拓展 1 利用递推公式求通项公式常用的方法（精练）

题组1 公式法

1.（2022·上海）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=2n^2-2n+3$，则数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=$_________.

2.（2022·云南）已知数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_1}{\sqrt{1}}+\frac{a_2}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\frac{n^2+n}{2}\ (n\in \mathrm{N}^*)$，则$a_n=$____.

3.（2022·江西）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=2$，$S_{n+1}=4a_n+2$，则$a_n=$__________.

4.（2022·山西忻州）已知S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，且$a_1=1$，$S_n=n^2a_n$.

(1)求a_2，a_3；

(2)求$\{a_n\}$的通项公式.

5.（2022·甘肃）已知数列$\{an\}$中，$a_1=1$，前n项和$S_n=\frac{n+2}{3}a_n$.

(1)求a_2，a_3;

(2)求$\{a_n\}$的通项公式.

6．（2022·广东）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$S_n=\frac{n}{2}(n+a_2-1)$.求$\{a_n\}$的通项公式.

7．（2022·全国·高二课时练习）已知各项均为正数的数列$\{an\}$的前 n 项和为 Sn，且满足 $S_1=1$，$2\left(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}\right)=a_n$（$n\geq 2$，$n\in \mathrm{N}^*$），求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n____________；

8．（2022·全国·高三专题练习）已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2a_n+n-3$，求$\{a_n\}$的通项公式__________.

题组2　累乘法

1．（2022·福建省 ）在数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n$（$n\in\mathbf{N}^*$），且$a_1=4$，则数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=$ ________.

2．（2022·宁夏·平罗中学高一期中（理））数列$\{a_n\}$满足：$a_1=2$，$na_{n+1}=2(n+1)a_n$，则数列$\{a_n\}$的通项$a_n=$ ________________.

3．（2023·云南）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，前n项和$S_n=\frac{n+2}{3}a_n$，则$\{a_n\}$的通项公式为___________.

4．（2022 江苏）已知数列$\{a_n\}$的项满足$a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n$，$a_1=2$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为___________.

5．（2022 河北）数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\frac{2}{3}$，$\left(2^{n+2}-1\right)a_{n+1}=\left(2^{n+1}-2\right)a_n\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$，则$\{a_n\}$的通项公式为 _____________.

6．（2022·安徽）已知在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}=a_{n+1}-2$，则$a_n=$__________.

7．（2022·全国·高二单元测试）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且$S_n+na_n=1(n\geq 1)$，则$\{a_n\}$的通项公式$a_n=$ ______.

8．（2022·安徽）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=\frac{n+1}{2n}a_n$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

题组3　累加法

1．（2022·河北唐山·三模）已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}^2-(2n+1)a_{n+1}=a_n^2+(2n+1)a_n$．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，证明：$T_n<2$．

2．（2022·全国·高三专题练习）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式.

3．（2021·安徽·马鞍山二中高三阶段练习(理)）数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{3}$，且$a_n-a_{n+1}=(2n+3)a_na_{n+1}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

题组4　构造法

1．（2022·江苏省）已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=2$，且满足$a_{n+1}=3a_n+2(n\in \mathrm{N}^*)$，则$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n=$______.

2．（2022·陕西·西安中学高二期中）设数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和为S_n，已知$a_1=1$，$S_{n+1}-2S_n=1$，$n\in \mathrm{N}^*$，则数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为________.

3．（2022·上海市晋元高级中学 ）设数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=1$，且$a_n=3a_{n-1}+4\left(n\geq 2\right)$，则数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为$a_n=$___________.

4．（2022·全国·高三专题练习)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=\dfrac{1}{3}$，且满足$2a_na_{n+1}=a_{n-1}(3a_{n+1}-a_n)$ $(n\geq 2)$，则$a_n=$___________.

5．（2023·天津）在数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=\dfrac{7}{8}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{3}$，$n\in \mathbf{N}^*$，则该数列的通项公式$a_n=$______.

6．（2022·黑龙江·建三江分局第一中学高二期中）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=1$，且$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$．则数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为$a_n=$_______.

7．（2022 重庆）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3^n$，求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式_____________.

8．（2022·安徽宿州·高二期中）已知数列$\left\{a_n\right\}$的首项$a_1=1$，且$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2}{a_n}+1$，数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式______________；

9．（2023·全国·高三专题练习)已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=3,a_{n+1}=3a_n+2\times 3^{n+1},n\in N^*$，求数列$\{a_n\}$的通项公式___；

10（2022·四川）已知数列的递推公式$a_{n+1}=\dfrac{3a_n-4}{a_n-1}$，且首项$a_1=5$，求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式_____.

11．（2022·全国·高三专题练习）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足：$a_1=2$，$a_n=\dfrac{2}{1+a_{n-1}}\left(n\geq 2\right)$，求数列$\left\{a_n\right\}$

的通项公式______.

拓展 1 利用递推公式求通项公式常用的方法（精练）

题组 1 公式法

1．（2022·上海）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=2n^2-2n+3$，则数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=$_________.

答案：$\begin{cases}3,n=1\\4n-4,n\geq 2\end{cases}$

【解析】$\because S_n=2n^2-2n+3$,故当$n=1$时，$a_1=S_1=3$；

当$n\geq 2$时，$S_{n-1}=2(n-1)^2-2(n-1)+2$，$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=4n-4$

$\because a_1=S_1=3$ 不适合上式，

$\therefore a_n=\begin{cases}3,n=1\\4n-4,n\geq 2\end{cases}$，

故答案为：$\begin{cases}3,n=1\\4n-4,n\geq 2\end{cases}$.

