重庆西南大学附中2023年高三补习班下学期第四次月考数学试题

注意事项

1．考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回．

2．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用0．5毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置．

3．请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符．

4．作答选择题，必须用2B铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．作答非选择题，必须用05毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效．

5．如需作图，须用2B铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗．

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若复数$\dfrac{2a+2i}{1+i}$（$a\in R$）是纯虚数，则复数$2a+2i$在复平面内对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．我国古代数学巨著《九章算术》中，有如下问题："今有女子善织，日自倍，五日织五尺，问日织几何？"这个问题用今天的白话叙述为：有一位善于织布的女子，每天织的布都是前一天的2倍，已知她5天共织布5尺，问这位女子每天分别织布多少？根据上述问题的已知条件，若该女子共织布$\dfrac{35}{31}$尺，则这位女子织布的天数是（　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．1

3．已知向量$\vec{a}=(2,-4)$，$\vec{b}=(k,3)$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为135°，则$k=$（　　）

A．-9　　B．1　　C．-9或1　　D．-1或9

4．已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$满足：$\vec{a}\cdot\vec{b}=0,|\vec{c}|=1$，$|\vec{a}-\vec{c}|=|\vec{b}-\vec{c}|=5$，则$|\vec{a}-\vec{b}|$的最小值为(　　)

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

5．若$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，点$C$在$AB$上，且$\angle AOC=30^\circ$，设$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\ (m,n\in R)$，则$\dfrac{m}{n}$的值为（　　）

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．3　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\sqrt{3}$

6．设一个正三棱柱$ABC-DEF$，每条棱长都相等，一只蚂蚁从上底面ABC的某顶点出发，每次只沿着棱爬行并爬到另一个顶点，算一次爬行，若它选择三个方向爬行的概率相等，若蚂蚁爬行10次，仍然在上底面的概率为P_{10}，则P_{10}为（　　）

A．$\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10}+\dfrac{1}{2}$　　B．$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{11}+\dfrac{1}{2}$

C．$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{11}-\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10}+\dfrac{1}{2}$

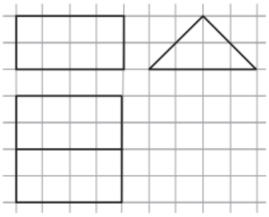
7．若复数 z 满足 $\left(1+i\right)z=\left|3+4i\right|$，则 z 对应的点位于复平面的（　　）

A． 第一象限　　**B．** 第二象限　　**C．** 第三象限　　**D．** 第四象限

8．已知 F_1,F_2 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的两个焦点，过点 F_1 且垂直于 x 轴的直线与 C 相交于 A,B 两点，若 $|AB|=\sqrt{2}$，则 ΔABF_2 的内切圆半径为（　　）

A． $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　**B．** $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　**C．** $\frac{3\sqrt{2}}{3}$　　**D．** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

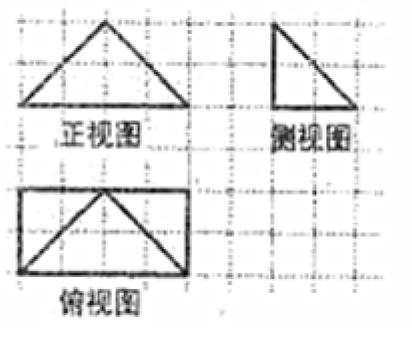
9．如图所示，网格纸上小正方形的边长为 1，粗线画出的是某几何体的三视图，其中左视图中三角形为等腰直角三角形，则该几何体外接球的体积是（　　）



A． 16π　　**B．** $\frac{32\pi}{3}$

C． $\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$　　**D．** $\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$

10．如图，正方形网格纸中的实线图形是一个多面体的三视图，则该多面体各表面所在平面互相垂直的有（　　）



A． 2 对　　**B．** 3 对

C． 4 对　　**D．** 5 对

11．已知函数 $f\left(x\right)=\cos x\sin 2x$，下列结论不正确的是（　　）

A． $y=f\left(x\right)$ 的图像关于点 $\left(\pi,0\right)$ 中心对称　**B．** $y=f\left(x\right)$ 既是奇函数，又是周期函数

