$\angle BAO=\angle OD_1C_1=90^\circ$，

∴$\triangle AOB\sim\triangle D_1C_1O$，

∴$\dfrac{OA}{AB}=\dfrac{D_1C_1}{OD_1}$，

由折叠知$OD_1=OD=4$，$D_1C_1=DC=AB$，

∴$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{AB}{4}$，

∴$AB=2$，即$CD=2$，

连接OC，设BC与OC_1交于点F，

∴$OC=\sqrt{OD^2+CD^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

∵$\angle FOA=\angle OAB=\angle ABF=90^\circ$，

∴四边形$OABF$是矩形，

∴ $AB=OF=2$，$\angle BFO=90^{\circ}=\angle EFC_1$，$OA=BF=1$，

∴ $CF=5-1=4$，

由折叠知 $OC_1=OC=2\sqrt{5}$，$EC_1=EC=CF-EF=4-EF$，

∴ $C_1F=OC_1-OF=2\sqrt{5}-2$，

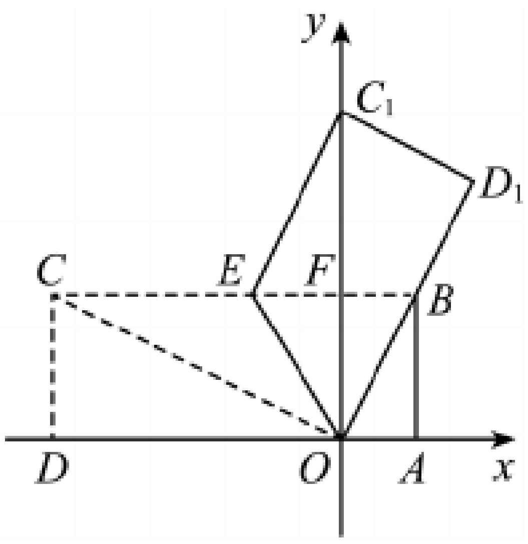
∵在 $Rt\triangle EFC_1$ 中，$EF^2+C_1F^2=EC_1^2$，

∴ $EF^2+\left(2\sqrt{5}-2\right)^2=(4-EF)^2$，

解得：$EF=\sqrt{5}-1$，

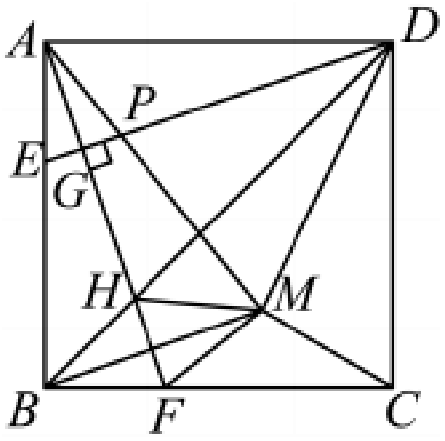
∴点 E 的坐标是 $\left(1-\sqrt{5},2\right)$，

故选：D．



【点睛】本题考查了矩形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，折叠的性质以及勾股定理的应用等知识，通过证明三角形相似，利用相似三角形的性质求出 AB 的长是解题的关键．

10. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E,F 分别是 AB,BC 上的动点，且 $AF\perp DE$，垂足为 G，将 $\triangle ABF$ 沿 AF 翻折，得到 $\triangle AMF$，AM 交 DE 于点 P，对角线 BD 交 AF 于点 H，连接 HM，CM，DM，BM，下列结论正确的是：① $AF=DE$；② $BM\parallel DE$；③若 $CM\perp FM$，则四边形 BHMF 是菱形；④当点 E 运动到 AB 的中点，$\tan\angle BHF=2\sqrt{2}$；⑤ $EP\cdot DH=2AG\cdot BH$．（　　）



A. ①②③④⑤　　B. ①②③⑤　　C. ①②③　　D. ①②⑤

【答案】B

【解析】

【分析】利用正方形的性质和翻折的性质，逐一判断，即可解答.

