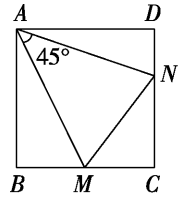
专题 36 含 45°角的问题的几种解题思路（解析版）

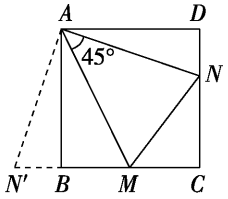
模块一 典例剖析+针对训练

思路 1：套用半角模型常用结论.

模型解读：



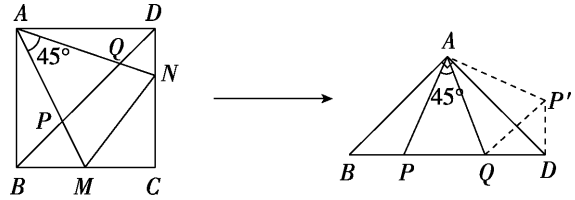
图①



图②

常用结论：如图①，$BM+DN=MN$；MA 平分$\angle BMN$，NA 平分$\angle DNM$；$\triangle CMN$ 的周长$=2AB$.

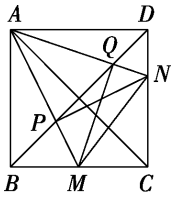
常用证明方法：如图②，将$\triangle ADN$ 绕点 A 顺时针旋转 90°，得到$\triangle ABN'$，证明$\triangle AMN\cong\triangle AMN'$.



图③

常用结论：如图③，$BP^2+QD^2=PQ^2$.

常用证明方如图④，在正方形 $ABCD$ 中，$AD=a$，点 M，N 分别在 BC，CD 边上，且$\angle MAN=45°$.



图④

拓展结论：

(1)$BM+DN=MN$；

(2)MA 平分$\angle BMN$，NA 平分$\angle DNM$；

(3)$\triangle CMN$ 的周长$=2a$(为定值)；

(4)$S_{\triangle ABM}+S_{\triangle ADN}=S_{\triangle AMN}$；

(5)$\dfrac{MN}{AB}$的最小值为 $2\sqrt{2}-2$；

(6)$S_{\triangle AMN}$ 的最小值为$(\sqrt{2}-1)a^2$；

(7)$S_{\triangle CMN}$ 的最大值为$(3-2\sqrt{2})a^2$；

(8)$BP^2+QD^2=PQ^2$；

(9)$\triangle APQ\backsim\triangle BAQ\backsim\triangle DPA\backsim\triangle BPM\backsim\triangle DNQ$；

(10)$BQ\cdot DP=AB\cdot AD=a^2$(定值)；

(11)$\triangle APQ\backsim\triangle ANM$(相似比为 $1:\sqrt{2}$)；

(12)$S_{\triangle AMN}=2S_{\triangle APQ}$；

(13)P，M，N，Q 四点共圆；

(14)$\triangle AMC\backsim\triangle AQD$(相似比为 $1:\sqrt{2}$)；

(15)$CM\cdot CN=2BM\cdot DN$；

(16)$MQ\perp AN$，$NP\perp AM$；

(17)$\triangle APN$ 与 $\triangle AQM$ 均为等腰直角三角形；

(18)A，B，M，Q 四点共圆；

(19)A，P，N，D 四点共圆.

法：将 $\triangle ABP$ 绕点 A 逆时针旋转 90° ，得到 $\triangle ADP'$，证明 $\triangle AQP\cong\triangle AQP'$.

思路 2：作垂直，将 45° 角置于直角三角形中，构造等腰直角三角形解决问题.

思路 3：利用同弧所对的圆周角等于圆心角的一半，构造直角三角形，解决问题.

思路 4：利用两角和或差的正切公式

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\quad;\quad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

典例 1 在平面直角坐标系中，已知点 A（4，0）、B（﹣6，0），点 C 是 y 轴上的一个动点，当 $\angle BCA=45°$ 时，求点 C 的坐标.

思路引领： 由于本题没有交代点 C 在 y 轴正半轴上还是负半轴上，因此这道题点 C 的位置需要分两种情况讨论，这两个位置正好关于 x 轴对称，因此我们只需求解点 C 在 y 轴正半轴上的情况，然后由对称性求出点 C 在 y 轴负半轴上的情况.