C． $y=f\left(x\right)$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称　**D．** $y=f\left(x\right)$ 的最大值是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12．已知集合 $A=\left\{x\middle|x+1\le 0\right\}$，$B=\{x\,|\,x\ge a\}$，若 $A\cup B=R$，则实数 a 的值可以为（　）

A．2　　B．1　　C．0　　D．-2

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知点$(1,2)$是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1(a>0)$渐近线上的一点，则双曲线的离心率为_______

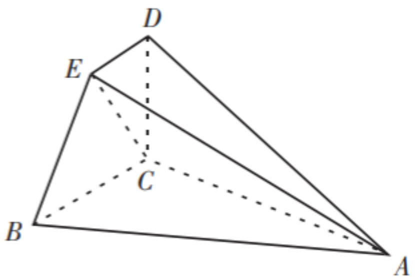
14．$\left(2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8$展开式的第 5 项的系数为_____.

15．设函数$f(x)=-3x^2+6x$在区间$[a,b]$上的值域是$[-9,3]$，则$b-a$的取值范围是__________.

16．已知向量$\vec{a}=(m,4),\vec{b}=(3,-2)$，且$\vec{a}//\vec{b}$，则$m=$__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）如图，在四棱锥$A-BCDE$中，平面$BCDE\perp$平面ABC，$BE\perp EC,BC=1,AB=2,\angle ABC=60°$.



（Ⅰ）求证：$BE\perp$平面ACE；

（Ⅱ）若锐二面角$E-AB-C$的余弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$，求直线CE与平面ABC所成的角.

18．（12 分）已知数列$\{a_n\}$的各项均为正，S_n为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$a_n^2+2a_n=4S_n+1$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式;

（2）设$b_n=\frac{a_n}{3^n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和.

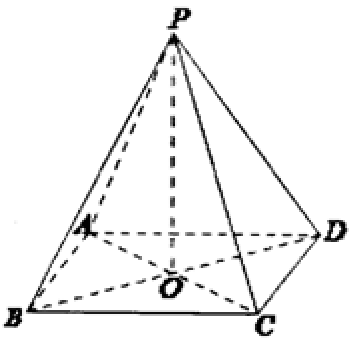
19．（12 分）已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，等比数列$\{b_n\}$的前 n 项和为T_n，且$a_1=b_1=1$，$a_5=S_3$，

$a_4+b_4=15$.

（1）求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式;

（2）求数列$\left\{\frac{S_n\cdot T_n}{n}\right\}$的前 n 项和.

20．（12 分）如图, 在四棱锥$P-ABCD$中, 底面$ABCD$是矩形, 四条侧棱长均相等.



（1）求证：AB F平面 PCD；

（2）求证：平面 $PAC\perp$ 平面 $ABCD$．

21.（12 分）设函数 f（x）=ax²–a–lnx，g（x）$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{x}}$，其中 a∈R，e=2.718…为自然对数的底数.

（Ⅰ）讨论 f（x）的单调性；

（Ⅱ）证明：当 x>1 时，g（x）>0；

（Ⅲ）确定 a 的所有可能取值，使得 f（x）>g（x）在区间（1，+∞）内恒成立.

22.（10 分）已知函数 $f(x)=|x+a|+|2x-1|\,(a\in\mathbf{R})$．

（1）$a=-1$ 时，求不等式 $f(x)\geq 2$ 解集；

（2）若 $f(x)\leq 2x$ 的解集包含于 $\left[\dfrac{1}{2},3\right]$，求 *a* 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．B

【解析】

化简复数 $\dfrac{2a+2i}{1+i}$，由它是纯虚数，求得 a，从而确定 $2a+2i$ 对应的点的坐标.

【详解】

$\dfrac{2a+2i}{1+i}=\dfrac{2(a+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=a+1+(1-a)i$ 是纯虚数，则 $\begin{cases}a+1=0\\1-a\neq 0\end{cases}$， $a=-1$，

$2a+2i=-2+2i$，对应点为$(-2,2)$，在第二象限．

故选：B．

【点睛】

本题考查复数的除法运算，考查复数的概念与几何意义．本题属于基础题．

2．B

【解析】

将问题转化为等比数列问题，最终变为求解等比数列基本量的问题．

【详解】

根据实际问题可以转化为等比数列问题，

在等比数列$\{a_n\}$中，公比$q=2$，前n项和为S_n，$S_5=5$，$S_m=\dfrac{35}{31}$，求m的值．

因为$S_5=\dfrac{a_1\left(1-2^5\right)}{1-2}=5$，解得$a_1=\dfrac{5}{31}$，$S_m=\dfrac{\frac{5}{31}\left(1-2^m\right)}{1-2}=\dfrac{35}{31}$，解得$m=3$．故选 B．

【点睛】

本题考查等比数列的实际应用，难度较易.熟悉等比数列中基本量的计算，对于解决实际问题很有帮助.