【详解】解：Q 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle DAE = \angle ABF = 90°$，$DA = AB$，

Q $AF \perp DE$，

$\therefore \angle BAF + \angle AED = 90°$，

Q $\angle BAF + \angle AFB = 90°$，

$\therefore \angle AED = \angle BFA$，

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle AED \left(AAS\right)$，

$\therefore AF = DE$，故①正确，

Q 将$\triangle ABF$ 沿 AF 翻折，得到VAMF，

$\therefore BM \perp AF$，

$\because AF \perp DE$，

$\therefore BM // DE$，故②正确，

当$CM \perp FM$ 时，$\angle CMF = 90°$，

Q $\angle AMF = \angle ABF = 90°$，

$\therefore \angle AMF + \angle CMF = 180°$，即 A, M, C 在同一直线上，

$\therefore \angle MCF = 45°$，

$\therefore \angle MFC = 90° \quad \angle MCF = 45°$，

通过翻折的性质可得 $\angle HBF = \angle HMF = 45°$，$BF = MF$，

$\therefore \angle HMF = \angle MFC$，$\angle HBC = \angle MFC$，

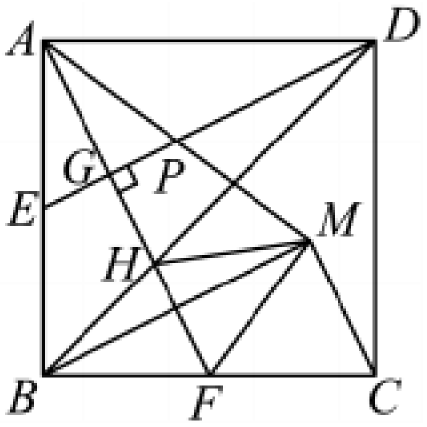
$\therefore BC // MH$，$HB // MF$，

$\therefore$四边形 $BHMF$ 是平行四边形，

Q $BF = MF$，

$\therefore$平行四边形 $BHMF$ 是菱形，故③正确，

当点 E 运动到 AB 的中点，如图，



设正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$，则 $AE=BF=a$，

在 $Rt\triangle AED$ 中，$DE=\sqrt{AD^2+AE^2}=\sqrt{5}a=AF$，

Q $\angle AHD=\angle FHB$，$\angle ADH=\angle FBH=45^\circ$，

$\therefore \triangle AHD\backsim\triangle FHB$，

$\therefore \frac{FH}{AH}=\frac{BF}{AD}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$，

$\therefore AH=\frac{2}{3}AF=\frac{2\sqrt{5}}{3}a$，

Q $\angle AGE=\angle ABF=90^\circ$，

$\therefore \triangle AGF\backsim\triangle ABF$，

$\therefore \frac{AE}{AF}=\frac{EG}{BF}=\frac{AG}{AB}=\frac{a}{\sqrt{5}a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore EG=\frac{\sqrt{5}}{5}BF=\frac{\sqrt{5}}{5}a$，$AG=\frac{\sqrt{5}}{5}AB=\frac{2\sqrt{5}}{5}a$，

$\therefore DG=ED-EG=\frac{4\sqrt{5}}{5}a$，$GH=AH-AG=\frac{4\sqrt{5}}{15}a$，

Q $\angle BHF=\angle DHA$，

在 $Rt\triangle DGH$ 中，$\tan\angle BHF=\tan\angle DHA=\frac{DG}{GH}=3$，故④错误，

Q $\triangle AHD\backsim\triangle FHB$，

$\therefore \frac{BH}{DH}=\frac{1}{2}$，

$\therefore BH=\frac{1}{3}BD=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{2}a=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$，$DH=\frac{2}{3}BD=\frac{2}{3}\times 2\sqrt{2}a=\frac{4\sqrt{2}}{3}a$，