方法 1：如图①，以 45° 角为基础，构造等腰直角三角形，由 $\triangle BCF$ 与 $\triangle BDE$ 全等，设法求出 OC 的长.

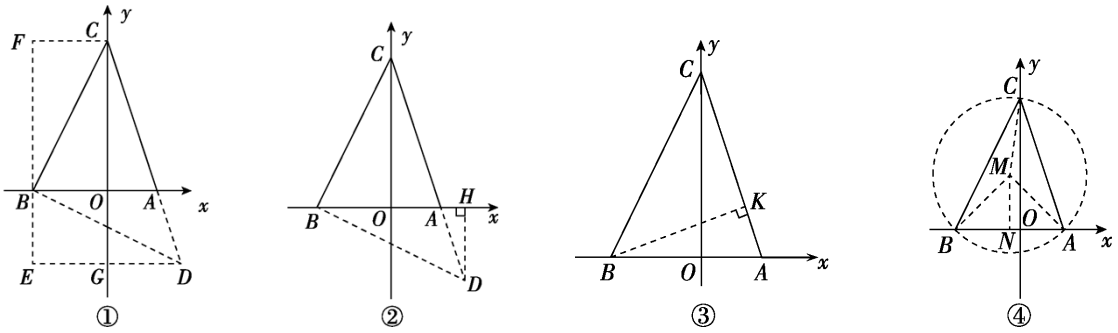
方法 2：如图②，同方法 1 构造等腰直角三角形 BCD，过点 D 作 $DH\perp x$ 轴于点 H，其实这一方法与前一方法类似，因为 $\triangle BOC$ 与图①中的 $\triangle CFB$ 全等，$\triangle BDH$ 与图②中的 $\triangle DBE$ 全等，求 OC 长的时候，可利用 $\triangle AOC$ 与 $\triangle ADH$ 相似来解决.

方法 3：如图③，构造等腰直角三角形，还可以过点 B 作 $BK\perp AC$ 于点 K 来解决.

方法 4：过点 A 作 BC 的垂线，解题方法同方法 3.

方法 5：如图④，利用同弧所对的圆心角是圆周角的 2 倍，将 45° 角转化为 90° 角来解决问题.

方法 6：利用两角和的正切公式容易轻松求解。



例 1 图

选择方法 5 和方法 6 解

方法 5 解：设线段 AB 的中点为 E，

∵点 A（4，0）、B（﹣6，0），

∴AB=10，E（﹣1，0），

（1）如答图 1 所示，过点 E 在第二象限作 $EP\perp AB$，且 $EP=\frac{1}{2}AB=5$，则△PBA 为等腰直角三角形，∠$BPA=90°$，$PA=PB=5\sqrt{2}$；

以点 P 为圆心，PA（或 PB）长为半径作⊙P，与 y 轴的正半轴交于点 C，

∵∠BCA 为⊙P 的圆周角，

∴$\angle BCA=\frac{1}{2}\angle BPA=45°$，即则点 C 即为所求．

过点 P 作 $PF\perp y$ 轴于点 F，则 $OF=PE=5$，$PF=1$，

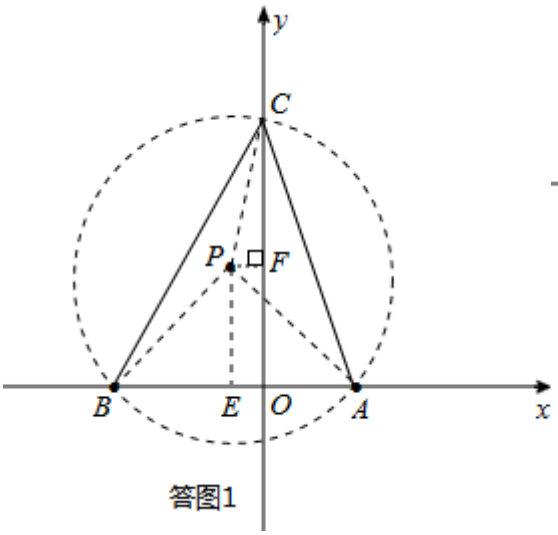
在 Rt△PFC 中，$PF=1$，$PC=5\sqrt{2}$，由勾股定理得：$CF=\sqrt{PC^2-PF^2}=7$，