3．C

【解析】

由题意利用两个向量的数量积的定义和公式，求k的值.

【详解】

解：由题意可得$\cos 135^\circ=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{2k-12}{\sqrt{4+16}\cdot\sqrt{k^2+9}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

求得$k=-9$，或$k=1$，

故选：C.

【点睛】

本题主要考查两个向量的数量积的定义和公式，属于基础题．

4．B

【解析】

建立平面直角坐标系，将已知条件转化为所设未知量的关系式，再将$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$的最小值转化为用该关系式表达的算式，利用基本不等式求得最小值.

【详解】

建立平面直角坐标系如下图所示，设$\vec{c}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，且$A(m,0),B(0,n)$，由于

$|\vec{a}-\vec{c}|=|\vec{b}-\vec{c}|=5$，所以$m,n\in[4,6]$.

$\vec{a}-\vec{c}=(m-\cos\theta,-\sin\theta),\vec{b}-\vec{c}=(-\cos\theta,n-\sin\theta)$.所以

$\begin{cases}m^2-2m\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta=25\\n^2-2n\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta=25\end{cases}$，即$m^2+n^2=48+2m\cos\theta+2n\sin\theta$.

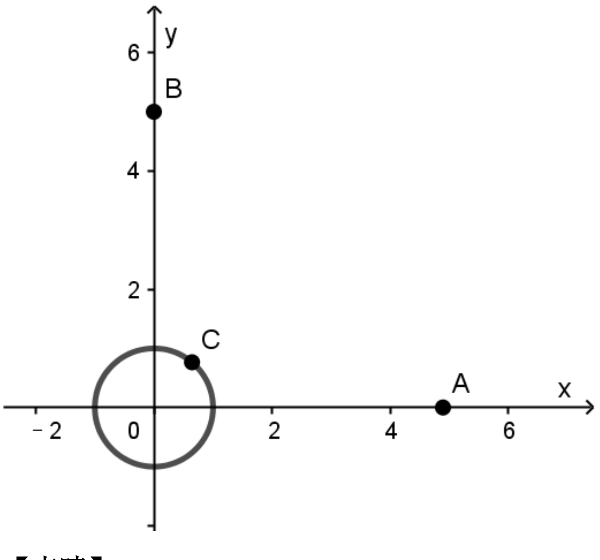
$|\vec{a}-\vec{b}|=|(\vec{a}-\vec{c})-(\vec{b}-\vec{c})|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{c})^2-2(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})+(\vec{b}-\vec{c})^2}=\sqrt{48+2m\cos\theta+2n\sin\theta}$

$=\sqrt{m^2+n^2}\geq\sqrt{2mn}$.当且仅当$m=n$时取得最小值，此时由$m^2+n^2=48+2m\cos\theta+2n\sin\theta$得

$2m^2=48+2m(\sin\theta+\cos\theta)=48+2\sqrt{2}m\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，当$\theta=\frac{5\pi}{4}$时，$2m^2$有最小值为$48-2\sqrt{2}m$，即

$2m^2=48-2\sqrt{2}m$，$m^2+\sqrt{2}m-24=0$，解得$m=3\sqrt{2}$.所以当且仅当$m=n=3\sqrt{2},\theta=\frac{5\pi}{4}$时$|\vec{a}-\vec{b}|$有最小值为$\sqrt{2\times(3\sqrt{2})^2}=6$.

故选：**B**



【点睛】

本小题主要考查向量的位置关系、向量的模，考查基本不等式的运用，考查数形结合的数学思想方法，属于难题.

5．B

【解析】

利用向量的数量积运算即可算出.