Q $AF\perp EP$，

根据翻折的性质可得 $EP=2EG=\frac{2\sqrt{5}}{5}a$，

$\therefore EP\quad DH = \quad \frac{2\sqrt{5}}{5}a\quad \frac{4\sqrt{2}}{3}a\quad \frac{8\sqrt{10}}{15}a^2$，

$2AG\quad BH\ = 2\ \frac{2\sqrt{5}}{5}a\quad \frac{2\sqrt{2}}{3}a = \frac{8\sqrt{10}}{15}a^2$，

$\therefore EP\quad DH\ =\ 2AG\quad BH\ = \frac{8\sqrt{10}}{15}a^2$，故⑤正确；

综上分析可知，正确的是①②③⑤.

故选：B．

【点睛】本题考查了正方形的性质，翻折的性质，相似三角形的判定和性质，正切的概念，熟练按照要求做出图形，利用寻找相似三角形是解题的关键.

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

11. 据交通运输部信息显示：2023 年“五一”假期第一天，全国营运性客运量约 5699 万人次，将 5699 万用科学记数法表示为__________.

【答案】5.699×10^7

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\leq|a|<10$，n 为整数，确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位，n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值 ≥10 时，n 是正数；当原数的绝对值 <1 时，n 是负数.

【详解】5699 万 $56990000\quad 5.699\times10^7$，

故答案为：5.699×10^7.

【点睛】此题考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\leq|a|<10$，n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

12. 函数 $y=\sqrt{x+3}$ 中，自变量 x 的取值范围是____________.

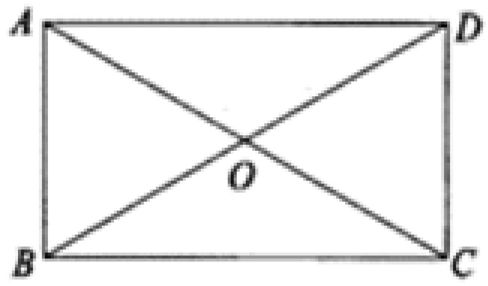
【答案】$x\geq 3$

【解析】

【详解】解：由题意得，$x+3\geq0$，

解得 $x\geq3$.

13. 如图，在矩形 $ABCD$ 中对角线 AC ，BD 交于点 O ，请添加一个条件______________，使矩形 $ABCD$ 是正方形（填一个即可）



【答案】$AB=BC$ 或 $AC\perp BD$

【解析】

【分析】根据正方形的判定定理可知：邻边相等的矩形是正方形，对角线互相垂直的矩形是正方形.

【详解】∵邻边相等的矩形是正方形，

∴可添加条件 $AB=BC$

或者∵对角线互相垂直的矩形是正方形

∴还可以添加条件 $AC\perp BD$

【点睛】本题考查正方形的判定，找出正方形与矩形的性质差异，即为可添加的条件.

14. 一个不透明的袋子中装有 3 个红球和 2 个白球，这些小球除标号外完全相同，随机摸出两个小球，恰好是一红一白的概率是__________.

【答案】$\frac{3}{5}$##0.6

【解析】

【分析】首先根据题意列出表格，然后由表格求得所有等可能的结果与随机摸出一红一白的情况，再利用概率公式即可求得答案.

【详解】解：列表得：

	红 1	红 2	红 3	白 1	白 2
红 1		（红 1，红 2）	（红 1，红 3）	（红 1，白 1）	（红 1，白 2）
红 2	（红 2，红 1）		（红 2，红 3）	（红 2，白 1）	（红 2，白 2）
红 3	（红 3，红 1）	（红 3，红 2）		（红 3，白 1）	（红 3，白 2）
白 1	（白 1，红 1）	（白 1，红 2）	（白 1，红 3）		（白 1，白 2）
白 2	（白 2，红 1）	（白 2，红 2）	（白 2，红 3）	（白 2，白 1）	

由列表可知：共有 20 种等可能的结果，其中随机摸出两个小球，恰好是一红一白的情况有 12 种，

∴恰好是一红一白的概率是 $\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$，

故答案为：$\frac{3}{5}$.