∴$OC=OF+CF=5+7=12$，

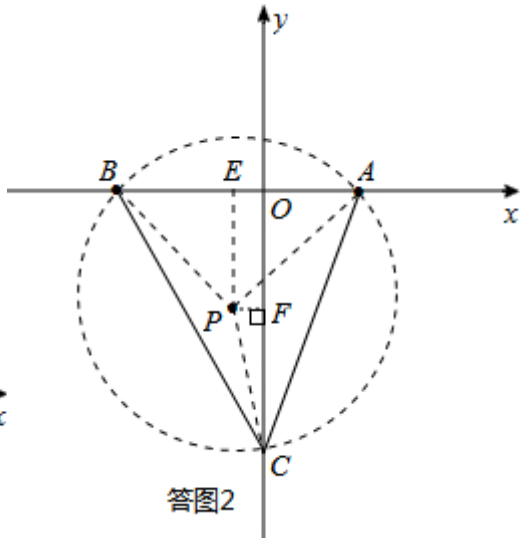
∴点 C 坐标为（0，12）；

（2）如答图 2 所示，在第 3 象限可以参照（1）作同样操作，同理求得 y 轴负半轴上的点 C 坐标为（0，﹣12）．

综上所述，点 C 坐标为（0，12）或（0，﹣12）．



答图1



答图2

总结提升：本题考查了圆周角定理，难度较大，由 45° 的圆周角联想到 90° 的圆心角是解题的突破口，也是本题的难点所在．

方法 6：当 C 在 y 轴正半轴上时，设 C(0，y)

∵tan∠BCA=tan45=1

∴tan（∠BCO+∠ACO)=1

$$\frac{\frac{4}{y}+\frac{6}{y}}{1-\frac{4}{y}\times\frac{6}{y}}=1$$

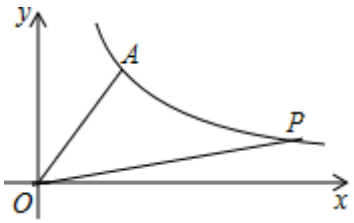
解得 y=12(负值舍去）C（0，12）

当 C 在 y 轴负半轴上时，C（0,-12)

综上所述，点 C 坐标为（0，12）或（0，﹣12）.

针对训练

1.（2021 春•永嘉县校级期末）如图，已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$x>0$）的图象经过点 A（4，5），若在该图象上有一点 P，使得$\angle AOP=45°$，则点 P 的坐标是____（$\sqrt{5}$，$\frac{2\sqrt{5}}{3}$）____.



思路引领 作 $AE\perp y$ 轴于 E，将线段 OA 绕点 O 顺时针旋转 90°得到 OA'，作 $A'F\perp x$ 轴于 F，则$\triangle AOE\cong\triangle A'OF$，可得 $OF=OE=4$，$A'F=AE=3$，即 A'（4，﹣3），求出线段 AA' 的中垂线的解析式，利用方程组确定交点坐标即可.

解：如图，作 $AE\perp y$ 轴于 E，将线段 OA 绕点 O 顺时针旋转 90°得到 OA'，作 $A'F\perp x$ 轴于 F，则$\triangle AOE\cong\triangle A'OF$，可得 $OF=OE=5$，$A'F=AE=4$，即 A'（5，﹣4）.

∵反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$x>0$）的图象经过点 A（4，5），

所以由勾股定理可知：$OA=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$，

∴$k=4\times5=20$，

∴$y=\frac{20}{x}$，

∴AA' 的中点 K（$\frac{9}{2}$，$\frac{1}{2}$），

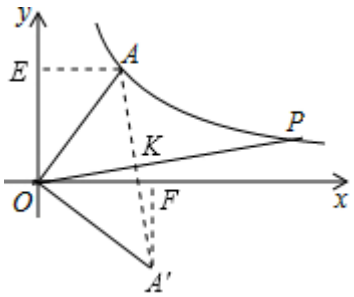
∴直线 OK 的解析式为 $y=\frac{1}{9}x$，

由 $\begin{cases}y=\frac{1}{9}x\\y=\frac{20}{x}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=6\sqrt{5}\\y=\frac{2\sqrt{5}}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-6\sqrt{5}\\y=-\frac{2\sqrt{5}}{3}\end{cases}$，