【详解】

解：$\because\angle AOC=30^\circ$

$\therefore\cos<\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}>=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \dfrac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}}{\left|\overrightarrow{OC}\right|\left|\overrightarrow{OA}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \dfrac{\left(m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OA}}{\left|m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\right|\left|\overrightarrow{OA}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \dfrac{m\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+n\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}}{\sqrt{m^2\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+2mn\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+n^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2}\left|\overrightarrow{OA}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\because \left|\overrightarrow{OA}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\therefore \dfrac{m}{\sqrt{m^2+3n^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore m^2=9n^2$

又$\because C$在AB上

$\therefore m>0$，$n>0$

$\therefore \dfrac{m}{n}=3$

故选：B

【点睛】

本题主要考查了向量的基本运算的应用，向量的基本定理的应用及向量共线定理等知识的综合应用．

6．**D**

【解析】

由题意，设第n次爬行后仍然在上底面的概率为P_n.①若上一步在上面，再走一步要想不掉下去，只有两条路，其概率为$\dfrac{2}{3}P_{n-1}$；②若上一步在下面，则第$n-1$步不在上面的概率是$1-P_{n-1}$.如果爬上来，其概率是$\dfrac{1}{3}\left(1-P_{n-1}\right)$，两种事件又是互斥的,可得$P_n=\dfrac{2}{3}P_{n-1}+\dfrac{1}{3}\left(1-P_{n-1}\right)$，根据求数列的通项知识可得选项.

【详解】

由题意，设第n次爬行后仍然在上底面的概率为P_n.

①若上一步在上面，再走一步要想不掉下去，只有两条路，其概率为$\dfrac{2}{3}P_{n-1}\left(n\geq 2\right)$；

②若上一步在下面，则第$n-1$步不在上面的概率是$1-P_{n-1},\left(n\geq 2\right)$.如果爬上来，其概率是$\dfrac{1}{3}\left(1-P_{n-1}\right),\left(n\geq 2\right)$，

两种事件又是互斥的,$\therefore P_n=\frac{2}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}\left(1-P_{n-1}\right)$，即 $P_n=\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}$，$\therefore P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(P_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$，

$\therefore$数列$\left\{P_n-\frac{1}{2}\right\}$是以$\frac{1}{3}$为公比的等比数列，而$P_1=\frac{2}{3}$，所以$P_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}$，

$\therefore$当$n=10$时，$P_{10}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{10}+\frac{1}{2}$，

故选：**D.**

【点睛】

本题考查几何体中的概率问题，关键在于运用递推的知识，得出相邻的项的关系，这是常用的方法，属于难度题.

7．**D**

【解析】

利用复数模的计算、复数的除法化简复数z，再根据复数的几何意义，即可得答案；

【详解】

Q $\left(1+i\right)z=\left|3+4i\right|=5\Rightarrow z=\frac{5}{1+i}=\frac{5(1-i)}{2}=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i$，

$\therefore z$对应的点$(\frac{5}{2},-\frac{5}{2})$，

$\therefore z$对应的点位于复平面的第四象限.

故选：**D.**

【点睛】

本题考查复数模的计算、复数的除法、复数的几何意义，考查运算求解能力，属于基础题.

8．**B**

【解析】

首先由$|AB|=\sqrt{2}$求得双曲线的方程，进而求得三角形的面积，再由三角形的面积等于周长乘以内切圆的半径即可求解.

【详解】

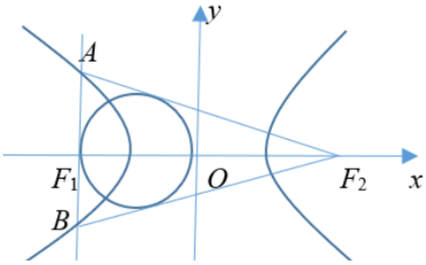
由题意$b=1$将$x=-c$代入双曲线C的方程,得$y=\pm\frac{1}{a}$则$\frac{2}{a}=\sqrt{2},a=\sqrt{2},c=\sqrt{3}$,由

$\left|AF_2\right|-\left|AF_1\right|=\left|BF_2\right|-\left|BF_1\right|=2a=2\sqrt{2}$,得$\Delta ABF_2$的周长为

$\left|AF_2\right|+\left|BF_2\right|+|AB|=2a+\left|AF_1\right|+2a+\left|BF_1\right|+|AB|=4a+2|AB|=6\sqrt{2}$,

设ΔABF_2的内切圆的半径为r,则$\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}r=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2},r=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

故选：B



【点睛】

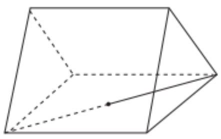
本题考查双曲线的定义、方程和性质，考查三角形的内心的概念，考查了转化的思想，属于中档题.