【点睛】本题考查的是用列表法或画树状图法求概率．注意列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件．用到的知识点为：概率＝所求情况数与总情况数之比．

15. 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x+5>0 \\ x\quad m \leqslant 1 \end{cases}$ 有 3 个整数解，则实数 m 的取值范围是__________.

【答案】 $3 \leqslant m < \ 2$ ## $2 > m \geqslant 3$

【解析】

【分析】解不等式组，根据不等式组有 3 个整数解得出关于 m 的不等式组，进而可求得 m 的取值范围．

【详解】解：解不等式组 $\begin{cases} x+5>0 \\ x\quad m \leqslant 1 \end{cases}$ 得： $5< x \leqslant m+1$，

∵关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x+5>0 \\ x\quad m \leqslant 1 \end{cases}$ 有 3 个整数解，

∴这 3 个整数解为 4， 3， 2，

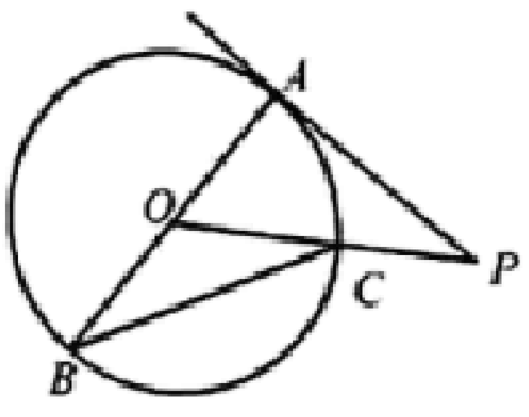
∴ $2 \leqslant m+1 < \ 1$，

解得： $3 \leqslant m < \ 2$，

故答案为： $3 \leqslant m < \ 2$．

【点睛】本题考查了解一元一次不等式组，一元一次不等式组的整数解，正确得出关于 m 的不等式组是解题的关键．

16. 如图， AB 是 e O 的直径，PA 切 e O 于点 A， PO 交 e O 于点 C，连接 BC，若 $\angle B = 28°$，则 $\angle P =$__________°.



【答案】34

【解析】

【分析】首先根据等边对等角得到 $\angle B = \angle OCB = 28°$，然后利用外角的性质得到 $\angle AOC = \angle B + \angle OCB = 56°$，利用切线的性质得到 $\angle OAP = 90°$，最后利用三角形内角和定理求解即可．

【详解】解：∵ $\angle B=28^\circ$，$OB=OC$，

∴ $\angle B=\angle OCB=28^\circ$，

∴ $\angle AOC=\angle B+\angle OCB=56^\circ$，

∵ PA 切⊙O 于点 A，

∴ $\angle OAP=90^\circ$，

∴ $\angle P=180^\circ-\angle OAP-\angle AOP=34^\circ$.

故答案为：34.

【点睛】此题考查了切线的性质和三角形的外角的性质，三角形内角和定理等知识，解题的关键是熟练掌握以上知识点.

17. 已知圆锥的母线长 $13cm$，侧面积 $65\pi cm^2$，则这个圆锥的高是__________ cm.

【答案】12

【解析】

【分析】利用圆锥的侧面积公式可得到底面半径，再利用勾股定理即可得到高.

【详解】解：根据圆锥侧面积公式 $S_{侧}=\pi rl$ 变形可得 $r=\frac{S_{侧}}{\pi l}=\frac{65\pi}{13\pi}=5cm$，

根据圆锥母线公式 $l=\sqrt{r^2+h^2}$，可得 $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12cm$，

故答案为：12.

【点睛】本题考查了圆锥的侧面积公式和母线公式，熟知上述公式是解题的关键.

18. 在 $Rt\triangle ACB$ 中，$\angle BAC=30^\circ, CB=2$，点 E 是斜边 AB 的中点，把 $Rt\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转，得 $Rt\triangle AFD$，点 C，点 B 旋转后的对应点分别是点 D，点 F，连接 CF，EF，CE，在旋转的过程中，$\triangle CEF$ 面积的最大值是__________.