∵点 P 在第一象限，

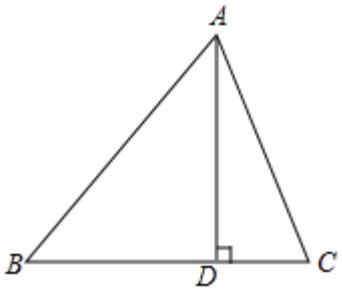
∴P（$6\sqrt{5}$，$\frac{2\sqrt{5}}{3}$），

故答案为（$6\sqrt{5}$，$\frac{2\sqrt{5}}{3}$）.



总结提升：本题考查反比例函数图象上点的坐标特征，一次函数的应用等知识，解题的关键是学会构造全等三角形解决问题，学会构建一次函数，利用方程组确定交点坐标，属于中考填空题中的压轴题.

2．如图，已知△ABC 中，$\angle BAC=45°$，$AD\perp BC$ 于点 D，若 $BD=2$，$CD=1$．求△ABC 的面积.



思路引领：如图，过 B 作 $BE\perp AC$，垂足为 E 交 AD 于 F，由 $\angle BAC=45°$ 可以得到 $BE=AE$，再根据已知条件可以证明△AFE≌△BCE，可以得到 $AF=BC=3$，而 $\angle FBD=\angle DAC$，又 $\angle BDF=\angle ADC=90°$，由此可以证明△$BDF$∽△$ADC$，所以 FD：$DC=BD$：AD，设 FD 长为 x，则可建立关于 x 的方程，解方程即可求出 FD，AD 的长，根据三角形的面积公式即可得到结论.

解：如图，过 B 作 $BE\perp AC$，垂足为 E 交 AD 于 F，

∵∠BAC=45°，

∴BE=AE，

∵∠C+∠EBC=90°，∠C+∠EAF=90°，

∴∠EAF=∠EBC，

在△AFE与△BCE中，$\begin{cases}\angle EAF=\angle EBC\\ BE=AE\\ \angle FEA=\angle CEB=90°\end{cases}$，

∴△AFE≌△BCE（ASA），

∴AF=BC=BD+DC=3，∠FBD=∠DAC，

又∵∠BDF=∠ADC=90°，

∴△BDF∽△ADC，

∴FD：DC=BD：AD，

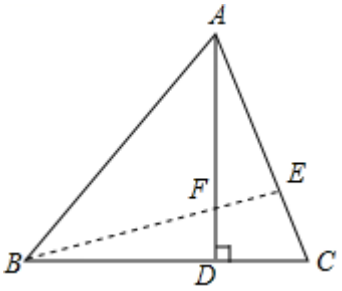
设FD长为x，则

x：1=2：（x+3），

解得x=$\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$（负值舍去），即FD=$\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$，

∴AD=AF+FD=3+$\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$，

∴△ABC的面积=$\frac{1}{2}$$BC$•$AD$=$\frac{1}{2}$×3×（3+$\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$）=$\frac{9+3\sqrt{17}}{4}$.



总结提升：本题考查了勾股定理，全等三角形的判定和性质，根据题意作出辅助线，构造出直角三角形是解答此题的关键.

典例 2（2022•东莞市校级一模）如图 1，正方形 $ABCD$ 中，E、F 分别是边 CD、AD 上的点，∠EBF=45°.

（1）小聪同学通过将△*BAF* 绕点 *B* 顺时针旋转 90°至△*BCG*，得到∠*EBG*＝∠*EBF*＝45°．

①请直接写出线段 *CE*、*EF*、*AF* 之间的数量关系：<u>　*EF*＝*EC*+*AF*　</u>（用等式表示）；

②若 *AB*＝2，*E* 为 *CD* 边中点，求 *AF*．

（2）如图 2，将正方形 *ABCD* 改为矩形，且 *AB*＝2，*BC*＝3，其他条件不变，即：*E*、*F* 分别是边 *CD*、*AD* 上的点，∠*EBF*＝45°．