9．C

【解析】

作出三视图所表示几何体的直观图，可得直观图为直三棱柱，并且底面为等腰直角三角形，即可求得外接球的半径，即可得外接球的体积.

【详解】



如图为几何体的直观图，上下底面为腰长为$\sqrt{2}$的等腰直角三角形，三棱柱的高为4，其外接球半径为$r=2\sqrt{2}$，所以体积为$V=\frac{4}{3}\pi\times\left(2\sqrt{2}\right)^3=\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$.

故选：C

【点睛】

本题考查三视图还原几何体的直观图、球的体积公式，考查空间想象能力、运算求解能力，求解时注意球心的确定.

10．C

【解析】

画出该几何体的直观图$P-ABCD$，易证平面$PAD\perp$平面$ABCD$，平面$PCD\perp$平面PAD，平面$PAB\perp$平面PAD，平面$PAB\perp$平面PCD，从而可选出答案.

【详解】

该几何体是一个四棱锥，直观图如下图所示，易知平面$PAD\perp$平面$ABCD$，

作$PO\perp AD$于O，则有$PO\perp$平面$ABCD$，$PO\perp CD$，

又$AD\perp CD$，所以，$CD\perp$平面PAD，

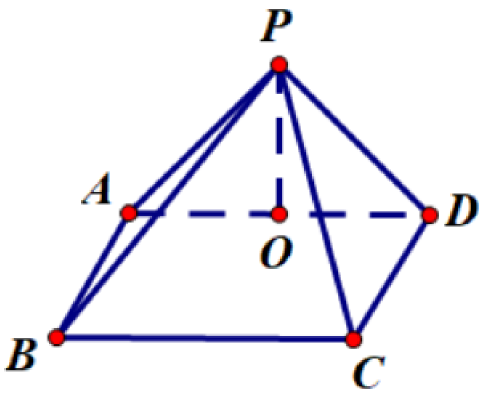
所以平面$PCD\perp$平面PAD，

同理可证：平面 $PAB\perp$ 平面 PAD，

由三视图可知：$PO=AO=OD$，所以，$AP\perp PD$，又 $AP\perp CD$，

所以，$AP\perp$ 平面 PCD，所以，平面 $PAB\perp$ 平面 PCD，

所以该多面体各表面所在平面互相垂直的有 **4** 对．



【点睛】

本题考查了空间几何体的三视图，考查了四棱锥的结构特征，考查了面面垂直的证明，属于中档题．

11．**D**

【解析】

通过三角函数的对称性以及周期性，函数的最值判断选项的正误即可得到结果．

【详解】

解：$A:f(2\pi-x)=\cos(2\pi-x)\sin 2(2\pi-x)=-\cos x\sin 2x=-f(x)$，正确；

$B:f(-x)=\cos(-x)\sin 2(-x)=-\cos x\sin 2x=-f(x)$，为奇函数，周期函数，正确；

$C:f(\pi-x)=\cos(\pi-x)\sin 2(\pi-x)=\cos x\sin 2x=f(x)$，正确；

D: $y=2\sin x\cos^2 x=2\sin x-2\sin^3 x$，令 $t=\sin x$，$t\in[-1,1]$ 则 $g(t)=2t-2t^3$，$g'(t)=2-6t^2$，$t\in[-1，1]$，则

$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<t<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $g'(t)>0$，$-1<t<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $1>t>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $g'(t)<0$，即 $g(t)$ 在 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递增，在

$\left(-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 和 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$ 上单调递减；

且 $g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$，$g(-1)=0$，$\therefore y_{max}=g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故 **D** 错误．

故选：D．

【点睛】

本题考查三角函数周期性和对称性的判断，利用导数判断函数最值，属于中档题．

12．**D**