【答案】$4+\sqrt{3}$ ## $\sqrt{3}+4$

【解析】

【分析】过点 A 作 $AG\perp CE$ 交 CE 的延长线于点 G，求出 $AG=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}$，然后由旋转的性质可知点 F 在以 A 为圆心 AB 的长为半径的圆上运动，则可得如图中 G、A、F 三点共线时点 F 到直线 CE 的距离最大，求出距离的最大值，然后计算即可.

【详解】解：如图，在 $Rt\triangle ACB$ 中，$\angle BAC=30^\circ$，$CB=2$，点 E 是斜边 AB 的中点，

$\therefore AB=2CB=4$，$CE=\frac{1}{2}AB=2=AE$，$AC=\sqrt{3}BC=2\sqrt{3}$，

$\therefore \angle ECA=\angle BAC=30^\circ$，

过点 A 作 $AG\perp CE$ 交 CE 的延长线于点 G，

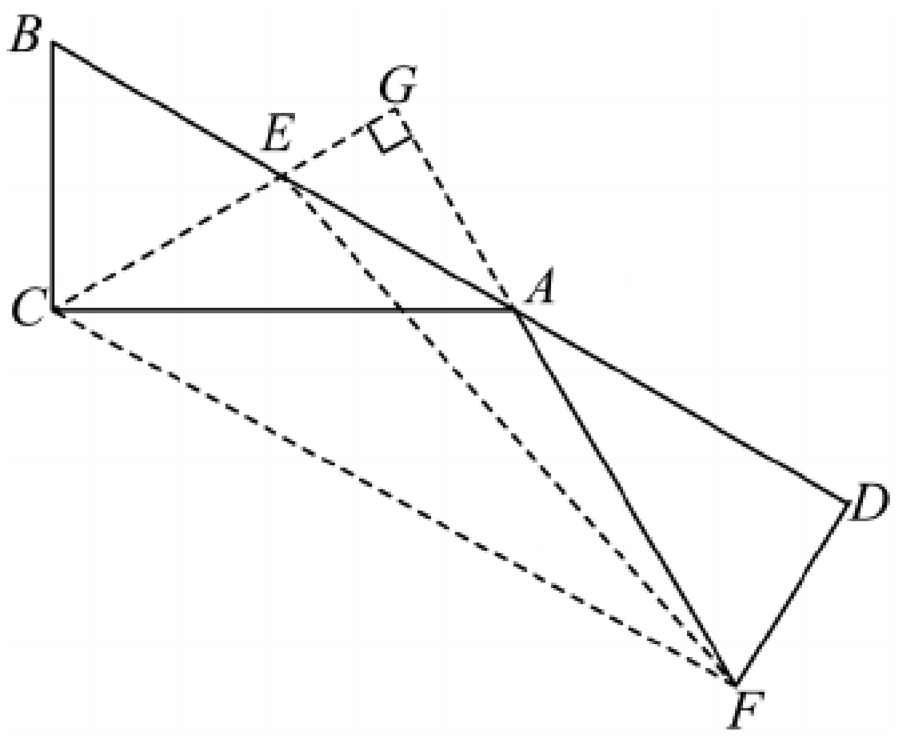
$\therefore AG=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}$，

又∵在旋转的过程中，点 F 在以 A 为圆心 AB 的长为半径的圆上运动，$AF=AB=4$，

∴点 F 到直线 CE 的距离的最大值为 $4+\sqrt{3}$，（如图，G 、A、F 三点共线时）

∴ $\triangle CEF$ 面积的最大值 $=\frac{1}{2}CE\times\left(4+\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2}\times 2\times\left(4+\sqrt{3}\right)=4+\sqrt{3}$，

故答案为：$4+\sqrt{3}$.