③记 *EF*＝*y*，*CE*+*AF*＝*x*，试探究 *y* 与 *x* 之间的数量关系（用等式表示）；

④当 *BF*⊥*EF* 时，求线段 *EF* 的长．

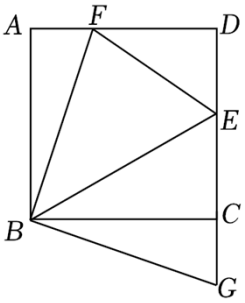


图1

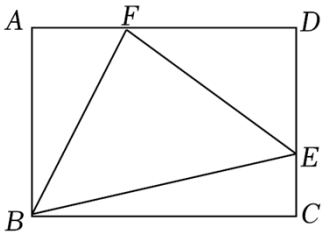


图2

思路引领（1）①由旋转可知△*BAF*≌△*BCG*，所以 *BF*＝*BG*，*AF*＝*CG*，*BF*＝*BG*，易证△*BFE*≌△*BGE*（*SAS*），所以 *EF*＝*EC*+*CG*＝*EC*+*AF*；

②若点 *E* 为 *CD* 的中点，则 *DE*＝*EC*＝1，设 *AF*＝*x*，则 *CG*＝*x*，*DF*＝2﹣*x*，由①可知，*EF*＝1+*x*，在 Rt△*DEF* 中，∠*D*＝90°，利用勾股定理建立关于 *x* 的方程，求解即可；

（2）③将△*ABF* 绕点 *B* 顺时针旋转 90°至△*PBM*，延长 *BM* 交 *DC* 的延长线于点 *N*，过点 *M* 作 *MH*⊥*DN* 于点 *N*，连接 *EM*，由旋转可得，∠*BPM*＝90°，*BF*＝*BM*，*BP*＝*AB*＝2，∠*ABF*＝∠*PBM*，易证四边形 *PMNC* 是矩形，所以 *PM*＝*CH*＝*AF*，所以 *CE*+*CH*＝*x*，由（1）中思路易证△*BEF*≌△*BEM*（*SAS*），所以 *EM*＝*BF*＝*y*，在 Rt△*MHE* 中，由勾股定理可得，$MH^2+EH^2=EM^2$，代入数据可得结论；

④因为 *BF*⊥*EF*，所以△*BFE* 是等腰直角三角形，则 *FB*＝*FE*，∠*AFB*+∠*DFE*＝90°，易证△*ABF*≌△*DFE*（*AAS*），所以 *DF*＝2，*AF*＝*DE*＝1，由勾股定理可得 *EF* $=\sqrt{5}$．

解：（1）①由题意可知△*BAF*≌△*BCG*，

∴*BF*＝*BG*，*AF*＝*CG*，*BF*＝*BG*，

∵∠*EBG*＝∠*EBF*＝45°，*BE*＝*BE*，

∴△*BFE*≌△*BGE*（*SAS*），

∴*EF*＝*EG*，

∵*EG*＝*EC*+*CG*＝*EC*+*AF*，

∴$EF=EC+AF$，

故答案为：$EF=EC+AF$.

②若点 E 为 CD 的中点，

∴$DE=EC=1$，

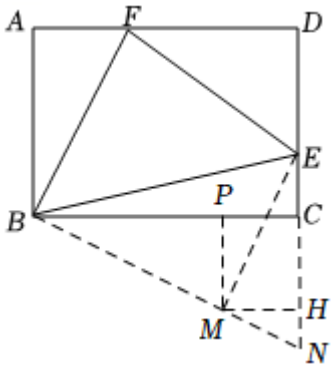
设 $AF=x$，则 $CG=x$，$DF=2-x$，

由①可知，$EF=1+x$，

在 Rt△DEF 中，$\angle D=90°$，由勾股定理可得，$(2-x)^2+1^2=(1+x)^2$，

解得 $x=\frac{2}{3}$，即 $AF=\frac{2}{3}$.