2．（2022·云南）已知数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_1}{\sqrt{1}}+\frac{a_2}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\frac{n^2+n}{2}\ (n\in\mathrm{N}^*)$，则$a_n=$____.

答案：$n\sqrt{n}$

【解析】由数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_1}{\sqrt{1}}+\frac{a_2}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\frac{n^2+n}{2}\ (n\in\mathrm{N}^*)$①，

可得$a_1=1$，$\frac{a_1}{\sqrt{1}}+\frac{a_2}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{\sqrt{n-1}}=\frac{(n-1)^2+n-1}{2}$ ($n\geq 2$且$n\in\mathrm{N}^*$)②，

①-②可得$\frac{a_n}{\sqrt{n}}=n$ ($n\geq 2$且$n\in\mathrm{N}^*$)，所以$a_n=n\sqrt{n}$，

当$n=1$时，$a_1=1$满足通项公式，

所以$a_n=n\sqrt{n}$，

故答案为：$n\sqrt{n}$.

3．（2022·江西）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=2$，$S_{n+1}=4a_n+2$，则$a_n=$__________.

答案：$n\cdot 2^n$

【解析】由题意得$S_2=4a_1+2$，所以$a_1+a_2=4a_1+2$，解得$a_2=8$，

又因为$a_{n+2}=S_{n+2}-S_{n+1}=4a_{n+1}-4a_n$，于是$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$，

因此数列$\{a_{n+1}-2a_n\}$是以$a_2-2a_1=4$为首项、2为公比的等比数列，

故$a_{n+1}-2a_n=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$，于是$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=1$，

因此数列$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$是以 1 为首项、1 为公差的等差数列，

故$\frac{a_n}{2^n}=1+(n-1)=n$，故$a_n=n\cdot 2^n$，

故答案为：$n\cdot 2^n$

4．（2022·山西忻州）已知S_n为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且$a_1=1$，$S_n=n^2a_n$．

(1)求a_2，a_3；

(2)求$\{a_n\}$的通项公式.

答案：(1)$a_2=\frac{1}{3}$，$a_3=\frac{1}{6}$.(2)$a_n=\frac{2}{n(n+1)}$

【解析】（1）当$n=2$时，$S_2=4a_2$，即$a_1+a_2=4a_2$，

又$a_1=1$，所以$a_2=\frac{1}{3}$，

当$n=3$时，有$a_1+a_2+a_3=9a_3$，解得$a_3=\frac{1}{6}$.

故$a_2=\frac{1}{3}$，$a_3=\frac{1}{6}$.

（2）因为$S_n=n^2a_n$，所以$S_{n+1}=(n+1)^2a_{n+1}$，

两式相减得：$S_{n+1}-S_n=(n+1)^2a_{n+1}-n^2a_n$，

即$a_{n+1}=(n+1)^2a_{n+1}-n^2a_n$，

化简得：$n(n+2)a_{n+1}=n^2a_n$，

所以$(n+2)a_{n+1}=na_n$，即$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+2}$，

$\therefore a_n=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n+1}$，

化简得：$a_n=\frac{2}{n(n+1)}$.

故$\{a_n\}$的通项公式$a_n=\frac{2}{n(n+1)}$.

5．（2022·甘肃）已知数列$\{an\}$中，$a_1=1$，前 n 项和 $S_n=\frac{n+2}{3}a_n$.

(1)求 a_2，a_3；

(2)求$\{a_n\}$的通项公式.

答案：(1)3；6(2)$an=\frac{n(n+1)}{2}$.

【解析】（1）由 $S_2=\frac{4}{3}a_2$，得（a_1+a_2）$=\frac{4}{3}a_2$，

又 $a_1=1$，$\therefore a_2=3a_1=3$.

由 $S_3=\frac{5}{3}a_3$，得 3（$a_1+a_2+a_3$）$=5a_3$，

$\therefore a_3=\frac{3}{2}$ （a_1+a_2）$=6$.

（2）$\because$当 $n\geq2$ 时，$an=Sn-Sn_{-1}=\frac{n+2}{3}an-\frac{n+1}{3}an_{-1}$，

$\therefore an=\frac{n+1}{n-1}an_{-1}$，即 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$.

$\therefore an=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\ldots\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1$

$=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{1}\cdot1$

$=\frac{n(n+1)}{2}$.

又 $a_1=1$ 满足上式，

$\therefore an=\frac{n(n+1)}{2}$.

6．（2022·广东）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$S_n=\frac{n}{2}(n+a_2-1)$.求$\{a_n\}$的通项公式.

答案：$a_n=n$.

【解析】因为$a_1=1$，$S_n=\frac{n}{2}(n+a_2-1)$，则当$n=1$时，$a_1=S_1=\frac{1}{2}(1+a_2-1)$，解得$a_2=2$，

于是得：$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，当$n\geq2$时有$S_{n-1}=\frac{n(n-1)}{2}$，

因此$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}=n$，显然$a_1=1$满足上式，

所以$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=n$.

7．（2022·全国·高二课时练习）已知各项均为正数的数列$\{an\}$的前 n 项和为 Sn，且满足 $S_1=1$，$2\left(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}\right)=a_n$（$n\geq2$，$n\in\mathrm{N}^*$），求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n____________；

答案：$an=\begin{cases}1, & n=1\\ 8n-8, & n\geq2\end{cases}$

【解析】$\because an>0$，当$n\geq2$时，

$\because 2\left(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}\right)=a_n$，