【点睛】本题考查了含 30° 直角三角形的性质，直角三角形斜边中线的性质，旋转的性质，圆的基本性质等知识，根据旋转的性质求出点 F 到直线 CE 距离的最大值是解答本题的关键.

19. 矩形 ABCD 中，$AB=3$，$AD=9$，将矩形 ABCD 沿过点 A 的直线折叠，使点 B 落在点 E 处，若 $\triangle ADE$ 是直角三角形，则点 E 到直线 BC 的距离是__________.

【答案】6 或 $3+2\sqrt{2}$ 或 $3-2\sqrt{2}$

【解析】

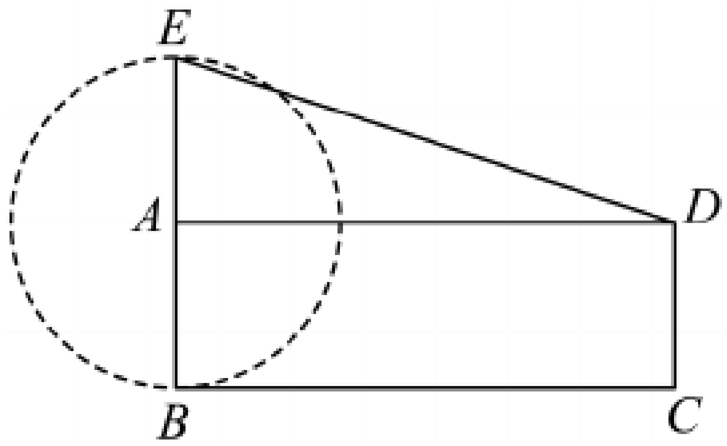
【分析】由折叠的性质可得点 E 在以点 A 为圆心，AB 长为半径的圆上运动，延长 BA 交 ⊙A 的另一侧于点 E，则此时 $\triangle ADE$ 是直角三角形，易得点 E 到直线 BC 的距离；当过点 D 的直线与圆相切于点 E 时，$\triangle ADE$ 是直角三角形，分两种情况讨论即可求解.

【详解】解：由题意矩形 ABCD 沿过点 A 的直线折叠，使点 B 落在点 E 处，

可知点 E 在以点 A 为圆心，AB 长为半径的圆上运动，

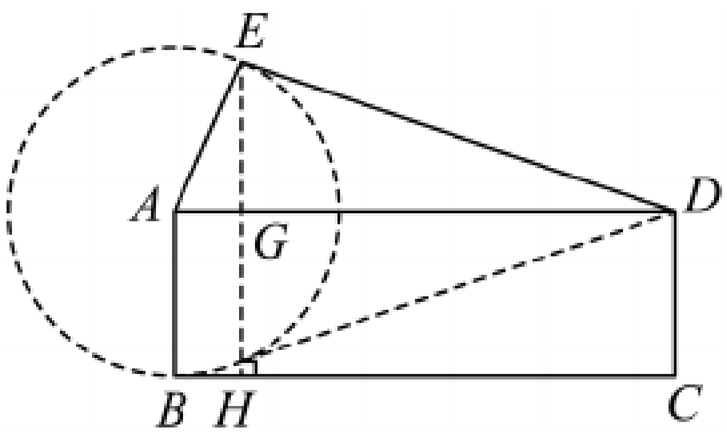
如图，延长 BA 交 ⊙A 的另一侧于点 E，则此时 $\triangle ADE$ 是直角三角形，