（2）③将△ABF 绕点 B 顺时针旋转 90°至△PBM，延长 BM 交 DC 的延长线于点 N，过点 M 作 $MH\perp DN$ 于点 N，连接 EM，



由旋转可得，$\angle BPM=90°$，$BF=BM$，$BP=AB=2$，$\angle ABF=\angle PBM$，

∴$\angle CPM=90°$，$PC=MH=1$，

∵$\angle BCN=90°$，

∴四边形 $PMNC$ 是矩形，

∴$PM=CH=AF$，

∴$CE+CH=x$，

∵$\angle FBE=45°$，

∴$\angle ABF+\angle EBC=45°$，即$\angle PBM+\angle EBC=\angle EBM=45°$，

∵$BF=BF$，$\angle FBE+\angle EBM=45°$，$BE=BE$，

∴△BEF≌△BEM（SAS），

∴$EM=BF=y$，

在 Rt△MHE 中，由勾股定理可得，$MH^2+EH^2=EM^2$，

∴$1^2+x^2=y^2$，即 $y=\sqrt{x^2+1}$.

④∵$BF\perp EF$，

∴△BFE 是等腰直角三角形，

∴$FB=FE$，$\angle AFB+\angle DFE=90°$，

∵$\angle AFB+\angle ABF=90°$，

∴$\angle ABF=\angle DFE$，

∵$\angle A=\angle D=90°$，

∴△ABF≌△DFE（AAS），

∴$DF=2$，$AF=DE=1$，

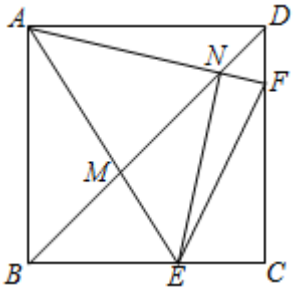
∴$EF=\sqrt{5}$.

总结提升：本题属于四边形综合题，主要考查全等三角形的性质与判定，矩形的性质，勾股定理，旋转的性质等知识，解题的关键是利用类比思想作出正确的辅助线，将所求线段放在同一个三角形中.

针对训练

1.（2020•泗水县二模）如图，在正方形 $ABCD$ 中，E、F 分别是 BC、CD 上的点，且$\angle EAF=45°$，AE、AF 分别交 BD 于 M、N，连接 EN、EF，有以下结论：

①△ABM∽△NEM；②△AEN 是等腰直角三角形；③当 $AE=AF$ 时，$\frac{BE}{EC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；④$BE+DF=EF$．其中正确的个数有（　　）



A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

思路引领：①如图 1，证明△AMN∽△BME 和△AMB∽△NME，

②利用相似三角形的性质可得$\angle NAE=\angle AEN=45°$，则△$AEN$ 是等腰直角三角形可作判断；

③先证明 $CE=CF$，假设正方形边长为 1，设 $CE=x$，则 $BE=1-x$，表示 AC 的长为 $AO+OC$ 可作判断；

④如图 3，将△ADF 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到△ABH，证明△AEF≌△AEH（SAS），则 $EF=EH=BE+BH=BE+DF$，可作判断.

解：如图 1，

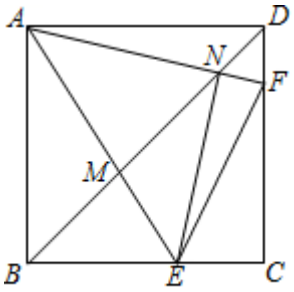


图1

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$\angle EBM=\angle ADM=\angle FDN=\angle ABD=45°$，

∵$\angle MAN=\angle EBM=45°$，$\angle AMN=\angle BME$，

∴$\triangle AMN\backsim\triangle BME$，

∴$\frac{AM}{BM}=\frac{MN}{EM}$，

∴$\frac{AM}{MN}=\frac{BM}{EM}$，

∵$\angle AMB=\angle EMN$，

∴$\triangle AMB\backsim\triangle NME$，故①正确，

∴$\angle AEN=\angle ABD=45°$

∴$\angle NAE=\angle AEN=45°$，

∴$\triangle AEN$ 是等腰直角三角形，故②正确，

在$\triangle ABE$ 和$\triangle ADF$ 中，

∵$\begin{cases}AB=AD\\ \angle ABE=\angle ADF=90°\\ AE=AF\end{cases}$，

∴$\triangle ABE\cong\triangle ADF$（$SAS$），

∴$BE=DF$，

∵$BC=CD$，

∴$CE=CF$，

假设正方形边长为 1，设 $CE=x$，则 $BE=1-x$，

如图 2，连接 AC，交 EF 于 H，

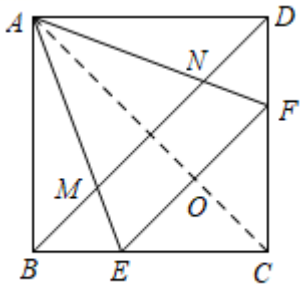


图2

∵$AE=AF$，$CE=CF$，

∴AC 是 EF 的垂直平分线，

∴$AC\perp EF$，$OE=OF$，

Rt△CEF 中，$OC=\frac{1}{2}EF=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，

△EAF 中，$\angle EAO=\angle FAO=22.5^\circ=\angle BAE=22.5^\circ$，

∴$OE=BE$，

∵$AE=AE$，

∴Rt△ABE≌Rt△AOE（HL），

∴$AO=AB=1$，

∴$AC=\sqrt{2}=AO+OC$，

∴$1+\frac{\sqrt{2}}{2}x=\sqrt{2}$，

$x=2-\sqrt{2}$，

∴$\frac{BE}{EC}=\frac{1-(2-\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故③正确，

③如图 3，

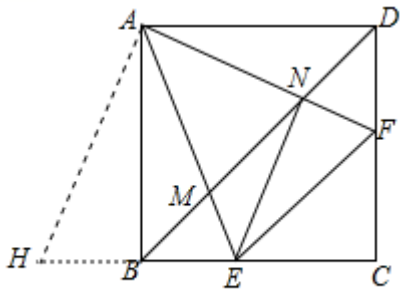


图3

∴将△*ADF* 绕点 *A* 顺时针旋转 90°得到△*ABH*，则 *AF*＝*AH*，∠*DAF*＝∠*BAH*，

∵∠*EAF*＝45°＝∠*DAF*+∠*BAE*＝∠*HAE*，

∵∠*ABE*＝∠*ABH*＝90°，

∴*H*、*B*、*E* 三点共线，

在△*AEF* 和△*AEH* 中，

$$\begin{cases} AE = AE \\ \angle FAE = \angle HAE \\ AF = AH \end{cases},$$

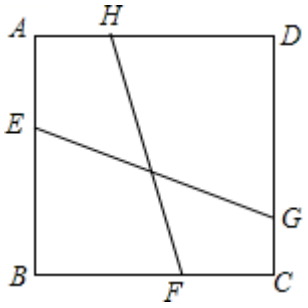
∴△*AEF*≌△*AEH*（*SAS*），

∴*EF*＝*EH*＝*BE*+*BH*＝*BE*+*DF*，故④正确．

故选：*D*．

总结提升：本题属于四边形综合题，综合考查正方形的性质、全等三角形的判定和性质，等腰直角三角形的判定和性质、线段垂直平分线的性质和判定等知识，解题的关键是灵活应用所学知识解决问题，学会添加常用辅助线构造全等三角形，属于中考压轴题．

2．如图，正方形 *ABCD* 中，点 *E*、*F*、*G*、*H* 分别在边 *AB*、*BC*、*CD*、*DA* 上，且 *EG* 与 *FH* 的夹角为 45°，若正方形 *ABCD* 的边长为 1，*FH* 的长为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，求 *EG* 的长．



思路引领：可过点 *A* 作 *AM*∥*HF* 交 *BC* 于点 *M*，过点 *A* 作 *AN*∥*EG* 交 *CD* 于点 *N*，将△*AND* 绕点 *A* 旋转到△*APB*，不难得出△*APM* 和△*ANM* 全等，那么可得出 *PM*＝*MN*，而 *MB* 的长可在 Rt△*ABM* 中根据 *AB* 和 *AM*（即 *HF* 的长）求出．如果设 *DN*＝*x*，那么 *NM*＝*PM*＝*BM*+*x*，*MC*＝*BC* - *BM*＝1 - *BM*，因此可在直角三角形 *MNC* 中用勾股定理求出 *DN* 的长，进而可在 Rt△*AND* 中求出 *AN* 即 *EG* 的长．

解：过点 *A* 作 *AM*∥*HF* 交 *BC* 于点 *M*，过点 *A* 作 *AN*∥*EG* 交 *CD* 于点 *N*，

∵*AB*＝1，*AM*＝*FH* $=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/166133144013011040