点 E 到直线 BC 的距离为 BE 的长度，即 $BE=2AB=6$，



当过点 D 的直线与圆相切与点 E 时，$\triangle ADE$ 是直角三角形，分两种情况，

①如图，过点 E 作 $EH\perp BC$ 交 BC 于点 H，交 AD 于点 G，



∵四边形 ABCD 是矩形，

∴ $EG\perp AD$，

∴四边形 ABHG 是矩形，$GH=AB=3$

∵ $AE=AB=3$，$AE\perp DE$，$AD=9$，

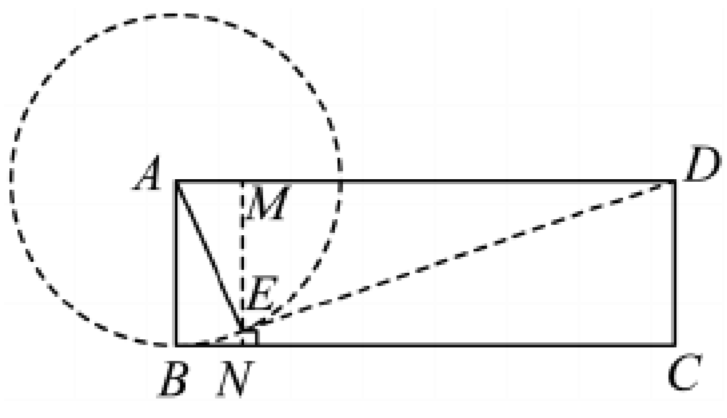
由勾股定理可得 $DE=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$，

∵ $S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}AE\cdot DE=\frac{1}{2}AD\cdot EG$，

∴ $EG=2\sqrt{2}$，

∴ E 到直线 BC 的距离 $EH=EG+GH=3+2\sqrt{2}$，

②如图，过点 E 作 $EN\perp BC$ 交 BC 于点 N，交 AD 于点 M，



∵四边形 ABCD 是矩形，

∴ $NM\perp AD$，

∴四边形 ABNM 是矩形，$MN=AB=3$

$\because AE=AB=3$，$AE\perp DE$，$AD=9$，

由勾股定理可得 $DE=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$，

$\because S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}AE\cdot DE=\frac{1}{2}AD\cdot EM$，

$\therefore EM=2\sqrt{2}$，

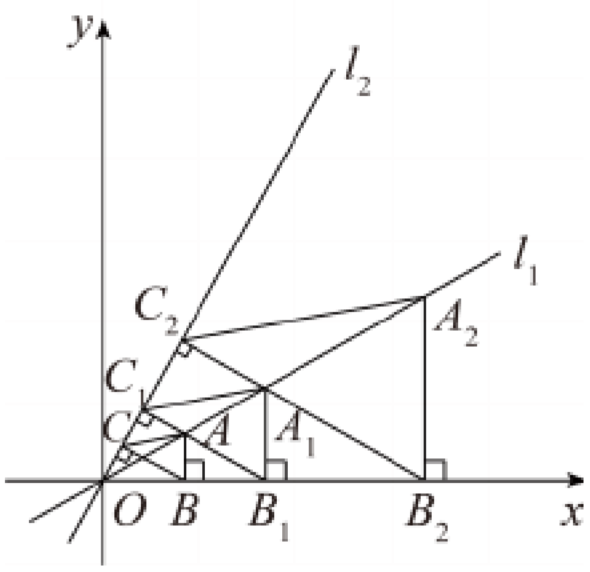
$\therefore$ E 到直线 BC 的距离 $EN=MN-GN=3-2\sqrt{2}$，

综上，6 或 $3+2\sqrt{2}$ 或 $3-2\sqrt{2}$，

故答案为：6 或 $3+2\sqrt{2}$ 或 $3-2\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了矩形的折叠问题切线的应用，以及勾股定理，找到点 E 的运动轨迹是解题的关键.

20. 如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 的顶点 A 在直线 $l_1: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上，顶点 B 在 x 轴上，AB 垂直 x 轴，且 $OB=2\sqrt{2}$，顶点 C 在直线 $l_2: y=\sqrt{3}x$ 上，$BC\perp l_2$；过点 A 作直线 l_2 的垂线，垂足为 C_1，交 x 轴于 B_1，过点 B_1 作 A_1B_1 垂直 x 轴，交 l_1 于点 A_1，连接 A_1C_1，得到第一个 $\triangle A_1B_1C_1$；过点 A_1 作直线 l_2 的垂线，垂足为 C_2，交 x 轴于 B_2，过点 B_2 作 A_2B_2 垂直 x 轴，交 l_1 于点 A_2，连接 A_2C_2，得到第二个 $\triangle A_2B_2C_2$；如此下去，……，则 $\triangle A_{2023}B_{2023}C_{2023}$ 的面积是__________.



【答案】$2^{4046}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】解直角三角形得出 $\angle AOB=30^\circ$，$\angle BOC=60^\circ$，求出 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，证明 $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle ABC\backsim\triangle A_2B_2C_2$，得出 $S_{\triangle A_1B_1C_1}=4S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle A_2B_2C_2}=4^2S_{\triangle ABC}=\left(2^2\right)^2S_{\triangle ABC}$，总结得出 $S_{\triangle A_nB_nC_n}=\left(2^n\right)^2S_{\triangle ABC}=2^{2n}S_{\triangle ABC}$，从而得出 $S_{\triangle A_{2023}B_{2023}C_{2023}}=2^{2\times2023}\times\sqrt{3}=2^{4046}\sqrt{3}$.

【详解】解：∵$OB=2\sqrt{2}$，

∴$B(2\sqrt{2},0)$，

∵$AB\perp x$轴，

∴点A的横坐标为$2\sqrt{2}$，

∵$l_1:y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

∴点A的纵坐标为$\frac{\sqrt{3}}{3}\times2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，

∴$\tan\angle AOB=\frac{AB}{OB}=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴$\angle AOB=30°$，

∵$l_2:y=\sqrt{3}x$，

∴设$C(x_C,y_C)$，则$y_C=\sqrt{3}x_C$，

∴$\tan\angle BOC=\frac{y_C}{x_C}=\sqrt{3}$，

∴$\angle BOC=60°$，

∴$OC=OB\times\cos60°=2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\sqrt{2}$，

$BC=OB\times\sin60°=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$，

∴$\angle AOC_1=\angle BOC-\angle AOB=30°$，

∴$\angle AOB=\angle AOC_1$，

∴OA平分$\angle BOC$，

∵$AC_1\perp l_2$，$AB\perp OB$，

∴$AC_1=AB=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，

∵$AB=AC_1$，$OA=OA$，

$\therefore \mathrm{Rt}VOAB \cong \mathrm{Rt}VOAC_1$,

$\therefore OC_1 = OB = 2\sqrt{2}$,

$\therefore CC_1 = OC_1 \quad OC = 2\sqrt{2} \quad \sqrt{2} = \sqrt{2}$,

$\therefore S_{VABC} = 2S_{VOAB} \quad S_{VACC_1} \quad S_{VBOC}$

$= 2 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{6}$

$= \sqrt{3}$,

$\because BC \perp l_2$,

$\therefore \angle BCO = 90°$,

$\therefore \angle CBO = 90° \quad 60° = 30°$,

$\because B_1C_1 \perp l_2$, $BC \perp l_2$, $B_2C_2 \perp l_2$,

$\therefore BC \parallel B_1C_1 \parallel B_2C_2$,

$\therefore \angle C_1B_1O = \angle C_2B_2O = \angle CBO = 30°$,

$\therefore \angle C_1B_1O = \angle C_2B_2O = \angle CBO = \angle AOB$,

$\therefore AO = AB_1$, $A_1O = A_1B_2$,

$\because AB \perp x$轴, $A_1B_1 \perp x$轴,

$\therefore OB = \frac{1}{2}OB_1$, $OB_1 = \frac{1}{2}OB_2$,

$\because AB \perp x$轴, $A_1B_1 \perp x$轴, $A_2B_2 \perp x$轴,

$\therefore AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2$,

$\therefore \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{1}{2}$, $\frac{AB}{A_2B_2} = \frac{OB}{OB_2} = \frac{1}{4}$,

$\because BC \parallel B_1C_1 \parallel B_2C_2$,

$\therefore \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{1}{2}$, $\frac{BC}{B_2C_2} = \frac{OB}{OB_2} = \frac{1}{4}$,